JAUME GARCÍA, JOSÉ MANUEL GONZÁLEZ-PÁRAMO
Y ANNA MATAS
Directores

ANÁLISIS EMPÍRICOS SOBRE LA ECONOMÍA ESPAÑOLA

Ensayos en homenaje a Josep Lluís Raymond Bara

THOMSON REUTERS
ARANZADI

Primera edición, 2017

THOMSON REUTERS PROVIEW™ eBOOKS

Incluye versión en digital

Editorial Aranzadi, S.A.U.
Camino de Galar, 15
31190 Cizur Menor (Navarra)
ISBN: 978-84-9152-676-6
DL NA XXX-XXXX
Printed in Spain. Impreso en España
Fotocomposición: Editorial Aranzadi, S.A.U.
Impresión: Rodona Industria Gráfica, SL
Polígono Agustinos, Calle A, Nave D-11
31013 - Pamplona

Capítulo 8

Elementos multisectoriales para el análisis empírico de la economía española*

Ferrán Sancho

Universitat Autònoma de Barcelona

1. INTRODUCCIÓN

Conocí, científicamente hablando, a Josep Lluís Raymond cuando recibí el encargo de impartir una asignatura en la UAB, del entonces denominado segundo ciclo de la licenciatura de Economía, sobre métodos y modelos mutisectoriales en el ya muy lejano y nostálgico año 1985. Tal como la diseñé, la asignatura quería ir más allá de la pura descripción y consiguiente desfile de modelos teóricos y buscaba ofrecer a los alumnos instrumentos operativos para poder actuar sobre datos reales de la economía española, incluso cuando en aquellos tiempos la disponibilidad de ordenadores de uso personal y de programas informáticos ágiles y simples era todo un sueño. Siguiendo el protocolo del momento y buceando por la biblioteca llegaron a mis manos algunos artículos sobre la economía española que Josep Lluís Raymond había escrito y en especial uno sumamente interesante publicado en Papeles de Economía (**Crecimiento de la producción y nivel de empleo en la economía española**, 1982, n.° 8) que usaba las tablas input-output de la economía española para analizar y delimitar los factores de crecimiento y empleo que actúan vía demanda final. Desmenucé el artículo y lo pasé a un formato simplificado para que pudiesen jugar con él los estudiantes, lo que hoy llamaríamos simular, en ausencia de cualquier soporte digital. Este ejercicio de transferencia de conocimiento hacia la docencia me inició en los entresijos prácticos del

* Agradezco el apoyo del proyecto MICINN-ECO2014-52506R así como la excelente acogida dispensada por el Departamento de Economía de la Universidad Loyola Andalucía durante la visita que permitió el redactado de este trabajo.

análisis input-output empírico. Y es en justo homenaje y reconocimiento a la impecable trayectoria de Josep Lluís Raymond que tengo el placer de ofrecer unas reflexiones basadas en desarrollos recientes del análisis intersectorial así como en algunos de mis trabajos en este ámbito del análisis económico aplicado.

Sin ningún género de dudas, el análisis input-output (I-O) ha devenido, por si mismo, un área de trabajo en por lo menos dos grandes ámbitos. El primero se ha centrado en desarrollos teóricos que han permitido entender mejor y avanzar en la comprensión de las características de una economía moderna, que es desagregada por naturaleza e interconectada por definición. El segundo ámbito ha priorizado el enfoque empírico para identificar y cuantificar la información económica y presentarla en un formato apropiado para la valoración de los decisores públicos. Esta distinción no oculta que ambos ámbitos se refuerzan y, de hecho, se necesitan entre sí. Los números han de poder ser interpretados en un marco de referencia comprensible, mientras que los desarrollos conceptuales serían innocuos, por no decir vacíos, si no fuesen operacionales. En definitiva, un buen maridaje entre la teoría y la práctica siempre enriquecerá el trabajo del economista aplicado. Este ha sido el caso, afortunadamente y en la inmensa mayoría de los casos, del análisis input-output. Aplicaciones I-O de tipo impositivo, fiscal, laboral, de comercio internacional, y últimamente de economía medioambiental, han permitido conocer con abundante detalle la estructura de las economías desarrolladas y en proceso de desarrollo, tanto a nivel nacional como en subunidades regionales o en agrupaciones supranacionales. Una información que es, o debería ser, extremadamente útil para una toma bien informada de decisiones. Aunque no siempre es así, tristemente, pero este es un tema para otro debate.

La esencia del análisis económico I-O descansa en el concepto de multiplicador, mientras que la base matemática que la justifica es la denominada matriz inversa de Leontief. En lo que sigue explicaremos el origen práctico de la inversa de Leontief, su significado económico, el uso y en ocasiones abuso del concepto y expondremos otras opciones metodológicas que permiten vislumbrar con mayor finura el efecto multiplicador.

2. LOS MULTIPLICADORES

El concepto de multiplicador está muy arraigado en el análisis económico y es una pieza esencial en el análisis de la efectividad de las políticas públicas de gasto (Barro, 2009). Bajo una concepción keynesiana simple, el concepto de multiplicador indica de qué manera una inyección *externa* al sistema cataliza la producción de una economía generando niveles adicionales de producción, siendo así tanto en un modelo macro (un único output) como en un modelo micro (múltiples outputs diferenciados). Esta segunda opción es la que se construye en el modelo I-O. Veamos cómo.

Vamos a representar la información estadística incluida en una tabla input-output (TIO) en formato algebraico, que es más susceptible de ser adaptado a las necesidades de la modelización. Recordemos que una TIO es una matriz numérica que recoge los flujos productivos de una economía con tantas filas (y columnas) como sectores productivos integran la economía, digamos *n*. Por filas, la TIO indica la distribución del valor de la producción de un sector en términos de las demandas que recibe, del resto de sectores y de la demanda final (por simplicidad asumiremos un único demandante final, sin distinguir entre demandantes privados, públicos o exteriores). Por columnas, la TIO muestra la estructura de costes de un sector distinguiendo entre el coste de los inputs necesarios que tal sector encarga del resto de sectores y el coste de los inputs primarios (habitualmente trabajo y capital; de nuevo por simplicidad usaremos un único input primario que denominaremos valor añadido).

En estas condiciones, una economía con *n* sectores se describe por la terna ($\mathbf{Z}$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{f}$) en la que $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ es una matriz $n \times n$ que recoge el volumen de los intercambios de bienes entre cada par de sectores productivos de la economía, $\mathbf{v}' = (v_i)$ es un vector fila que incluye el valor añadido total en cada sector y $\mathbf{f} = (f_i)$ es el vector columna de las demandas finales.

Puesto que debe forzosamente cumplirse la ley de conservación del valor, tendremos que el valor distribuido (filas) ha de ser igual al valor comandado (columnas) y va a cumplirse siempre la siguiente expresión de balance contable, para todos y cada uno de los $n = 1, 2, \ldots$ sectores que componen la economía:

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} + f_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ji} + v_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

Así pues la expresión (1) es una representación algebraica de la información contenida en una tabla input-output. En la expresión, $\mathbf{x} = (x_i)$ es el vector columna que indica la demanda total (en referencia a la primera expresión a la izquierda) y la oferta total (en referencia a la expresión intermedia). En definitiva, $\mathbf{x}$ representa la producción total o bruta de la economía. Todas las magnitudes se expresan en valor monetario corriente aunque también las podemos visualizar como si fuesen magnitudes físicas simplemente usando la normalización estándar en la que se define una unidad física como aquella cuyo valor es una unidad monetaria.

