EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PREVIO A LA FORMACIÓN INICIAL DE LOS MAESTROS: NECESIDAD Y CONCRECIÓN DE UNA PRUEBA PARA SU EVALUACIÓN

MATHEMATICAL KNOWLEDGE PRIOR TO THE INITIAL EDUCATION OF TEACHERS: THE NEED FOR AND SPECIFICATION OF A TEST FOR THEIR EVALUATION

Gorgorió, N., Albarracín, L.
Universitat Autònoma de Barcelona

RESUMEN

El conocimiento matemático de los alumnos que acceden a un Grado de Maestro de Educación Primaria (GEP) debe ser lo bastante sólido como para que durante su formación puedan construir un conocimiento de los contenidos matemáticos y de su didáctica suficiente para iniciarse en la profesión docente. En este capítulo presentamos evidencias empíricas de la distancia existente entre el conocimiento que poseen los estudiantes que ingresan al GEP de una universidad catalana y el que sus profesores desearíamos que tuviesen, que describimos como conocimiento matemático fundamental (CMF). Presentamos el desarrollo de una posible concreción del CMF en ámbitos de contenido matemático y, a partir de evidencias empíricas, justificamos la necesidad de implementar una prueba específica que evalúe el conocimiento matemático de los aspirantes a ingresar en un GEP, con carácter complementario a los requisitos de acceso existentes.

Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2019). El conocimiento matemático previo a la formación inicial de los maestros: necesidad y concreción de una prueba para su evaluación. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 111-132). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca..

Palabras clave: *Formación inicial de maestros, evaluación de los estudiantes para maestro, conocimiento matemático fundamental, educación matemática.*

ABSTRACT

The mathematical knowledge of students who access a Primary Education Teacher's Degree program (GEP) must be solid enough so that during their education as teachers they can build up a knowledge of the mathematical content and its didactics sufficient for them to enter the teaching profession. In this chapter we present empirical evidence of the distance between the knowledge that the first year of the GEP at Catalan universities have and the knowledge that their teachers would like them to have, which we describe as fundamental mathematical knowledge (FMK). We present the development of a possible concretion of the FMK in areas of mathematical content knowledge and, based on empirical evidence, we justify the need to implement a specific test that evaluates the mathematical knowledge of the candidates to enter a GEP program, as a complement to the existing access requirements.

Keywords: Pre-service teacher education, student-teacher evaluation, elementary school mathematics, Mathematics education.

INTRODUCCIÓN

En este capítulo introducimos los estudios desarrollados por nuestro grupo de investigación dirigidos a establecer una primera concreción de los conocimientos matemáticos necesarios para poder iniciar con garantías el Grado de Maestro en Educación Primaria (GEP). A partir de la necesidad de que los alumnos que acceden al GEP posean un conocimiento amplio y profundo de las matemáticas que van a enseñar, presentamos la noción de *conocimiento matemático fundamental* (a partir de ahora CMF). Partiendo de la idea de CMF, explicamos dos procesos que transcurrieron en paralelo: la concreción del CMF en dominios específicos de contenido y el desarrollo de una prueba de matemáticas específica diseñada para evaluar el conocimiento matemático de los alumnos que acceden al GEP. Seguidamente, mostramos los resultados obtenidos al aplicar la prueba desarrollada en un estudio piloto que evidenció las carencias en el conocimiento matemático en un grupo de alumnos que acababan de iniciar el GEP. Finalmente, exponemos la necesidad de introducir como requisito de acceso a los GEP una prueba específica que evalúe el conocimiento matemático puesto que, por una parte, no todos los alumnos que acceden al GEP se examinan de matemáticas en las PAU y, por otra, los resultados de nuestra investigación pusieron de manifiesto que las pruebas de matemáticas de la selectividad no constituyen un requisito que garantice que los estudiantes que las han superado tengan un dominio suficiente del CMF.

Partimos de la convicción de que una educación matemática que facilite que todos los alumnos alcancen las competencias matemáticas básicas puede contribuir al desarrollo de una sociedad más cohesionada y más justa. En las conclusiones del informe de 2011 del Eurydice Network (P 9 Eurydice Network, 2011) se establece que los docentes tienen un papel central en el desarrollo de las reformas necesarias para la mejora de la educación matemática de los jóvenes. En el informe se señalan distintos retos a superar, entre los que se incluye fortalecer el conocimiento y las habilidades matemáticas de los maestros. Por otra parte, tal como señalan Montalvo y Gorgels (2013), si se considera como referencia el efecto de la calidad de los profesores en los resultados de los estudiantes y el impacto de éstos sobre el crecimiento económico, se constata que incluso una mejora pequeña de la calidad del profesorado tiene un impacto sustancial sobre el crecimiento económico.

El estudio TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) puso de manifiesto diferencias y deficiencias en el conocimiento matemático de los estudiantes de distintos países. España se situó por debajo de la media de los países participantes de la Unión Europea y la OCDE. A partir de los resultados obtenidos en TIMMS, se crea el estudio TEDS-M (*Teacher Education Study in Mathematics*) de la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*, que analiza comparativamente a nivel internacional el conocimiento matemático que han adquirido los estudiantes para maestro al terminar su formación. TEDS-M implicó a 15 países, entre 2006 y 2009, y en él participaron la mayoría de los centros de formación de maestros de nuestro país.

En el estudio TEDS-M las características individuales de los alumnos aparecen como la causa principal de su rendimiento en matemáticas. Sin embargo, el conocimiento del profesor aparece como la causa más clara entre las no relacionadas con el alumno, mucho más que el contexto social o el tiempo dedicado a la enseñanza de las matemáticas (Rico, Gómez y Cañadas, 2014). El estudio TEDS-M aparece como un hito en tanto que aporta evidencias conclusivas sobre la importancia del conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. En esta misma línea, Lacasa y Rodríguez (2013) señalan que existe una sustantiva correlación entre el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Magisterio en España y su nivel de conocimientos de didáctica de las matemáticas y que la causalidad se mueve desde los conocimientos matemáticos a los conocimientos sobre su didáctica.

En España, los estudios dirigidos a determinar el conocimiento matemático inicial de los alumnos que acceden al GEP siguen evidenciando la necesidad de encontrar estrategias para garantizar su adecuada formación inicial. A pesar de que los estudiantes que llegan a la universidad han superado con éxito las etapas educativas previas –al menos desde el punto de vista del sistema– son varios los estudios que muestran que los estudiantes que acceden al GEP siguen teniendo dificultades con las matemáticas. Así, Arce, Marbán y Palop (2017), utilizando una prueba de competencias básicas de 6º de Primaria, identificaron carencias y dificultades de los alumnos que acceden al GEP relativas a aspectos esenciales como la proporcionalidad directa y los porcentajes, la aplicación de procedimientos de medida o la interpretación de resultados en situaciones que involucran la magnitud tiempo. Sus resultados son coherentes con los mostrados por Nortes y Nortes (2013) que utilizaron una prueba de competencias básicas de 3º de Educación Secundaria. Estos mismos autores (Nortes y Nortes, 2018) utilizaron la prueba de ingreso al Cuerpo de Maestros de la Comunidad de Madrid con alumnos de 2º y 4º del GEP de la Universidad de Murcia, mostrando que solo un 17,8% de los futuros graduados superarían dicha prueba. Estos trabajos, junto con los desarrollados desde nuestro grupo de investigación, son evidencias que apuntan a la necesidad de actuar para dotarnos de herramientas que permitan garantizar que los estudiantes que acceden a un grado de maestro poseen un sólido conocimiento matemático.

CONTEXTO

El 6 de noviembre de 2013 se estableció un convenio de colaboración entre la Generalitat de Catalunya y las universidades catalanas con grados de magisterio, para el desarrollo del Programa de Millora i Innovació en la Formació de Mestres –MIF– (ver http://mif.cat/410-2/). El programa se viene desarrollando desde el curso 2013-14 con el objetivo de contribuir a la mejora de la formación inicial de maestros, abriendo el debate sobre el modelo actual de formación.

Uno de los campos de actuación fue la introducción de instrumentos de registro de la mejora del dominio por parte de los estudiantes de los contenidos relacionados con las competencias básicas de la educación primaria. Por ello, en el contexto del programa MIF, el Govern de la Generalitat y las universidades catalanas, tanto públicas como privadas, acordaron establecer una Prueba de Aptitud Personal (PAP) obligatoria y común para acceder a los grados de Maestro en Educación Infantil y Maestro en Educación Primaria. De esta forma, el Consell Interuniversitari de Catalunya (CIC) aprobó, con fecha 30 de enero de 2014, la incorporación de una PAP para el acceso a los grados de maestro y, posteriormente, todas las facultades aprobaron incluir en las memorias de dichos grados la superación de la PAP como requisito de ingreso. En la actualidad ya existen grados universitarios de marcado carácter profesionalizador con requerimientos para el acceso complementarios a las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) entre ellos los de Ciencias de la actividad Física y el Deporte, Cinematografía o Traducción e Interpretación.

Para el curso 2014-15, se estableció que la PAP se consideraría superada a través de la obtención de una nota igual o superior a 5 como resultado de la media aritmética de los ejercicios de lengua catalana y lengua castellana de la fase general de las PAU, siempre que ambas fueran iguales o superiores a 4. El 15 de diciembre de 2014, el CIC llegó a un acuerdo, promovido desde el Programa MIF, para avanzar hacia una PAP específica. El acuerdo estableció que, a partir del curso 2017-18 incluido, para acceder al grado de Maestro en Educación Infantil, al grado de Maestro en Educación Primaria y al doble grado en Educación Infantil y Primaria impartidos por las universidades públicas y privadas del sistema universitario catalán, los candidatos deben superar una PAP que evalúa, entre otros aspectos, las competencias lógico-matemáticas. En este contexto, la primera autora recibió el encargo del coordinador del programa MIF de preparar una propuesta para la prueba de competencia matemática de la PAP.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL

En las tres últimas décadas se han desarrollado diversos modelos teóricos que describen el conocimiento necesario para enseñar matemáticas, atendiendo a las necesidades específicas de la enseñanza. A nivel internacional, destacan las aportaciones de Shulman (1986) quien establece la noción de *conocimiento pedagógico del contenido*, la de Ball y sus colaboradores (Ball, Thames and Phelps, 2008) quienes desarrollan la idea de *conocimiento matemático para la enseñanza,* y la de Rowland (2008) con la definición del *cuarteto de conocimiento*. En el ámbito español debemos destacar la noción de *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), las de *conocimientos y competencias didáctico-matemáticas* (Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018) y la de *competencia de la mirada profesional* (Llinares, 2012). La diversidad de marcos teóricos es un reflejo de la complejidad de los conocimientos y las competencias requeridos en la práctica del profesor de matemáticas. Sin embargo, los marcos teóricos mencionados centran su atención en el desarrollo profesional durante la formación inicial o en la práctica del ejercicio profesional. La atención que se ha prestado a la investigación centrada en establecer cuál es conocimiento matemático con el que los estudiantes llegan a los programas de formación del profesorado es mucho menor (Linsell y Anakin, 2012).

En Castro, Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió (2014) presentábamos una primera definición de CMF como el conocimiento disciplinar en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de matemáticas y de didáctica de las matemáticas, tomando en cuenta los requerimientos de la práctica profesional y las competencias matemáticas de la educación primaria. Sería el conocimiento disciplinar inicial deseable a partir del cual el estudiante, a través de los cursos de matemáticas y su didáctica y de las prácticas, construiría el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento pedagógico del contenido necesarios para iniciar su práctica. El CMF es el conocimiento disciplinar que los profesores en las facultades tomamos como punto de partida en nuestra docencia. El CMF requiere un conocimiento profundo de las matemáticas elementales y constituye los cimientos que sostienen el aprendizaje matemático de los futuros maestros, permitiendo que los distintos elementos de su didáctica generen una estructura robusta.

No existe un acuerdo explícito acerca de cuáles son los aspectos esenciales del CMF, ni existen todavía instrumentos compartidos para determinar hasta qué punto nuestros estudiantes poseen dicho conocimiento. Sin embargo, estaríamos de acuerdo en que al inicio de su formación podemos exigirles que conozcan los aspectos básicos de las matemáticas elementales, aunque no hayan elaborado un tejido completo de relaciones entre conceptos, procedimientos y estructuras. Por otra parte, creemos que podemos exigir a nuestros estudiantes que conozcan la base matemática y el dominio de la terminología, correspondientes a su propio proceso de escolarización. Nuestra interpretación del CMF se aproxima a la que proponen Linsell y Anakin (2012, 2013) del *conocimiento del fundamento del contenido* de los estudiantes que inician su formación como maestros que incluye, enlazados de manera inseparable, conocimientos conceptuales y procedimentales. Según estos autores las características de este conocimiento están relacionadas, entre otros aspectos, con la capacidad para modelizar, razonar y confirmar, usar múltiples representaciones, generalizar, trabajar con números reales y conocer hechos matemáticos básicos. Además, cuestionan que el conocimiento con el que los estudiantes llegan a su formación inicial de maestros sea adecuado y suficiente para construir y desarrollar el conocimiento necesario para la enseñanza.

Nuestro estudio alrededor del CMF tenía una doble intención. Por una parte, a partir de criterio de expertos, intentábamos fijar un acuerdo sobre el contenido que considerábamos imprescindible para el inicio de la formación de maestros y, por otra, trabajábamos para desarrollar un instrumento que permitiese verificar si los candidatos a los grados de maestro tienen un CMF suficiente para iniciarlos. Entendemos que la prueba de competencia matemática de la PAP para el acceso a los grados de maestro debía estar estrechamente relacionada con el concepto de CMF, por lo que intentamos conjugar dos procesos. Por una parte, como grupo de investigación, trabajábamos para avanzar en la concreción y caracterización del CMF, tanto en un contexto local como internacional. Por otra, asumíamos el encargo de diseñar la prueba de competencia matemática de la PAP. Inicialmente el instrumento de evaluación del CMF no estaba destinado a ser parte de una prueba de acceso, sin embargo, el camino avanzado y el estudio piloto para la evaluación del CMF aportaron información que podía ser útil para plantear la PAP.