Estamos ahora, bajo ciertos supuestos, en condiciones de transformar las expresiones descriptivas de balance en un potente modelo económico.

Introducimos ahora una nueva matriz $n \times n$ no-negativa $\mathbf{A} = (a_{ij})$ que define los coeficientes técnicos de producción:

$$a_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

Si estos coeficientes son fijos y respetan el supuesto de rendimientos constantes a escala, podemos usar (2) para reescribir parcialmente (1) como:

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} + f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

Pasando a notación matricial y definiendo **1** como un vector auxiliar (columna) de unos, la expresión (3) se reescribiría:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{f} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f} = \mathbf{x} \tag{4}$$

Si la matriz **A** es, además, productiva (i.e. satisface la condición de Hawkins y Simon, 1949; Nikaido, 1972, capítulo 3; esta es una condición que expresa la capacidad de la economía para generar un excedente en alguno de sus sectores) entonces la expresión (4) tiene –como ecuación– una solución no-negativa en **x** para *cualquier* vector no-negativo **f** de demanda final:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{f} \tag{5}$$

en la que $\mathbf{M} = (m_g)$ es la denominada matriz inversa de Leontief. Ello se sigue del hecho matemático que la productividad de la matriz **A** garantiza *siempre* la no-negatividad de la matriz **M**. La expresión (5), o su versión en términos de incrementos $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{M} \cdot \Delta\mathbf{f}$, son bien conocidas en la literatura. Así pues, cada elemento de **M** se interpreta como una derivada parcial $m_{ij} = \partial x_i / \partial f_j$.

Obsérvese que la dirección de la causalidad en (5) va desde la demanda final sectorial **f** (variable independiente o exógena) hacia el output total sectorial **x** (variable dependiente o endógena). La derivación de los multiplicadores estándar requiere evaluar el efecto sobre el output de cambios en la variable independiente. Para ello introducimos el concepto de output agregado de la economía x como la suma de los outputs sectoriales $x = \mathbf{1}' \cdot \mathbf{x}$ donde $\mathbf{1}'$es un vector auxiliar (fila) de unos. Usando (5) también tenemos que $x = \mathbf{1}' \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{f}$. De aquí, el vector de los multiplicadores de output, denotado por $\mathbf{m}' = (m_i)$, se define como la derivada matricial del output agregado x en relación a la demanda final $\mathbf{f}$ de la economía:

$$\mathbf{m}' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{1}' \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{f})}{\mathrm{d}\mathbf{f}} = \mathbf{1}' \cdot \mathbf{M} \qquad (6)$$

En palabras, cada componente m_i del vector de multiplicadores de output se corresponde con la suma de la columna respectiva de la inversa de Leontief, i.e. $m_i = \sum_j m_{ji}$, cantidad que nos informa del efecto sobre el output total que se seguiría de un incremento unitario en la demanda final del bien i. Del hecho ya mencionado que $m_{ji} \geq 0$ se sigue que $m_i \geq 0$. Pero hay más, ya que es posible demostrar también que se cumplirá *siempre* que $m_i \geq 1$ mientras que en la inmensa generalidad de casos tendremos de hecho que $m_i \geq 1$. De aquí surge el concepto de «multiplicador». La inyección inicial en demanda final, que recordemos se toma como unitaria, acaba produciendo –en respuesta a los efectos de interdependencia– un valor «multiplicado» y superior a la unidad en el output total. El efecto *neto* sobre el output, una vez descontada la inyección inicial unitaria, se mide por un vector de multiplicadores $\boldsymbol{\mu}' = (\mu_i)$ tal que $\mu_i = m_i - 1 > 0$.

Puesto que parte integral de la demanda final de una economía es la demanda del sector público en gasto corriente o bien en formación bruta de capital, a menudo nos referimos a los multiplicadores $\mathbf{m}'$ como «multiplicadores del gasto» y a $\boldsymbol{\mu}'$ como los «multiplicadores netos», ambos resultantes de la inyección unitaria directa e inicialmente ejecutada. Estos indicadores están construidos sobre la matriz $\mathbf{M}$, que también es denominada comúnmente como «matriz de multiplicadores». Constituyen por tanto un indicador muy apropiado para examinar la efectividad del gasto público sectorializado como instrumento de estímulo de la economía en su conjunto (Devarajan et al, 1993).

Esta efectividad puede ser, y de hecho será, distinta según el sector económico en que se materialice la nueva demanda pública. La razón es bien sencilla y estriba en que los sectores productivos son heterogéneos en, por lo menos, dos dimensiones. En primer lugar, lo son en términos de sus características específicas, por ejemplo en las características de su tecnología productiva; en segundo lugar, lo son en términos de las interdependencias mutuas. En efecto, aquellos sectores con mayor integración vertical acabarán promoviendo efectos superiores sobre la producción por razón de su más estrecha capacidad de arrastre. Estas heterogeneidades constituyen la base o infraestructura económica sobre la que se desarrollan los efectos de las políticas públicas de gasto. Estas políticas, a su vez están condicionadas por las restricciones que inevitablemente se siguen a la hora de implantarlas. Expondremos el papel que juegan están restricciones en las secciones posteriores y ello nos permitirá matizar los resultados que se derivan de un análisis simplista basado en la literalidad de los multiplicadores lineales, tal como la hemos expuesto en esta sección.

La linealidad tiene sin duda una ventaja interpretativa ya que permite identificar de una manera simple y elegante los efectos de equilibrio general en términos del papel directo e indirecto de los ajustes productivos que se cristalizan en respuesta a la fuerza motriz que se encarna en la demanda final y que impulsa los ajustes. La linealidad encubre, sin embargo y sin querer voluntariamente hacerlo, un supuesto de disponibilidad ilimitada de factores productivos. La economía será capaz de producir todo aquello que sea necesario para satisfacer la demanda final, cualquier demanda final, sin que se planteen restricciones limitativas de los recursos disponibles. En el caso que el gobierno opte por poner en práctica un plan público de estímulo, la economía responderá obedientemente suministrando toda la producción que sea necesaria. Este es ciertamente un supuesto discutible, por ser restrictivo conceptualmente y por estar alejado de la realidad económica (Robinson, 2006). No obstante esta salvedad relevante, incluso las reformulaciones más modernas (Pyatt, 1985, Oosterhaven & Stelder, 2002, de Mesnard, 2002, Dietzenbacher, 2005, entre otros) han seguido estrictamente la lógica keynesiana y no han considerado como relevantes los condicionantes que los mecanismos de mercado y la disponibilidad efectiva de recursos imponen. Igualmente, la obra de referencia en el análisis input-output, el libro de Miller & Blair (2009), dedica todo un capítulo al análisis de multiplicadores sin que se cuestione en ningún momento el supuesto de disponibilidad libre e ilimitada de recursos.