Entendemos por competencia matemática la capacidad para utilizar conocimientos matemáticos de manera transversal en situaciones y contextos matemáticos y no matemáticos. La competencia matemática va más allá del conocimiento de procedimientos, se manifiesta en el uso de conocimiento conceptual en distintas situaciones prácticas. Crooks y Alibali (2014) organizaron el conocimiento conceptual en conocimiento de los principios generales y conocimiento subyacente a los procedimientos. El primero se refiere al conocimiento de reglas, definiciones y conexiones y de la estructura del dominio. El segundo implica saber por qué ciertos procedimientos funcionan para determinados problemas, cuál es el propósito de cada paso de un procedimiento, y conocer las conexiones entre estos pasos y sus fundamentos conceptuales.

La competencia matemática de una persona se apoya en el dominio de elementos de carácter conceptual y requiere la capacidad de usar conocimiento de carácter formal y explicitable, junto con conocimiento tácito. El conocimiento explicitable puede ser evaluado de distintas formas –cuestionarios escritos, observación, entrevistas, etc.– mientras que el conocimiento tácito, el que entra en juego en las situaciones de la práctica, resulta difícilmente evaluable en una prueba escrita. Por ello, parece claro que una PAP únicamente puede evaluar aquella parte de la competencia matemática correspondiente al conocimiento de carácter formal explicitable. Debíamos restringirnos pues a la evaluación de conocimiento conceptual a través de ejercicios y problemas referidos al conocimiento de principios generales y al conocimiento subyacente a los procedimientos.

El Consell del Programa MIF estableció que la PAP tiene únicamente una función discriminatoria, siendo su calificación APTO/NO APTO. Nos planteábamos pues desarrollar una prueba con una triple finalidad: asegurar que todos los candidatos admitidos tienen un conocimiento matemático mínimo, discriminando posibles limitaciones funcionales; indicar a los estudiantes de Bachillerato y Ciclos Formativos que deben prepararse si quieren acceder a un grado de maestro; y fomentar que los estudiantes trabajen con antelación a la prueba para poder superar posibles limitaciones transitorias. Finalmente, a través de un aumento progresivo del nivel de exigencia de la prueba, se esperaría que el nivel de conocimientos de los alumnos aumentase paulatinamente con el tiempo.

Utilizamos un ejemplo para explicar qué entendemos por limitación funcional y limitación transitoria. La figura 1 muestra la respuesta de un alumno que estaba cursando el primer curso de un GEP en una pregunta de la prueba piloto de nuestro estudio en la que era necesario calcular la superficie de un círculo de radio 6 cm.

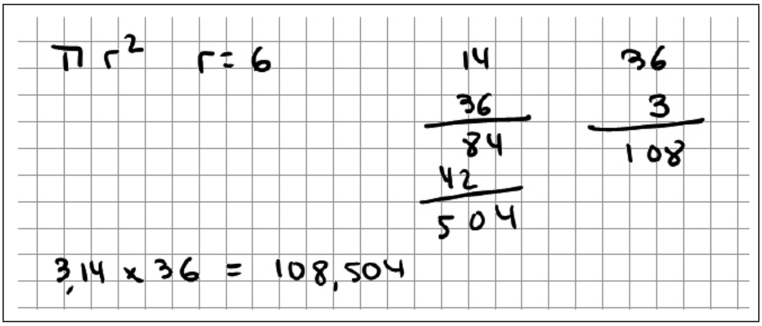


Figura 1. Respuesta de un alumno al calcular el área de un círculo de radio 6 cm

El estudiante recordaba correctamente la fórmula, pero no utilizó unidades ni cuando estableció el área, ni cuando escribió el resultado. Estas omisiones responden a limitaciones transitorias, posiblemente debidas a olvidos, que el estudiante podría superar después de una revisión de los errores. Sin embargo, el alumno trató la coma decimal como si «separara completamente» la parte entera de la parte decimal en el resultado de la multiplicación con decimales, error que refleja una limitación funcional. Posiblemente, este alumno durante su escolarización no había logrado construir un mínimo significado para el sistema de numeración decimal y su notación. Este alumno no es representativo de los alumnos del GEP, pero era uno de ellos. Creemos que este tipo de error no debe admitirse puesto que el conocimiento explicitado constituye una limitación para que pueda aprovechar los esfuerzos que el sistema destina a su formación como maestro.

Además, en la elaboración de la PAP, nos enfrentábamos a la necesidad de establecer una definición de competencia matemática que fuese «operativa y razonable», aunque restringiese el significado atribuido al término *conocimiento* en el concepto CMF. Debía ser «operativa» dado que debía referirse a algo susceptible de ser evaluado en una prueba escrita de carácter masivo. Debía ser «razonable» en tanto que debía poder justificarse frente a los futuros candidatos que se limitaba a conocimiento matemático al que habían tenido acceso durante su escolarización previa.

Por todo ello, en el contexto de la PAP, establecimos el siguiente objetivo para la prueba de CMF:

> A través de la resolución de ejercicios, problemas y situaciones de aplicación en contextos diversos, el examinando deberá demostrar que ha integrado y es capaz de utilizar conocimientos y habilidades relativos a distintos ámbitos de contenido matemático, siendo capaz de analizar los resultados obtenidos desde el punto de vista de su razonabilidad.

DESARROLLO DE UNA PRUEBA PARA EVALUAR EL CMF

En el contexto del grupo de investigación EMiCCoM - *Educació matemàtica i context: competència matemàtica* (2014 SGR 00723) y en el marco del proyecto *Estudi per a l'avaluació diagnòstica de les competències matemàtiques dels estudiants del grau en Educació Primària* (2014ARMIF-00041), en el que participaron junto a la Universitat Autònoma de Barcelona la Universitat de Girona, la Universitat de Vic y la Universitat Ramon Llull, desarrollamos una caracterización del CMF. Gracias a los avances en el marco del proyecto *Caracterizacion del conocimiento disciplinar en matematicas para el grado de educacion primaria: matematicas para maestros* (EDU2013-4683-R), nos planteamos establecer la viabilidad, pertinencia y adecuación de un instrumento de evaluación del CMF.

A continuación, en las secciones que siguen, introducimos los pasos dados para la consecución de dos objetivos estrechamente ligados: a) el establecimiento de los ámbitos de contenido matemático en la caracterización del CMF y b) el diseño de una prueba piloto que nos permitiese identificar las limitaciones, dificultades y retos que presenta la elaboración de una PAP en matemáticas.