3. VARIACIONES SOBRE UN TEMA I: RESTRICCIONES DE LIQUIDEZ PÚBLICA

Pasemos a considerar si y cómo las limitaciones presupuestarias acabarán limitando el efecto expansivo de una política pública de gasto. A diferencia del análisis de multiplicadores expuesto en la sección previa, ahora vamos a suponer que la demanda final que puede ejercer el gobierno está sujeta a una restricción presupuestaria. Cualquier modificación en la política de gasto público deberá afrontarse con los recursos disponibles, lo que exige a su vez una redefinición de las prioridades del gobierno. La nueva política deberá adaptarse al nivel posible de gasto público y su financiación será viable sólo a través de un cambio en la estructura del gasto público corriente en bienes y servicios. A diferencia de la situación sin restricciones, en la que hemos argumentado que la política de gasto daba lugar a efectos expansivos en el output (los denominaremos efectos renta), en el nuevo escenario con restricciones estos efectos renta van a ir ineludiblemente acompañados de efectos de substitución, como consecuencia del inevitable cambio de prioridades asociado a todo esquema de financiación del gasto. Ahora bien, mientras los efectos renta son expansivos, los efectos de substitución son contractivos. El efecto final puede tener, en consecuencia, cualquier signo. No puede haber pues ninguna garantía teórica para que un plan público de estímulo acabe efectivamente produciendo un efecto expansivo en la economía.

Vamos a considerar de nuevo, siguiendo a Guerra y Sancho (2001), una economía lineal compuesta por n sectores productivos, idéntica a la expuesta en la Sección anterior. Bajo los supuestos habituales, se derivaría una matriz de multiplicadores **M** de dimensión $n \times n$. En esta economía, una política de gasto público que no esté sujeta a una restricción presupuestaria puede visualizarse de forma simple como una inyección de un euro nuevo en el sistema. Si la inyección se materializa en el sector i de la economía, el resultado será que, una vez realizados todos los ajustes sectoriales, se generará un incremento de la producción total en el sector j por valor de m_{ji} euros en respuesta al euro inyectado en i.

En esta formulación previa el efecto de la inyección no estaba sujeto a ninguna restricción que lo limitase, más allá de las propias de la tecnología productiva. Si en cambio el nivel de gasto del gobierno está fijado, cualquier nueva inyección dirigida al sector i deberá financiarse con una reducción acorde del gasto en otras partidas $j \neq i$de forma que se respete la restricción agregada de gasto del gobierno. Definiremos por $\{\delta\}$ un esquema redistributivo que respete la restricción presupuestaria en respuesta a una inyección en i por:

$$\delta_i + \sum_{j \neq i}^{N} \delta_j = 0 \tag{7}$$

En este escenario los efectos iniciales, que no estaban sujetos a ninguna restricción, están ahora limitados y deben ser tenidos en cuenta pues para cualquier nivel $\delta_i > 0$ existirá una restricción tal que $\delta_j \leq 0$ para $j \neq i$ que garantice el cumplimiento de la expresión (7). El efecto renta positivo impulsado por $\delta_i > 0$ estará ahora contrarrestado por el efecto sustitución negativo inducido por $\delta_i \leq 0$ sobre el resto de sectores $j \neq$ i. Definamos por Δx_{ji} el cambio en el nivel de producción total en el sector j causado por una inyección δ_i en el sector i restringida por el esquema redistributivo $\{\delta\}$. El efecto expansivo de esta inyección sobre el output del sector *j* se medirá por $\delta_i \cdot m_{ji} > 0$ mientras que el efecto contractivo sobre *j* producido desde el resto de sectores, $k \neq$ i, sería ahora de $\delta_i \cdot m_{jk} \leq 0$. El efecto compuesto sobre el output de *j* se deberá evaluar ahora por:

$$\Delta q_{ji} = \delta_i \cdot m_{ji} + \sum_{k \neq i} \delta_k \cdot m_{jk} \tag{8}$$

Obsérvese que la magnitud Δx_{ji} es una medida del coste de oportunidad, en términos de producción, de la puesta en práctica del esquema redistributivo $\{\delta\}$. La inyección positiva comporta necesariamente un «*trade-off*» resultante de la necesidad de mantener constante el nivel de gasto público.

En esta nueva situación, el valor en el conjunto de todos los sectores de la economía resultante de la inyección sujeta al esquema redistributivo $\{\delta\}$ viene dado por:

$$\hat{m}_i = \sum_{j=1}^{n} \Delta x_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \delta_i \cdot m_{ji} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq i} \delta_j \cdot m_{jk} \tag{9}$$

Si la inyección es unitaria, i.e. $\delta_i = 1$, el valor del multiplicador neto sujeto a la restricción de liquidez $\{\delta\}$ será $\hat{\mu}_i = \hat{m}_i - 1$. A diferencia del valor siempre positivo del multiplicador clásico μ, el nuevo valor $\hat{\mu}_i$ puede tener cualquier signo, positivo o negativo, dependiendo del impacto relativo de los efectos renta positivos (pues $\delta_i = 1 > 0$) en relación a los efectos de sustitución negativos (con $\delta_j \leq 1$).

En el caso que las inyecciones unitarias no estuviesen sujetas a restricciones de liquidez, es decir cuando $\delta_i = 1$ y $\delta_j = 0$ para $j \neq i$, la expresión general (9) daría lugar como caso particular a la situación del modelo lineal estándar pues al no ser efectivos los efectos de substitución tendríamos que $\hat{m}_i = m_i$ y $\hat{\mu}_i = \mu_i$. En la Tabla 1 de Guerra y Sancho (2011), que reproducimos abajo como Cuadro 1, se pueden apreciar en la primera columna los distintos signos, positivos y negativos, que tomarían los multiplicadores del gasto público bajo el supuesto de financiación restringida en una aplicación empírica concreta para la economía española. Se pueden apreciar, igualmente, dos descomposiciones alternativas de los multiplicadores, la primera de las cuáles se corresponde con los desarrollos expuestos en esta sección. El esquema redistributivo adoptado en el trabajo de Guerra y Sancho (2011) es simple pero sirve eficazmente para ilustrar que las consecuencias sobre los efectos de una política pública pueden ser críticas ya que el efecto multiplicador puede perfectamente llegar a ser negativo, en marcado contraste con la intuición habitual.

Cuadro 1. Multiplicadores con restricciones de liquidez. De Guerra y Sancho (AEL, 2011)

Table 1. Unrestricted and budget-constrained multipliers and decompositions

		Positive output and negative substitution effects decomposition		**Within and out-sector effects decomposition**	
Production units	$\widehat{\mu}_j + 1$	$\sum_{i=1}^{N} \delta_j m_{ij}{}^{a}$	$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k \neq j} \delta_k m_{ik}$	$\sum_{i=1}^{N} \delta_j m_{ij}$	$\sum_{k \neq j} \sum_{i=1}^{N} \delta_i m_{ik}$
Primary sector	-0.118	1.705	-1.823	1.061	-1.180
Extraction of anthracite, coal, lignite and peat	-0.446	1.376	-1.822	1.002	-1.448
Extraction of crude, natural gas, uranium and thorium	-0.802	1.019	-1.822	0.987	-1.789
Other extraction industries	-0.078	1.743	-1.822	1.005	-1.084
Coke, refinery and nuclear fuels	-0.104	1.718	-1.823	1.055	-1.160
Production and distribution of electricity	0.278	2.099	-1.820	1.163	-0.885
Production and distribution of gas	-0.057	1.764	-1.823	0.997	-1.054
Water sector	0.036	1.858	-1.822	1.003	-0.964
Eood, beverage, tobacco, textile and leather products	0.395	2.190	-1.795	1.248	-0.853
Other industries	0.276	2.097	-1.821	1.272	-0.995
Chemistry industry, rubber and plastic industry	-0.045	1.777	-1.823	1.206	-1.252
Manufacturing industry	0.067	1.882	-1.814	1.267	-1.200
Construction sector	0.622	2.346	-1.724	1.440	-0.817
Commercial and transport activities	-0.029	1.796	-1.825	1.117	-1.147
Market services	-0.198	1.676	-1.875	1,077	-1.275
Market R&D	-0.052	1.770	-1.822	1.004	-1.056
Public sectors	-0.403	1515	-1.919	1.039	-1.442

Note: Database: The Spanish symmetric input-output table for 2004.

[J]The positive output effects coincide with the standard multiplier value under the unrestricted scenario: $\widehat{\mu}_j + 1$

4. VARIACIONES SOBRE UN TEMA II: RESTRICCIONES DE OFERTA

El enfoque expuesto en la Sección 3 mantiene, aunque de forma modificada, una propiedad fundamental de linealidad. La matriz de multiplicadores **M** se considera constante y es una matriz que se obtiene de un modelo lineal clásico. Este tipo de modelos no contempla el juego combinado de las fuerzas de demanda y de oferta ni el papel restrictivo de la disponibilidad limitada de recursos productivos en la economía. Cuando el papel de la capacidad adaptativa de la tecnología productiva se hace explícito y se introduce una oferta limitada de factores primarios básicos, como son el trabajo y los servicios de capital, la complejidad inherente a estas condiciones hace que se pierda la linealidad. Sin linealidad, el cálculo económico requiere el uso de técnicas de computación más avanzadas. Los modelos económicos no pueden resolverse sin apelar a algoritmos computacionales ya que, en sí, dichos modelos no son solucionables en el sentido algebraico clásico. Estos modelos no lineales se denominan modelos computacionales de equilibrio general y son modelos que incorporan de forma coherente el comportamiento individual de consumidores y de empresas que, a su vez, ha de resultar compatible con las restricciones agregadas de disponibilidad de recursos productivos y con el flujo circular de la renta (Shoven y Whalley, 1984, Kehoe et al. 2005).

La presencia de restricciones en la oferta de factores, trabajo y capital, supone que cualquier nueva política pública de gasto esté sujeta al arbitraje del mecanismo de precios. Cualquier incremento en la demanda final que genere una reasignación productiva en un marco en el que los recursos productivos son fijos necesariamente requiere del juego corrector ejercido por los precios. De nuevo, y aunque por razones distintas a las expuestas en la Sección 3, a los efectos de volumen resultantes de un aumento de la demanda final se les unen ahora los efectos de substitución vía precios lo que hace perder la característica de proporcionalidad que es inherente a los modelo lineales. El papel jugado por los precios aumenta, además, el número de variables económicas endógenas a $2n$, con un vector de output **x** y un vector de precios **p**, lo que requiere por supuesto aumentar el número de ecuaciones para poder proceder a la resolución del modelo subyacente. Es conveniente tener en cuenta que la solución económica aparecerá expresada en respuesta paramétrica a un vector de variables exógenas **f** que puede representar, por ejemplo, las variables de decisión del gobierno en cuanto al nivel y composición de su demanda final de bienes y servicios.

Con esta dependencia paramétrica, se puede demostrar que la solución de equilibrio está representada por una función implícita que conecta las variables endógenas con los parámetros externos del modelo. Esta función sabemos que existe por la propiedad matemática de continuidad fuerte (de hecho, diferenciabilidad) de las reglas que se adoptan para describir el comportamiento de los agentes. Sin embargo, y debido a la no-linealidad del modelo, dicha función implícita no puede ser visualizada directamente. La función, no obstante, existe y en consecuencia su matriz Jacobiana –la matriz de sus derivadas parciales– también. Su existencia y su observabilidad son, por supuesto, dos cuestiones distintas. Existen dos maneras de aproximarse a la visualización de la función implícita y su matriz Jacobiana. La primera consiste en explotar las propiedades del equilibrio usando técnicas de cálculo diferencial (Cardenete y Sancho, 2013); la segunda consiste en usar métodos numéricos de aproximación para cuantificar la matriz de derivadas parciales (Cardenete y Sancho, 2012). En el primer caso se examinan las consecuencias de perturbar las condiciones de equilibrio, en respuesta a cambios en parámetros exógenos, y la presentación se realiza en el contexto del análisis de multiplicadores para facilitar la comparación de resultados. En el segundo caso se ilustra el valor de la matriz Jacobiana recalculando numéricamente los equilibrios ante perturbaciones muy pequeñas. Pues en definitiva es la matriz Jacobiana la que provee la información sobre el valor de los multiplicadores marginales.

En teoría económica es habitual representar la relación de equilibrio inherente a un modelo usando una función vectorial F. Esta función recoge las peculiaridades de la economía, tales como la tecnología, las preferencias y otras características específicas. En el formato más simple, cuando la variable vectorial $\mathbf{e}$ representa las m variables endógenas de un modelo, decimos que $\mathbf{e}$ es una configuración de equilibrio si se cumple que $F(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$. En lenguaje matemático se dice que $\mathbf{e}$ es un punto fijo de la función F. Podemos explicitar la variable exógena en un vector $\mathbf{f}$, con dimensión k, en la configuración de equilibrio de manera que el equilibrio de la economía se puede representar por $F(\mathbf{e},\mathbf{f}) = \mathbf{e}$ y de manera que la función vectorial F es del tipo $F: R^{k+m} \to R^m$. Usando cálculo diferencial (Debreu, 1970) es posible estudiar la dependencia del estado de equilibrio $\mathbf{e}$ a los niveles de la variable exógena $\mathbf{f}$.

Supongamos pues un cambio en $\mathbf{f}$ explicitado por $d\mathbf{f}$; diferenciando vectorialmente en la relación de equilibrio hallamos:

$$d\mathbf{e} = \frac{\partial F(\mathbf{e},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{e}} d\mathbf{e} + \frac{\partial F(\mathbf{e},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f} \tag{10}$$

Resolviendo para $d\mathbf{e}$ tendremos:

$$d\mathbf{e} = \left(I - \frac{\partial F(\mathbf{e},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{e}} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(\mathbf{e},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f} = \mathbf{M}(\mathbf{e},\mathbf{f}) d\mathbf{f} \tag{11}$$

Donde $\mathbf{M}(\mathbf{e},\mathbf{f})$ es una matriz de orden $m \times k$. Gracias a la expresión (11) podemos evaluar el efecto sobre una variable endógena e_j de un cambio marginal en una variable exógena f_i. En otras palabras, podemos calcular el multiplicador marginal m_{ji}:

$$\frac{\partial e_j}{\partial f_i} = m_{ji}(\mathbf{e},\mathbf{f}) \tag{12}$$

Obsérvese que el valor de este multiplicador depende del estado de equilibrio $\mathbf{e}$ bajo el que se ejecuta la perturbación marginal y de la estructura de la economía representada por F y no es, en consecuencia, necesariamente constante. Esta es una diferencia importante en relación al análisis clásico de multiplicadores construido sobre modelos de carácter lineal y en el que los multiplicadores son independientes del estado de equilibrio de la economía y por consiguiente constantes.