La finalidad última de nuestro estudio era la construcción de una prueba definida a partir de criterio de expertos vinculados a la formación de maestros para caracterizar conocimientos específicos e identificar las competencias de cada alumno. Dado que el conocimiento matemático es conocimiento en contexto, los criterios de referencia se organizaron en torno a las distintas competencias y dominios de contenido. Los ítems debían cubrir las distintas concreciones del CMF y debía tomarse en cuenta su dificultad, capacidad de discriminación, formato y forma de presentación, entre otros aspectos. Sería importante establecer cuál era la concreción observable para cada uno de los conocimientos y competencias a evaluar. Además, dada la finalidad de la PAP, para cada ítem un error o una ausencia de respuesta debía reflejar una limitación determinada.

Grupo de discusión

Para la consecución del primer objetivo, el establecimiento de ámbitos de contenido, se organizó un grupo de discusión que se prolongó durante 10 sesiones en el que participaron 7 profesores de didáctica de las matemáticas con larga trayectoria en la formación de maestros de las universidades que habían suscrito el proyecto 2014ARMIF-00041. Además, a dos de las sesiones se invitó a profesores de las demás universidades catalanas que imparten matemáticas y su didáctica en grados de maestro (Universitat de Barcelona, Universitat de Lleida, Universitat Rovira i Virgili, Universitat Internacional de Catalunya y Universitat Abat Oliva CEU). Se organizaron también dos sesiones en las que participaron maestros de primaria que habían firmado el proyecto.

La finalidad del grupo de discusión era establecer cuál es y cómo se concreta el CMF. Se generó un conjunto de referentes teóricos para disponer de una base común que incluía documentos relacionados con el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas y el conocimiento disciplinar y didáctico de los distintos contenidos delimitados por el currículum de Primaria y las competencias de esta etapa. Puesto que estos documentos reflejan el objetivo de la formación inicial de maestros entendimos que podían orientar el estudio del punto de partida de dicha formación. Nos centramos en los contenidos matemáticos de la enseñanza obligatoria puesto que debíamos asegurar que los candidatos a la PAP han tenido oportunidad de acceder a aquello que evaluaremos.

Proceso de concreción

Durante las sesiones del grupo de discusión trabajamos para establecer una concreción del CMF a la vez que fijábamos el contenido de la PAP, tanto desde el punto de vista de los conocimientos matemáticos a evaluar como de las características de las preguntas a incluir. Después de consensuar los propósitos principales del CMF y la PAP, decidimos organizar el conocimiento matemático en los siguientes ámbitos: Numeración y cálculo; Relaciones y cambio; Espacio y forma; Medida; y Estadística y Azar. Para cada uno de los ámbitos consensuamos una relación de bloques de contenido propios del ámbito. A partir de esta relación de bloques de contenido, cada uno de los participantes en el grupo de discusión se centró en identificar o generar preguntas alineadas con los objetivos del CMF sobre dos de estos bloques. De esta forma aprovechamos el conocimiento experto en ámbitos de contenido concreto de los distintos participantes en el grupo de discusión. Trabajar desde lo concreto, generando preguntas para la PAP, nos permitió avanzar simultáneamente en la definición del CMF y el desarrollo de la PAP.

A partir del desarrollo de un primer banco de preguntas, para cada bloque de contenido definimos los conceptos y procedimientos que los aspirantes al GEP deberían dominar e iniciamos un proceso de priorización para decidir cuáles de ellos serían la base de la prueba. Para ello, cada uno de los siete miembros del proyecto valoró estos bloques de contenido, organizándolos según su criterio en tres niveles: indispensable, necesario, esperable. Entendemos por conocimiento esperable aquel que corresponde a un concepto o procedimiento que el estudiante ha encontrado en su escolaridad previa y, que por tanto, podríamos esperar que dominara, pero que no consideramos requisito indispensable o necesario para su ingreso en el GEP. Estas valoraciones fueron la base sobre las que se construyó la concreción del CMF en cada ámbito de conocimiento matemático. En la siguiente sección se da cuenta de los resultados del grupo de discusión que establecen la concreción del CMF siguiendo este proceso.

Concreción del CMF en la PAP

Los resultados de la concreción del CMF y los ámbitos de contenido matemático en la PAP (Gorgorió, Albarracín y Villarreal, 2017) fueron recogidos directamente en el *Acuerdo del CIC de 5 de junio de 2015, sobre las características generales de la PAP para acceder a los grados en Educación Infantil y Primaria, con todas sus denominaciones, a partir del curso 2017-18,* que establece la siguiente concreción de contenidos a evaluar:

> Numeración y cálculo. Es necesario demostrar la comprensión y la capacidad de representar y utilizar los números naturales, enteros y racionales en situaciones diversas; la comprensión del significado y las propiedades de las operaciones y de las relaciones entre unas y otras; el conocimiento del significado de divisor y el dominio de las habilidades necesarias para resolver situaciones de factorización y divisibilidad de números naturales.
>
> Relaciones y cambio. Es necesario demostrar la capacidad de identificar y generalizar patrones no necesariamente numéricos; de identificar e interpretar relaciones de dependencia entre variables; de interpretar y construir gráficos que expresen relaciones de cambio; es necesario también demostrar la comprensión integrada de los significados de proporcionalidad numérica y razón y la capacidad de usar estos conceptos para resolver situaciones diversas.
>
> Espacio y forma. Es necesario demostrar el conocimiento de las características y las propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y la capacidad de aplicarlas en situaciones diversas; la comprensión y la capacidad de representar y utilizar reflexiones, giros y traslaciones; la comprensión integrada de los significados de proporcionalidad geométrica, semejanza y escala, y la capacidad de utilizar estrategias de visualización para resolver problemas, sean o no geométricos.
>
> Medida. Es necesario demostrar el conocimiento del significado de magnitud medible (ángulo, longitud, área, volumen, capacidad, masa y tiempo) y de los procesos de medida; el conocimiento de las unidades de medida decimales y sexagesimales correspondientes y de los mecanismos para resolver situaciones de cambio de unidades, y el dominio de los conocimientos y las habilidades necesarias para resolver situaciones diversas relacionadas con las ideas de perímetro, área y volumen.
>
> Estadística y azar. Es necesario demostrar la capacidad de interpretar, analizar, obtener conclusiones y hacer predicciones a partir de datos estadísticos; de interpretar y construir gráficas estadísticas; de interpretar y calcular medidas de centralización, y comprender el significado de azar.
>
> La competencia lógico-matemática se evalúa a través de ejercicios, problemas y situaciones de aplicación en las que deberá construirse la respuesta sin calculadora y en las que se considerará tanto el proceso de resolución como la respuesta.