En un modelo más completo de equilibrio económico con n sectores debemos distinguir dentro de las variables endógenas dos tipos de variables, a saber, cantidades $\mathbf{x}$ y precios $\mathbf{p}$, teniendo $\mathbf{e} = (\mathbf{x},\mathbf{p})$ y habilitando un total de $2n$ variables endógenas. El mismo número de bienes n se usará asimismo para definir las variables exógenas, entendidas ahora como las demandas del gobierno en cada uno de los bienes y servicios y denotadas de nuevo por el vector $\mathbf{f}$. En esta situación, la función estructural F es ahora del tipo $F: R^{2n+n} \rightarrow R^{2n}$ que puede, a su vez, visualizarse como la acción de dos funciones $F^x: R^{2n+n} \rightarrow R^n$ y $F^p: R^{2n+n} \rightarrow R^n$ que determinan las cantidades $\mathbf{x}$ y precios de equilibrio $\mathbf{p}$. En otras palabras, como $F = (F^x, F^p)$. Puesto que $\mathbf{e} = (\mathbf{x},\mathbf{p})$, podemos reescribir la relación estructural de forma separada:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= F^x(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f}) \\ \mathbf{p} &= F^p(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f}) \end{aligned} \tag{13}$$

Estamos ya en condiciones de analizar la estática comparativa del equilibrio en las variables endógenas $(\mathbf{x},\mathbf{p})$ en respuesta a cambios marginales en las variables exógenas $\mathbf{f}$. En efecto, suponiendo un cambio exógeno $d\mathbf{f}$ y diferenciando vectorialmente en (13) obtendremos:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \frac{\partial F^x(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \frac{\partial F^x(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} + \frac{\partial F^x(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f} \\ d\mathbf{p} &= \frac{\partial F^p(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \frac{\partial F^p(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} + \frac{\partial F^p(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f} \end{aligned} \tag{14}$$

Introducimos, a efectos de simplificación, la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \Delta_{xx} &= \frac{\partial F^x(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}} \\ \Delta_{xp} &= \frac{\partial F^x(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{p}} \\ \Delta_{xf} &= \frac{\partial F^x(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \end{aligned} \tag{15}$$

y similarmente para Δ_{px}, Δ_{pp} y Δ_{pf}. Podemos reescribir la expresión (14) como:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \Delta_{xx} d\mathbf{x} + \Delta_{xp} d\mathbf{p} + \Delta_{xf} d\mathbf{f} \\ d\mathbf{p} &= \Delta_{px} d\mathbf{x} + \Delta_{pp} d\mathbf{p} + \Delta_{pf} d\mathbf{f} \end{aligned} \tag{16}$$

Vamos a obtener la forma reducida de esta expresión. Para ello resolvemos para $d\mathbf{p}$ en la segunda ecuación obteniendo:

$$d\mathbf{p} = \left(I - \Delta_{pp}\right)^{-1} \cdot \left(\Delta_{px} d\mathbf{x} + \Delta_{pf} d\mathbf{f}\right)$$

y al substituir este resultado en la primera ecuación de (16) hallamos:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \Delta_{xx} d\mathbf{x} + \Delta_{xp} d\mathbf{p} + \Delta_{xf} d\mathbf{f} = \\ &= \Delta_{xx} d\mathbf{x} + \Delta_{xp}\left(I - \Delta_{pp}\right)^{-1} \cdot \left(\Delta_{px} d\mathbf{x} + \Delta_{pf} d\mathbf{f}\right) + \Delta_{xf} d\mathbf{f} = \\ &= \left(\Delta_{xx} + \Delta_{xp} \cdot \left(I - \Delta_{pp}\right)^{-1} \cdot \Delta_{px}\right) d\mathbf{x} + \left(\Delta_{xf} + \Delta_{xp} \cdot \left(I - \Delta_{pp}\right)^{-1} \cdot \Delta_{pf}\right) d\mathbf{f} \end{aligned} \tag{17}$$

Resolviendo finalmente para $d\mathbf{x}$ en función de $d\mathbf{f}$ obtenemos:

$$d\mathbf{x} = \left(I - \left(\Delta_{xx} + \Delta_{xp} \cdot \left(I - \Delta_{pp}\right)^{-1} \cdot \Delta_{px}\right)\right)^{-1} \cdot \left(\Delta_{xf} + \Delta_{xp} \cdot \left(I - \Delta_{pp}\right)^{-1} \cdot \Delta_{pf}\right) d\mathbf{f} \tag{18}$$

El resultado obtenido, siendo algebraicamente complejo, nos permite derivar en detalle la matriz de multiplicadores marginales:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f}) = \left(I - \left(\Delta_{xx} + \Delta_{xp} \cdot \left(I - \Delta_{pp} \right)^{-1} \cdot \Delta_{px} \right) \right)^{-1} \left(\Delta_{qx} + \Delta_{xp} \cdot \left(I - \Delta_{pp} \right)^{-1} \cdot \Delta_{pf} \right) \tag{19}$$

Esta matriz cuadrada de orden $n \times n$ capta los efectos multiplicadores de los cambios inducidos en las cantidades de equilibrio **x** ante pequeños cambios en las variables exógenas **f**:

$$\frac{\partial x_j}{\partial f_i} = m_{ji}(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{f}) \qquad (j,\ i = 1,2,\ldots,n) \tag{20}$$

No repetiremos el procedimiento formal pero debe destacarse que una expresión similar a (19) existe en relación al segundo conjunto de variables endógenas, los precios de equilibrio **p**. En este segundo caso, tendríamos los efectos multiplicadores sobre la estructura de costes de la economía. Puesto que el análisis clásico de multiplicadores se ha centrado tradicionalmente en detectar y cuantificar los efectos sobre los niveles de producción bruta o total **x**, restringiremos a efectos comparativos el análisis posterior a esta variable real.

Es sumamente interesante señalar cómo la expresión (19) se simplificaría en el caso de un modelo lineal en el que se verifica la dicotomía clásica entre cantidades y precios. Si precios y cantidades se determinan de forma independiente y aislada, como sabemos ocurre en el caso lineal, las matrices de derivadas parciales entre cantidades **x** y precios **p** verificarán necesariamente que $\Delta_{px} = \Delta_{xp} = \mathbf{0}$ de forma que la matriz de multiplicadores en (19) se reduciría a:

$$d\mathbf{x} = \left(I - \Delta_{xx} \right)^{-1} \cdot \Delta_{xf} d\mathbf{f} \tag{21}$$

Esta expresión es la versión diferencial de la relación clásica de multiplicadores lineales recogida en la ecuación (5) con $\Delta_{xx} = \mathbf{A}$ y $\Delta_{xf} d\mathbf{f} = \Delta\mathbf{f}$.

Es posible, aunque no es ciertamente sencillo, interpretar los circuitos de trasmisión de efectos implícitos en (18). Así, cuando se produce una perturbación exógena $d\mathbf{f}$, encontramos que Δ_{xf} recoge los efectos directos sobre las cantidades **x**, Δ_{xf} capta los efectos directos sobre los precios **p** mientras que Δ_{xp} y Δ_{px} identifican los efectos cruzados entre precios y cantidades consecuencia de los ajustes entre ofertas y demandas en equilibrio.

Los efectos acumulados de forma indirecta se pueden visualizar a través de las matrices inversas, como $(I - \Delta_{pp})^{-1}$, en la que se aglomeran los efectos de ajuste vía precios en la estructura de costes, etc. Así en el primer paréntesis de la expresión (18), Δ_{xx} simboliza el ajuste directo en cantidades vía cantidades mientras que $\Delta_{xp} \cdot (I - \Delta_{pp})^{-1} \cdot \Delta_{px}$ representa el ajuste directo en cantidades ejercido a través de los precios y que se inicia por los cambios en **p** medidos por Δ_{px} que a su vez genera un efecto acumulativo sobre los precios que viene dado por el producto $(I - \Delta_{pp})^{-1} \cdot \Delta_{px}$. Este efecto eventualmente repercute en las cantidades **x** a través del efecto cruzado Δ_{xp} mediante la expresión $\Delta_{xp} \cdot (I - \Delta_{pp})^{-1} \cdot \Delta_{px}$. Leyendo este producto matricial de derecha a izquierda podemos ver cómo **x** influye sobre **p**, **p** influye acumulativamente sobre sí mismo vía inversión matricial y finalmente el efecto inducido sobre los precios vuelve a recaer en las cantidades **x**. La suma de componentes $\Delta_{xx} + \Delta_{xp} \cdot (I - \Delta_{pp})^{-1} \cdot \Delta_{px}$ indica el ajuste directo en cantidades a través de todos los mecanismos de ajuste, sean precios o sean cantidades. La operación de inversión matricial en (18) permite en consecuencia evaluar los ajustes directos e indirectos sobre las cantidades de equilibrio. En conjunto, el resultado final cuantificado en (18) resume los efectos de volumen vía demanda en respuesta al shock inicial, los efectos de sustitución vía precio y los efectos cruzados de interdependencia entre las variaciones en las demandas y las restricciones de oferta y recursos, tanto de forma directa como de forma indirecta a través de las correspondientes matrices inversas.

La principal dificultad para poner en práctica estos cálculos marginales estriba en que la identificación de los mecanismos de transmisión de la influencia es conceptual pero no ofrece un instrumento práctico que permita su plasmación directa pues las diversas matrices de derivadas parciales no son ni observables ni evaluables debido a la naturaleza del modelo de equilibrio general. Una respuesta a esta dificultad consiste en usar métodos de cálculo numérico aprovechando las características de la solución de equilibrio. Este es el camino usado por Cardenete y Sancho (2012) a fin de evaluar los multiplicadores del gasto en presencia de restricciones en la oferta de factores primarios, trabajo y capital. Con disponibilidad ilimitada de recursos, el modelo lineal expuesto en (5) ofrece una estimación de los multiplicadores sin que éstos se vean afectados por los efectos precio que se derivarían de los reajustes de equilibrio en un escenario con recursos limitados; un escenario en el que, como hemos visto, (18) es la expresión correcta para estimar los multiplicadores de gasto. En la Tabla I de ese trabajo, reproducida a continuación como Cuadro 2, y con datos de la economía española para n=26 sectores, podemos apreciar como el efecto multiplicador agregado de inyectar una unidad adicional de demanda final en cada uno de los 26 sectores de la economía ascendería, en una escenario de disponibilidad ilimitada de recursos y en el contexto de un modelo lineal estándar, a 50,603 unidades de output; esto es, un efecto multiplicador promedio de 50,603/26=1,946. Esta estimación es una cifra coherente con las evaluaciones habituales. En contraste, en dos escenarios con restricciones de oferta en los que se modeliza el mercado de trabajo con distintos grados de flexibilidad, los resultados son manifiestamente diferentes. Con un cierto grado de rigidez (desempleo fijo) en el mercado de trabajo el efecto multiplicador solo asciende, en promedio, a 3,075/26= 0,118 mientras que en un escenario de mayor flexibilidad (desempleo variable) en el mercado de trabajo el efecto multiplicador agregado pasaría incluso a ser negativo, con un efecto multiplicador promedio de –5,611/26= –0,216.

Cuadro 2. Multiplicadores con restricciones de oferta. De Cardenete y Sancho (ESR, 2012)

Table 1. Multiplier values (column sums of multiplier matrices)

Sectors	L	M_{CGE1}	M_{CGE2}
1. Agriculture, cattle and forestry	1.939	-0.675	-2.524
2. Fishing	2.012	-0.111	-0.437
3. Coal	2.075	-0.059	0.113
4. Oil and Gas	1.016	0.982	0.967
5. Rest of extractives	2.121	0.381	-0.038
6. Refine	1.694	1.114	0.852
7. Electricity	1.983	-0.094	-1,400
8. Water	1.747	0.874	0.102
9. Distribution of water	2.011	-0.266	-0.502
10. Food	2.332	0.299	-0.312
11. Manufacturing of textiles and leather	2.151	0.378	0.230
12. Manufacturing of wood	2.172	0.384	0.035
13. Chemicals	1.994	0,553	0.296
14. Mining	2.223	0.023	-0.329
15. Manufacturing of metal products	2.009	0.446	0.059
16. Machinery	2.142	0.192	0.129
17. Manufacturing of textiles and leather	1.798	0.527	0.472
18. Manufacturing of construction material	2.000	0.853	0.760
19. Transport	1.917	0.502	0.687
20. Other manufactures	2.J61	0.244	0.127

16506-0130e-2pass-r03.indd 272 25-05-2017 02:13:00

Cuadro 2. Continued

Sectors	L	M_{CGE1}	M_{CGE2}
21. Construction	2.287	-0.084	-0.016
22. Vehicles	1.982	-0.278	-0.353
23. Commerce	1.800	-0.857	-1,331
24. Transport and Communications	1.851	-0.431	-1.209
25. Commercial Services	1.614	-0.643	-0.634
26. Non-commercial services	1.57 1	– 1.181	-1.359
Total	50.603	3.075	-5.61 1

Source: Own elaboration.

L: Leontief multipliers

$M_{CGE1:}$ general equilibrium multipliers with rigidity in labour market

M_{CGE2}: general equilibrium multipliers with flexibility in labour market

Resulta incluso llamativo y hasta cierto punto curioso que la literatura siga denominando a estas estimaciones de los efectos marginales del gasto público como «multiplicadores» dado que, de hecho, la política de gasto del gobierno no produce necesariamente efectos de multiplicación por encima de la inyección introducida en el sistema. El hecho que en el escenario con desempleo variable en el que, en caso de ser necesario, más trabajo puede ser comandado se observe una contracción del output agregado de la economía identifica una situación de *crowding out*, una posibilidad que ha sido extensamente discutida en la literatura macroeconómica (Barro, 2009). En nuestro caso, el incremento de la demanda del gobierno genera una contracción del output agregado de la economía de manera que, tras los ajustes inducidos por la política, en la práctica se usa menos trabajo que en el escenario rígido. Una posible explicación de este efecto puede estar vinculada a una caída en el ahorro público consecuencia del aumento en el gasto corriente. Esta reducción del ahorro público daría lugar a una caída del ahorro agregado que, a su vez, ejercería un efecto contractivo sobre la demanda de inversión que haría de contrapeso al incremento de la demanda del gobierno en bienes y servicios.