Prueba piloto

Para diseñar una prueba representativa del CMF tomamos como punto de partida el banco de actividades generadas durante el proceso de discusión que refleja el criterio de los expertos. Entre otras, el banco contenía preguntas liberadas de otros estudios –pruebas de competencia matemática, TIMSS, PISA, TEDS-M, SMART o LMT–, ejercicios de libros de texto, ejemplos procedentes de publicaciones relativas al análisis conceptual y de los errores y dificultades en el aprendizaje, y de estudios internacionales sobre la competencia matemática del profesorado. Las actividades de la prueba eran de respuesta abierta para evitar sugerir respuestas a los alumnos y estaban diseñadas con la intención de evaluar el conocimiento matemático a tres niveles, según la complejidad de la competencia matemática requerida o el proceso cognitivo exigido para su resolución. Estos niveles son los que marcan los distintos estudios PISA (OECD, 2012): reproductivo, de aplicación y de relación. La versión final de la prueba piloto contenía 18 actividades, equilibrando los ámbitos de conocimiento que definen la PAP y niveles de conocimiento matemático exigidos.

La prueba se pasó a los 295 estudiantes de primero del grado de Educación Primaria de la UAB en la primera semana del curso 2013-2014. La nota de corte para el acceso a esta titulación en la UAB fue superior a la del resto de los grados en Educación Primaria en Catalunya, situándose en el percentil 81 (77 de 421) del conjunto de los grados ofertados en Catalunya. Por lo tanto, al interpretar los resultados obtenidos, podemos considerar que, al menos desde el punto de vista del sistema, la población estudiada era la que mejor había superado los requisitos de acceso vigentes.

Consideraciones para el diseño de la prueba de matemáticas de la PAP

La finalidad de la PAP requería diseñar una prueba referida a criterios, puesto que no pretende ordenar los estudiantes en función de sus resultados, sino situarlos en relación al dominio de determinados contenidos y habilidades. Por lo tanto, en su elaboración partimos de los bloques considerados indispensables o necesarios por los expertos del grupo de discusión y trabajamos para asegurar la validez de la prueba, buscando que las preguntas fuesen relevantes y representativas de las distintas concreciones establecidas. Además, la especificidad de la evaluación del CMF nos llevó a considerar otras características para la redacción de la prueba –tipos de respuesta, tipos de enunciados, instrumentos permitidos para la respuesta– así como los criterios para la corrección de las preguntas. A continuación, justificamos la toma de decisiones con relación a dichas características, ejemplificándolo a partir de los resultados obtenidos en la prueba piloto.

Contextualización de enunciados verbales

Consideramos necesario introducir preguntas con enunciados verbales contextualizadas en situaciones reales para aproximarnos a la idea de competencia matemática, tal como argumentamos a continuación a partir de un ejemplo.

La pregunta 5 de la prueba piloto plantea: «*Cuando se hace una salida escolar es necesario que los niños vayan acompañados por adultos. Cada adulto puede ser responsable, como máximo, de un grupo de 16 niños. En una salida con 54 niños, ¿cuántos adultos deben acompañarlos?*» La Tabla 1 recoge las respuestas de los alumnos, con sus frecuencias relativa y absoluta.

Tabla 1. Respuestas a la pregunta 5

Respuesta	NC	3	3,375	3,4	3,5	4	4 con errores	5	Otra	Total
Frecuencia	17	41	24	12	7	154	20	6	10	291
Porcentaje	5,8%	14,1%	8,2%	4,1%	2,4%	52,9%	6,9%	2,1%	3,4%	100%

Observamos que un 52,9% de los alumnos respondió dividiendo correctamente y tomando el cociente por exceso, aportando evidencias de que daban sentido a la situación. Un 6,9% dio 4 como respuesta, siendo el resultado de cálculos erróneos o argumentos inválidos. Un 14,8% de los estudiantes dio como respuesta el cociente con decimales obtenido en la división, y 14,1% respondió que deberían ir acompañados por 3 adultos. Vemos que más de una cuarta parte de las respuestas evidenció que no se interpretaba la situación propuesta. De esta forma, la pregunta nos permitió distinguir entre los que eran capaces de resolver el problema con significado de aquellos que aplicaban algoritmos de forma rutinaria.

Preguntas de respuesta abierta

Otra de las decisiones que debíamos tomar era si optábamos por preguntas con respuesta de opción múltiple o de respuesta abierta. La pregunta 2, entre otros cálculos de cambio de unidades de medida, pedía a los estudiantes la equivalencia en minutos de 1,4 horas. Los resultados para esta pregunta nos permitieron reflexionar acerca del formato apropiado para los ítems de la PAP. La Tabla 2 muestra las respuestas obtenidas en la prueba piloto y sus frecuencias.

Tabla 2. Frecuencia absoluta y relativa de las respuestas a la equivalencia en minutos de 1,4 horas

NC	60	64	75	80	84	90	100	120	otra	total
3	1	7	9	3	79	3	154	3	29	291
1,0%	0,3%	2,4%	3,1%	1,0%	27,1%	1,0%	52,9%	1,0%	10,0%	100,0%

Para responder debía combinarse que una hora son 60 minutos y el significado del número decimal. Recogimos un total de 28 errores conceptuales distintos. Asignar valores como 40 o 4 minutos a 0,4 horas evidencia la dificultad para tratar la parte decimal. La respuesta mayoritaria no es la correcta, sino la que establece que 1,4 horas son 100 minutos, poniendo en evidencia que los estudiantes no relacionaban su resultado con el conocimiento de la práctica cotidiana, olvidando que 1,5 horas son 90 minutos. Esta ausencia de conexión es incluso más evidente cuando responden 60, 90 o 120.

La gran variedad de respuestas obtenidas en preguntas como esta, y también en otras de distinta naturaleza, nos sugirió que si queríamos identificar posibles limitaciones de los candidatos debíamos plantear preguntas en las que tuviesen que construir la respuesta, a pesar de que la corrección de una prueba con preguntas de opción múltiple fuera más ágil.

Uso de calculadora

La prueba contenía varias preguntas de tipo aritmético –ordenación de números decimales o cálculos aritméticos en distintos conjuntos numéricos, entre otras– e incluía problemas contextualizados en los que era necesario recurrir a operaciones aritméticas para resolverlos. No permitir el uso de la calculadora nos llevó a detectar errores como los presentados en la figura 1 puesto que las preguntas en que se debe utilizar algoritmos evalúan el conocimiento conceptual subyacente a los procedimientos. Si el alumno ha olvidado las reglas que memorizó, sólo podrá resolver el ejercicio correctamente si es capaz de reconstruir el procedimiento o utilizar vías alternativas dotando la pregunta de significado.