Un mensaje a retener es que la evaluación de las políticas de demanda final del gobierno debería contextualizarse a la luz de la situación macroeconómica de la economía. Así, en presencia de recursos primarios ociosos y con efectos precio insignificantes, los multiplicadores de Leontief ofrecerían estimaciones empíricamente razonables. Sin embargo, cuando existen restricciones efectivas de oferta o cuando los efectos precio acaban influenciando los ajustes entre oferta y demanda, la información contenida en la matriz de multiplicadores de Leontief pierde interés. Otros instrumentos más avanzados de estimación ligados a modelos más completos de equilibrio general desagregado, como los descritos en esta Sección, son necesarios.

5. VARIACIONES SOBRE UN TEMA III: MULTIPLICADORES DE INPUT Y DE OUTPUT

En las dos Secciones previas hemos visto como el concepto clásico de multiplicador del análisis input-output, brevemente descrito en la Sección 2, se altera cuando se contemplan restricciones de financiación pública (Sección 3) o de oferta (Sección 4). En los tres casos, sin embargo, el análisis estima el efecto sobre la producción bruta de un cambio en la demanda final, que en nuestros ejemplos y a efectos meramente expositivos la hemos identificado con la demanda corriente del gobierno en bienes y servicios. La demanda final incluye, además del mencionado consumo público, la demanda de consumo privado, la formación bruta de capital y la demanda de bienes y servicios proveniente del exterior. Dicho con otras palabras, la demanda final no es otra cosa que la producción *neta* de bienes y servicios de la economía. De ahí que el concepto de multiplicador usado hasta el momento, sin restricciones o bajo restricciones, indica cómo la producción *bruta* de la economía debe ajustarse para poder sostener la producción *neta*, constituida por la demanda final de bienes y servicios de todos los agentes –públicos o privados–, interiores o exteriores. La diferencia entre producción bruta y producción neta (o demanda final) es la producción (o demanda) intermedia. De la expresión (4) podemos apreciar como el output bruto o total $\mathbf{x}$ se usa para satisfacer la demanda final $\mathbf{f}$ y la demanda intermedia $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ que posibilita, precisamente, la producción de $\mathbf{x}$. Así pues, la columna j de la matriz de coeficientes técnicos $\mathbf{A}$ describe los requerimientos intermedios de inputs materiales que permiten producir una unidad de output bruto en el sector j. Por linealidad, en consecuencia, el producto de la matriz $\mathbf{A}$ por cualquier vector de output bruto $\mathbf{x}$ indicará los requerimientos intermedios de todos los bienes necesarios para generar el vector de output $\mathbf{x}$.

La matriz inversa $\mathbf{M}$, a su vez, es una matriz de producciones brutas. Recordemos que $\mathbf{M}$ incluye en cada una de sus columnas j la producción bruta de todos los bienes que es necesaria para sostener una unidad neta del bien j. Además, la matriz $\mathbf{M}$ puede expandirse en serie de potencias si $\mathbf{A}$ representa una economía productiva (Nikaido, 1972, capítulo 3):

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \cdots + \mathbf{A}^k + \cdots$$

Supongamos a continuación que deseamos medir el total de inputs intermedios necesarios para generar una unidad neta de output *j*. Puesto que la producción de esta unidad neta requiere la producción bruta incorporada en la columna *j* de la inversa **M**, la respuesta es ahora bien sencilla: multiplicar la matriz **A** por la columna *j* de **M**. Si extendemos esta idea a cualquier otra unidad neta de output la respuesta se encuentra en el producto matricial **A**· **M** de forma que:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}=\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}=\mathbf{A}+\mathbf{A}^{2}+\mathbf{A}^{3}+\cdots+\mathbf{A}^{k}+\cdots=\mathbf{M}-\mathbf{I}$$

Efectivamente, constatamos que el total de inputs intermedios necesarios para satisfacer la producción de una unidad neta de cada bien es la suma de los requerimientos directos de input (i.e. **A**) y de todos los indirectos (i.e. $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \cdots$). En definitiva, la matriz $\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}$ puede ser interpretada como una matriz de «multiplicadores» pero relacionada con los inputs intermedios necesarios para disponer de una unidad neta de cada bien de la economía. Si **M** describe multiplicadores del tipo «*de-output-a-output*», $\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}$ detalla multiplicadores del tipo «*de-output-a-input*».

Una cuestión conceptualmente diferente es la de estimar los multiplicadores asociados a disponer de una unidad extra de output bruto, en lugar de partir de una unidad extra de output neto. Esta opción también se corresponde con la idea de multiplicadores del tipo «*de-output-a-output*», como lo es **M** arriba, pero la diferencia estriba en este caso en que se desea medir el nivel de producciones brutas que son necesarias para sostener una unidad nueva de producción bruta, y no neta como se mide a través de la matriz **M**. Una respuesta a esta pregunta se puede encontrar en Miller y Blair (2009). En efecto, llamemos m_{ij}^{*} a este nuevo multiplicador, de momento indefinido en cuanto a valor, que nos informa de cuál debería ser la variación en la producción total de *i* si la producción total de *j* aumentase en una unidad. Y si lo expresamos en términos diferenciales tendríamos:

$$m_{ij}^{*}=\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \qquad (*)$$

Una extremadamente sencilla operación algebraica y recordando el desarrollo de la expresión (5) nos permite transformar (*) en:

$$m_{ij}^{*}=\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\frac{\partial x_i / \partial f_j}{\partial x_j / \partial f_j}=\frac{m_{ij}}{m_{jj}} \qquad (*)$$

Esta idea es rápidamente extrapolable a lenguaje matricial de forma que la matriz $m_{ij}^{*} = (\mathbf{M}^{*})$ resulta ser la matriz inversa de Leontief **M** postmultiplicada por una matriz auxiliar m^*_{ij} que no es otra cosa que la inversa de una matriz diagonal que contiene los elementos de la diagonal principal de la propia matriz **M**. En resumen:

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{M}}^{-1} \qquad (*)$$

Unas palabras de caución necesaria antes de proceder. La matriz **M*** construida a partir de la relación (*) en ningún caso se puede interpretar como el mecanismo de transmisión de un modelo causal. En el modelo lineal base el vector **x** es siempre y en todas sus coordenadas una variable endógena y su nivel está causalmente determinado por el nivel exógeno de producción neta **f**. No es matemáticamente posible que una parte de **x** sea endógena y otra exógena de forma simultánea, como se podría desprender, erróneamente, de una lectura literal y simplista de la expresión (*). No obstante, y exclusivamente desde un punto de vista de receptáculo contable, **M*** nos indica cómo se expresarían los niveles de equilibrio de la producción total si los deseásemos expresar en formato de multiplicadores.

Finalmente, quedaría una última matriz de multiplicadores por introducir que sería del tipo «*de-output-a-input*» y que describiría los requerimientos totales de input delante de un cambio en la producción total. Siguiendo a Szymer (1992), que usa el concepto de extracción hipotética, o Sancho (2012), que contribuye una demostración transparente de carácter elemental y coherente con las ideas básicas del análisis interindustrial, se demuestra que esta matriz adoptaría el formato **A** · **M***. Nótese pues la correspondencia notacional entre **M*** y **A** · **M*** en relación a **M** y **A** · **M**.

En definitiva, el analista dispone de estas cuatro matrices de multiplicadores para proveer información sectorial detallada sobre la estructura de la economía. Veamos el catálogo de matrices en un caso 2x2 construido a partir de los datos del ejemplo clásico de Dorfman, Samuelson y Solow (1958). De su matriz de coeficientes técnicos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.100 & 1.458 \\ 0.160 & 0.167 \end{bmatrix}$$

Calculamos en primer lugar la matriz de multiplicadores «*de-output-a-output*» y en la que, en este caso, output neto da lugar a output total. Lo podemos visualizar por *output neto* $\rightarrow$ *output total*:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.613 & 2.823 \\ 0.310 & 1.743 \end{bmatrix}$$

En segundo lugar, la matriz «*de-output-a-input*» que nos informa de los multiplicadores, en este caso del tipo *output neto* $\rightarrow$ *input total*, será:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0.613 & 2.823\\ 0.310 & 0.743\end{bmatrix}$$

Pasamos a continuación a los multiplicadores «*de-output-a-output*» pero que reflejan ahora una relación *output total* $\rightarrow$ *output total:*

$$\mathbf{M}^{*}=\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{M}}^{-1}=\begin{bmatrix}1.000 & 1.620\\ 0.192 & 1.000\end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz «*de-output-a-input*» bajo la premisa *output total* $\rightarrow$ *input total* vendrá dada por:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}^{*}=\begin{bmatrix}0.380 & 1.620\\ 0.192 & 0.426\end{bmatrix}$$

En definitiva, y en función de la pregunta planteada, el analista podrá escoger la pieza informativa idónea dentro del catálogo posible de matrices de multiplicadores. Si la cuestión es estimar el impacto sobre el volumen de actividad de una cierta política de gasto, una matriz de la clase «*de-output-a-output*» ofrecerá la información adecuada, tanto a nivel agregado como a nivel sectorial. Si, en cambio, deseamos visualizar los recursos de todo tipo que deberían movilizarse para poder implementar de forma efectiva una política, entonces deberíamos seleccionar una matriz del tipo «*de-output-a-input*».

6. A MODO RÁPIDO DE RESUMEN

Los multiplicadores han resultado ser una pieza esencial en el arsenal de instrumentos del economista aplicado. La variedad de posibilidades en función de la pregunta específica a responder y del escenario contextual apropiado a la pregunta puede ser, a primera vista, incluso frustrante. Pero no olvidemos que una máxima de los economistas es que más siempre acaba siendo mejor que menos. No me cabe la más mínima duda que disponer de muchas opciones de modelización es positivo y debe tomarse como un «bien» y no como un «mal». La complejidad de la realidad económica nos exige disponer de una batería flexible de opciones, que sepan adaptarse a los objetivos del análisis, ofrezcan respuestas meditadas, fundamentadas, interpretables y, sobre todo, que puedan ser explicadas con transparencia y sentido económico a los responsables de la toma de decisiones.

Las diferentes matrices de multiplicadores enriquecen la capacidad descriptiva del análisis económico, desvelan y a la vez matizan las características empíricas de los circuitos de interdependencia económica la y ofrecen una plataforma sobre la que desarrollar estudios de simulación y análisis de evaluación e impacto. Las variaciones sobre el tema que hemos descrito en las Secciones de este trabajo se pueden extender a otros tipos de multiplicadores que examinan magnitudes distintas, pero ligadas conceptualmente, a las de producción. Citemos los multiplicadores de empleo, los de renta o valor añadido, o en su caso los multiplicadores medioambientales ligados a emisiones de sustancias nocivas, entre otros. Esta conexión es teóricamente inmediata e informáticamente fácil de implementar gracias a la teoría general de multiplicadores (Dietzenbacher, 2005; Sancho, 2013).

Igualmente, todos los criterios tradicionales para identificar sectores estratégicos, basados exclusivamente en la matriz **M**, pueden adaptarse a cualquiera de las matrices alternativas de multiplicadores expuestas en este trabajo. La versatilidad es considerable y las ventajas de disponer de información desagregada es un verdadero *bonus* para el investigador y debería ser un elemento informativo imprescindible para la buena toma de decisiones.

REFERENCIAS

Barro, R. (2009), «Voodoo Multipliers», *Economists' Voice*, Berkeley Economic Press, Berkeley.

Cardenete, M.A. y F. Sancho (2012), «The Role of Supply Constraints in Multiplier Analysis», *Economic Systems Research*, 24(1), 21-34.

Cardenete, M.A. y F. Sancho (2013), «Elucidating General Equilibrium Multiplier Effects: a Differential Perspective», *Theoretical Economics Letters*, 3, 279-282.

Debreu, G. (1970), «Economies with a Finite Set of Equilibria», *Econometrica*, 38(3), 387-392.

De Mesnard, L. (2002), «Note about the Concept of Net Multipliers», *Journal of Regional Science*, 42(3), 545-548.

Devarajan, S., V. Swaroop, y H. Zou (1993), «What do Government Buy? The Composition of Public Spending and Economic Performance», World Bank Working Paper, WPS 1082.

Dietzenbacher, E. (2005), «More on Multipliers», *Journal of Regional Science*, 45(2), 421-426.

Dorfman, R., P.A. Samuelson y R.M. Solow (1958), *Linear programming and economic analysis*, McGraw-Hill, New York.

Guerra, AI. y F. Sancho, (2011), «Budget-constrained Expenditure Multipliers», *Applied Economic Letters*, 18(13), 1259-1262.

Hawkins, D., y H.A. Simon (1949), «Note: Some conditions of macroeconomic stability», *Econometrica*, 17(3), 245-248.

Kehoe, T. J., T.N. Srinivisan y J. Whalley (2005), *Frontiers in Applied General Equilibrium Modeling*, Cambridge University Press, New York.

Miller, R., y P. Blair (2009), *Input-output analysis: foundations and extensions*, segunda edición, Cambridge University Press, New York.

Nikaido, H. (1972), *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*, North-Holland, Amsterdam.

Oosterhaven, J. y D. Stelder (2002), «Net Multipliers Avoid Exaggerating Impacts: With a Bi-Regional Illustration for the Dutch Transportation Sector», *Journal of Regional Science*, 42(3),533-543.

Pyatt, G. (1985), «Commodity Balances and National Accounts: a Sam Perspective», *Review of Income and Wealth*, 31(2), 155-169.

Raymond, J.L. (1982), «Crecimiento de la producción y nivel de empleo», *Papeles de Economía Española*, 8, 142-153.

Robinson, S. (2006), «Macro Models and Multipliers: Leontief, Stone, Keynes, and CGE Models», en A. de Janvry y R. Kanbur (eds.), *Poverty, Inequality and Development*, Springer, New York.

Sancho, F. (2012), «Straightening out the concept of direct and indirect input requirements», *Economics Bulletin*, 32(1), 502-509.

Sancho, F. (2013), «Some conceptual difficulties of "net" multipliers», *Annals of Regional Science*, 51(2), 537-552.

Shoven, J. y J. Whalley (1984), «Applied general equilibrium models of taxation and international trade», *Journal of Economic Literature*, 22(3), 1007-1051.

Szyrmer, J.M. (1992), «Input-output coefficients and multipliers from a total flow perspective», *Environment and Planning A*, 24, 921-937.