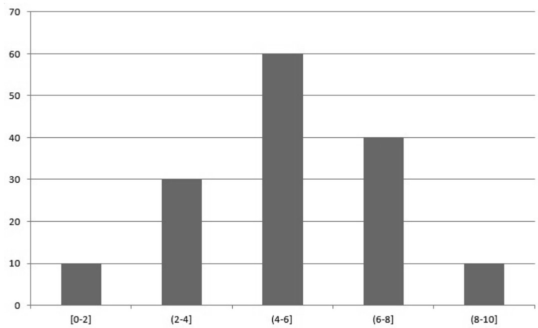
Corrección y puntuación

La prueba tenía como objetivo discriminar entre aquellos estudiantes que han construido un conocimiento suficiente y los que no. Por ello, contrariamente a lo habitual, en la calificación de la prueba asignamos mayor peso a las preguntas relativas a elementos más básicos de conocimiento. Decidimos atribuir más puntos a las preguntas de carácter reproductivo, dado que reflejan los aspectos más básicos del conocimiento presentados de forma aislada. Si el alumno había olvidado los procesos algorítmicos, debería haber podido resolver las preguntas recurriendo al conocimiento conceptual que los fundamenta. Respecto a la corrección, si la respuesta a la pregunta era completa se le asignaba la puntuación máxima, y si existía algún error o era incompleta, no se puntuaba. La calificación máxima era de 57 puntos (a 5 preguntas de aplicación les correspondían 3 puntos). La Tabla 3 recoge el tipo de preguntas y, para cada tipo, el número y la puntuación atribuida.

Tabla 3. Descripción de la puntuación de las preguntas de la prueba

Tipo de pregunta	Número de preguntas en la prueba	Puntuación de la pregunta
Reproductivo	9	4 puntos
Aplicación	7	2 o 3 puntos
Relación	2	1 punto

La pregunta 2 –salida escolar– y la pregunta 5 –horas y minutos– que hemos mostrado en secciones anteriores son ejemplos de preguntas de tipo reproductivo, puesto que van dirigidas a identificar el conocimiento de aspectos fundamentales como el significado de la división y el manejo de su algoritmo, y el cambio de unidades. Un ejemplo de pregunta de aplicación es la pregunta 15 (Figura 2), que proporciona un histograma sobre el número de alumnos que han obtenido unas determinadas calificaciones en una prueba y plantea varias preguntas.



(A) ¿Cuántos alumnos han sido evaluados?
(B) ¿Qué puedes decir sobre el número de aprobados?
(C) ¿Qué porcentaje de alumnos han obtenido una nota entre 0 y 4?
(D) ¿Cuál es la nota más alta obtenida?

Figura 2. Enunciado de la pregunta 15

La pregunta 15 tenía asignada una puntuación máxima de 3 puntos que se repartían a partes iguales entre los cuatro apartados. El apartado más asequible es el apartado (A), que respondieron correctamente un 86,8% de los alumnos. Esto contrasta con el 17,1% de éxito en el apartado (B) que requiere un mayor nivel de interpretación del gráfico en relación a la realidad representada.

Un ejemplo de pregunta de relación es la pregunta 17, que respondieron correctamente un 14,5% de los alumnos participantes en la prueba piloto. Su enunciado es: «*El siguiente pentagrama está formado por las líneas de las notas mi, sol, si, re y fa. Si la figura dibujada continuara con el mismo patrón, ¿en qué línea se encontraría el número 2035?*»

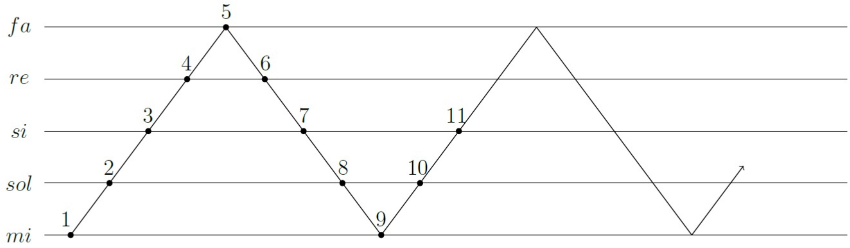


Figura 3. Gráfico del enunciado de la pregunta 17

Además, decidimos que superar la prueba requería responder correctamente todas las preguntas de tipo reproductivo, con lo cual era necesario obtener 36 de los 57 puntos, es decir, un 6,32 sobre 10. Así definimos las siguientes calificaciones (Tabla 5): *A* si se superaban todas las preguntas, *B* si se superaban todas las de tipo reproductivo y de aplicación; y *C* si se superaban todas las preguntas de tipo reproductivo; y tres niveles *D, E* y *F* para cuando no se superaba la prueba. La tabla siguiente muestra los resultados obtenidos por los participantes en la prueba piloto.

Tabla 4. Calificaciones obtenidas en la prueba piloto

Calificación	Frecuencia	Porcentaje
A [9'6, 10]	0	0,00%
B [9, 9'6)	3	1,01%
C [6'3, 9)	26	8,72%
D [5, 6'3)	44	14,77%
E [2'5, 5)	152	51,01%
F [0, 2'5)	73	24,49%
Total	298	100,00%

Estos resultados cuestionan el nivel de conocimiento de los participantes y distan considerablemente de los deseables, siendo menor al 10% el porcentaje de los que superan la prueba. El formato y contenidos de la prueba de competencia lógico-matemática en la PAP debían considerar esta realidad, discriminando a aquellos alumnos que no poseen un mínimo conocimiento matemático que pueda ser modificado y ampliado durante su paso por nuestras facultades.

Por otra parte, la dificultad de la prueba debía ser definida cautelosamente, ya que los resultados de la Tabla 4 evidencian que el conocimiento matemático de una gran parte de los estudiantes que ingresaron en el GEP antes de su implementación distaba de ser suficiente. Introducir en el sistema de acceso una prueba discriminatoria con el nivel de exigencia de la de este estudio podría implicar efectos negativos en la selección de alumnos. Por ello, definir unos criterios de puntuación que respondiesen a esta necesidad era uno de nuestros objetivos a corto plazo. Por otra parte, además de validar la construcción de la PAP, debíamos estudiar diferentes formas de corregir y calificar para que la prueba cumpliese su función sin perjudicar al sistema de formación de maestros.

PERTINENCIA DE LAS PAU COMO REQUISITO DE ACCESO AL GRADO

Los datos obtenidos con la prueba piloto al inicio del curso 2013-14 aportaron dos ideas importantes. Por una parte, constatamos que resultaba necesario replantear la forma de calificar la prueba y, por otra, teníamos evidencia de que aquellos estudiantes que habían permanecido en contacto con las matemáticas durante toda su escolaridad habían obtenido resultados significativamente mejores. Nos preguntamos entonces si la superación de las pruebas de matemáticas de las PAU garantizaría un conocimiento matemático suficiente para iniciar el GEP.

Para obtener evidencias empíricas utilizamos la prueba piloto y ajustamos la forma de calificar. Trabajando con los datos de los estudiantes que iniciaron el GEP el curso 2014-15, analizamos la coherencia entre los resultados que obtuvieron en la prueba de CMF, ajustado el criterio para su calificación, y los que habían obtenido en las pruebas de matemáticas de las PAU, a partir de los registros de calificaciones que la Oficina de Acceso a la Universidad nos facilitó anonimizados.

La Tabla 4, presentada más arriba, muestra que únicamente el 9,73% de los estudiantes del curso 2013-14 superaron la prueba de CMF obteniendo una calificación de A, B o C. Para mantener la validez del estudio, rebajar la exigencia de la prueba de CMF y permitir comparaciones con los exámenes de las PAU, decidimos establecer el aprobado en cinco puntos, también para la prueba de CMF, con lo que para el curso 2014-15 superar la prueba significa obtener una calificación A, B, C o D manteniendo los criterios para asignar la calificación numérica.

En esta ocasión, se enfrentaron a la prueba de CMF 258 alumnos de primer curso. La media en la calificación de la prueba de estos alumnos fue de 3,87 puntos sobre 10, presentando una desviación estándar de 1,75 y con un 24,81% de aprobados. En este caso nos centramos en diferenciar los resultados de las calificaciones en la prueba de CMF de los alumnos que habían hecho las pruebas de *Matemáticas* o *Matemáticas para las Ciencias Sociales* en las PAU de las de los alumnos que no habían pasado ninguna de estas pruebas. Debemos destacar que 16 alumnos pasaron ambas pruebas de Matemáticas de las PAU ya que la estructura de las PAU así lo permite. Las calificaciones de estos 16 alumnos aparecen reflejadas en ambas columnas. La Tabla 5 muestra los descriptores de las calificaciones de los alumnos de la promoción 14-15 en la prueba de CMF.

Tabla 5. Descriptores estadísticos de los resultados en la prueba de CMF según las opciones del examen de matemáticas en las PAU

	Matemáticas Selectividad	Matemáticas CCSS Selectividad	No han hecho prueba de matemáticas
Media	5,81	4,53	3,29
Mediana	5,81	4,33	3,10
Desviación estándar	1,65	1,70	1,53
Mínimo	1,32	0,85	0,35
Máximo	9,30	9,30	8,01
Número de estudiantes	36	84	154
Porcentaje sobre el total	13,95%	32,56%	59,69%

Los resultados ponen de manifiesto que los alumnos que hicieron la prueba *Matemáticas* en las PAU obtuvieron una calificación media en la prueba de CMF de 5,81 puntos superando en 1,94 puntos la media de las calificaciones en la prueba de CMF de todos los alumnos de dicho curso, que fue de 3,87 puntos. Por su parte, los alumnos que en las PAU se examinaron de *Matemáticas para las Ciencias Sociales* obtuvieron en la prueba de CMF una calificación media superior en 0,46 puntos a la del total de la promoción. La calificación media en la prueba de CMF de los alumnos que no hicieron ninguna de las dos pruebas de matemáticas en las PAU, es 3,29 puntos, claramente inferior a la media del grupo.

Para sustentar estas afirmaciones utilizamos un test ANOVA de comparación de medias. Los resultados del test (Tabla 6) muestran que debemos rechazar la hipótesis de que las medias eran iguales, el *p-valor* es 0,0000, menor que 0,05. El estudio de la diferencia de medias dos a dos nos muestra que los tres grupos de estudiantes obtuvieron calificaciones significativamente diferentes.

Tabla 6. Test de comparación de medias de CMF según opciones de matemáticas en las PAU

Matemáticas vs Matemáticas CCSS	Diferencia = 1,2800, 95% CI = (2,0307, 0,5293), p = 0,0002
Matemáticas vs no PAU	Diferencia = 2,5200, 95% CI = (3,2177, 1,8223), p = 0,0000
Matemáticas CCSS vs no PAU	Diferencia = 1,2400, 95% CI = (1,7512, 0,7288), p = 0,0000

Estos resultados prueban que aquellos alumnos que se examinaron de *Matemáticas* en las PAU obtuvieron mejores resultados en la prueba de CMF que los que se examinaron de *Matemáticas para las Ciencias Sociales*, y estos últimos mejores que los que no se examinaron de matemáticas. Sin embargo, esto no es suficiente para afirmar que superar una de las dos pruebas de matemáticas de las PAU sea garantía de un conocimiento matemático inicial suficiente para el GEP.

Las Figuras 4a y 4b muestran, para cada estudiante, la relación entre las calificaciones en la prueba de CMF y la prueba de matemáticas de las PAU en la opción de Ciencias y en la de Ciencias Sociales, respectivamente. En cada tabla, se representa también la recta de regresión correspondiente. En los gráficos se observa una tendencia de correlación débil entre la nube de puntos y las respectivas rectas de regresión, pero el factor determinante para establecer las posibles relaciones entre los resultados en las dos pruebas es el estudio por cuadrantes. Además, observamos que 7 (19,44%) de los estudiantes que hicieron la prueba de *Matemáticas* de las PAU la suspendieron, pero aprobaron la prueba de CMF. Interpretamos que estos alumnos habían conseguido elaborar un conocimiento matemático adecuado para el GEP, pero no habían completado satisfactoriamente su formación para superar la prueba de matemáticas de las PAU. La situación inversa, superar el examen de matemáticas de las PAU y no superar la prueba de CMF se dio en un único caso. El grupo de alumnos que en las PAU hizo la prueba de *Matemáticas para Ciencias Sociales* era mucho más numeroso y vemos también que 25 (29,76%) de estos alumnos superaron la prueba en las PAU, pero no alcanzan la calificación de 5 en la prueba de CMF, mientras que 5 (5,95%) alumnos que superaron la de CMF no superaron la de las PAU.

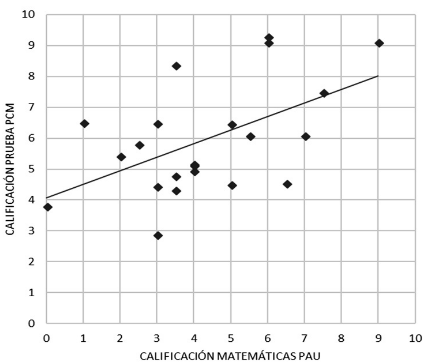


Figura 4a. Relación calificaciones Matemáticas para Ciencias PAU y CMF

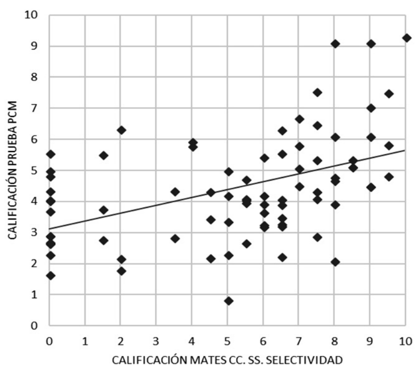


Figura 4b. Relación calificaciones Matemáticas para Ciencias Sociales PAU y PCMF

Estos datos nos muestran que la prueba de CMF y las pruebas de matemáticas de las PAU establecen de forma distinta como apto / no apto a un 37,71% de los alumnos que realizaron las PAU en la modalidad de Ciencias Sociales y a un 22,22% de los alumnos de la modalidad de Ciencias. Esta constatación empírica confirma como no deseable utilizar las pruebas de matemáticas de las PAU como requisito específico para el acceso al GEP.

CONCLUSIONES

La investigación presentada en este capítulo parte de la necesidad de una mejora de la formación matemática inicial de los maestros de Educación Primaria. El primer producto de esta investigación es la concreción del concepto *conocimiento matemático fundamental* (CMF) en distintos ámbitos de contenido matemático. De esta concreción se deriva la evidencia de la necesidad de una prueba de conocimiento matemático y una propuesta concreta que se incorporaría para la admisión a los grados de Maestro como requisito complementario a las Pruebas de Acceso a la Universidad. Entendemos que la idea de *conocimiento matemático fundamental* puede erigirse como uno de los constructos teóricos esenciales para definir la formación inicial de los estudiantes para maestro a la vez que podría convertirse en un soporte sobre el cual armar las asignaturas de matemáticas para maestros o de matemáticas y su didáctica.

Son muchas las investigaciones, desarrolladas desde distintas perspectivas, que establecen el conocimiento para enseñar matemáticas que los aspirantes a maestros deberían desarrollar durante su paso por las facultades de educación. Sin embargo, dichos estudios establecen el objetivo de la formación inicial sin tomar en consideración, o al menos sin explicitarlo, cuál es el punto de partida para el desarrollo del conocimiento necesario para enseñar matemáticas. Por lo tanto, además de una discusión teórica sobre cuáles serían los conocimientos iniciales requeridos, sería necesario establecer conexiones con los marcos teóricos que describen el conocimiento del profesor de matemáticas que están siendo utilizados para situar investigaciones y orientar políticas de ordenación universitaria relativas a la formación de maestros.

La concreción del *conocimiento matemático fundamental* en ámbitos de contenido y la prueba desarrollada en nuestro estudio orientaron la definición del examen de competencia lógico-matemática de la Prueba de Aptitud Personal que desde junio de 2017 es requisito para el acceso a los grados de maestro en las universidades catalanas. Además, nos permitieron desarrollar el modelo de prueba que venimos utilizando desde septiembre de 2013 para elevar el nivel de exigencia en el conocimiento matemático de nuestros estudiantes al iniciar los cursos de matemáticas que son parte de su formación.

Los resultados que hemos presentado en este capítulo corresponden a los alumnos que ingresaron los cursos 2013-14 y 2014-15. Constatamos que sus calificaciones en la prueba distan de ser las que evidenciarían un conocimiento inicial óptimo para desarrollar el conocimiento necesario para iniciarse como docentes de matemáticas. Además, los resultados de nuestro estudio muestran que los criterios de admisión y los requisitos de acceso vigentes hasta el momento de la aplicación de la Prueba de Aptitud Personal no habían logrado garantizar un conocimiento matemático suficiente en los estudiantes que accedieron a la formación inicial de maestros. Todo ello justifica la necesidad de introducir una prueba de conocimiento matemático como requisito para el acceso que permita asegurar que el bagaje de los candidatos se acerca al *conocimiento matemático fundamental.*

No obstante, el desarrollo de una prueba como la que planteamos comporta múltiples retos. De entrada, e incluso aceptando que para desarrollarla debimos restringir la idea de *conocimiento matemático fundamental* a conocimiento explicitable a través de una prueba escrita, uno de los principales retos fue conjugar conceptualmente las ideas de competencia matemática y *conocimiento matemático fundamental*. Intentar hacer compatibles estas dos nociones condicionó el instrumento diseñado. Además, conciliar la idea de *conocimiento matemático fundamental,* como conocimiento deseable, con la realidad manifestada por los resultados obtenidos en el pilotaje nos llevó también a revisar nuestros planteamientos desde el punto de vista de lo exigible, en un intento por ajustar lo que definíamos como fundamental y las evidencias del estudio piloto.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado al amparo del grupo *Educació matemàtica i context: competència matemàtica* (EMiC:CoM), reconocido y financiado por la Direccio General d'Universitats (ref. 2014SGR00723) y con el soporte de los proyectos *Estudi per a l'avaluació diagnòstica de les competències matemàtiques dels estudiants del grau en Educació Primària*, Agencia de Gestio d'Ajuts Universitaris i de Recerca (ref. 2014 ARMIF-00041), *Caracterización del conocimiento disciplinar en matemáticas para el grado de educación primaria: matemáticas para maestros, y Estudio de los requisitos de acceso a los Grados de Maestro de Educación Primaria desde la perspectiva del conocimiento matemático*, I+D, RETOS, Direccion General de Investigacion (refs EDU2013-4683-R y EDU2017-8247-R).

BIBLIOGRAFÍA

Arce, M., Marbán, J.M. y Palop, B. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido matemático en estudiantes para maestro de primaria de nuevo ingreso desde la prueba de evaluación final de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 119-128). Zaragoza: SEIEM.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013, February). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser y M.A. (Eds.), *Proceedings of the CERME8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Castro, Á., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de Educación Primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.

Crooks, N. y Alibali, M.W. (2014). Defining and Measuring Conceptual Knowledge in Mathematics. *Developmental Review, 34*(4), 344-377.

Eurydice Network –P 9 Eurydice– (2011). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*. Brussels: Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.

Godino, J.D., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13,* 63-83.

Gorgorió, N., Albarracín, L. y Villarreal, A. (2017). Examen de competència logicomatemàtica en la nova prova d'accés als graus de mestre. *Noubiaix, 39*, 58-64.

Lacasa, J.M. y Rodríguez, J.C. (2013). Diversidad de centros, conocimientos y actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas de los futuros maestros en España. En IEA (Ed.), *TEDS-M Informe español. Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Volumen II. Análisis secundario* (pp. 63-108). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Linsell, C. y Anakin, M. (2012). Diagnostic Assessment of Pre-Service Teachers' Mathematical Content Knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development, 14*(2), 4-27.

Linsell, C. y Anakin, M. (2013). Foundation Content Knowledge: What do pre-service teachers need to know? En V. Steinle, L. Ball y C. Bardini (Eds.), *Mathematics Eductión: Yesterday, today and tomorrow (36th MERGA)* (pp. 442-449). Melbourne, VIC: MERGA.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una Mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 53-70.

Montalvo, J.G. y Gorgels, S. (2013). Calidad del profesorado, calidad de la enseñanza y aprendizaje: Resultados a partir del TEDS-M. En IEA (Ed.), *TEDS-M Informe español. Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Volumen II. Análisis secundario* (pp. 13-40). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Nortes, A. y Nortes, R. (2013). Formación inicial de maestros: un estudio en el dominio de las matemáticas. *Profesorado: Revista de currículum y formación del profesorado, 17*(3), 185-200.

Nortes, R. y Nortes, A. (2018). ¿Tienen los futuros maestros los conocimientos matemáticos elementales? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García-García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 397-406). Gijón: SEIEM.

OECD (2012). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework. Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing.

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. (2014). Formación Inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, *363*, 35-59.

Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education* (1: 273-298. Rotterdam: Sense).

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Villarreal, A., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2016). First year student teachers dealing with non-routine questions in the context of the entrance examination to a degree in Primary Education. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the CERME10* (pp. 3392-3399). Dublin, Irlanda: DCU Institute of Education and ERME.