APROXIMACIÓN A LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS QUE ESTABLECEN FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA EN TAREAS DE MEDIDA Y COMPARACIÓN DE ÁREAS[xx]

Approximation to the mathematical connections established by pre-service teachers in measure and comparison area tasks

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E.

Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Este trabajo pretende realizar un primer acercamiento a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria entre cuatro manifestaciones del área. Para ello se analizan las justificaciones escritas y los procedimientos utilizados en tres tareas de medida y comparación de áreas de superficies planas, propuestas en un cuestionario no estructurado. Los resultados indican una tendencia generalizada de los estudiantes para maestro a utilizar fórmulas para encontrar el área de diferentes superficies, evidenciando dificultades en la resolución de tareas en contextos geométricos donde no existe un valor numérico asociado.

Palabras clave: *conexiones matemáticas, manifestaciones del área, concepto de área, futuros maestros de primaria.*

Abstract

This research intends to make a first approach to the mathematical connections established by pre-service primary teachers among four manifestations of area. For this, the written justifications and the procedures used in three tasks of measurement and comparison of areas of flat surfaces, proposed in an unstructured questionnaire, are analysed. The results indicate a generalized tendency of pre-service teachers to use formulas to find the area of different surfaces and show difficulties of future teachers when they are faced with tasks in geometric contexts where there is no associated numerical value.

Keywords: *mathematical connections, manifestations of area, concept of area, pre-service primary teachers.*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas la línea de investigación referente al conocimiento profesional de los profesores de matemáticas ha sido foco de diversas investigaciones que buscan analizar el conocimiento vinculado a la enseñanza y las relaciones que se establecen entre los diferentes tipos de conocimiento necesarios para la enseñanza de las matemáticas (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Ponte y Chapman, 2006; entre otros). En este sentido, consideramos que la acción de establecer e identificar conexiones matemáticas es un aspecto clave en el trabajo de los profesores de matemáticas, pues permite relacionar los distintos contenidos de la disciplina de las matemáticas y, al mismo tiempo, otorgar sentido al trabajo matemático de los estudiantes (De Gamboa, Badillo y Ribeiro, 2015). En consecuencia, el establecimiento de conexiones en el aula depende, al menos en parte, de los conocimientos del contenido y de su didáctica por parte de los profesores de matemáticas. Sin embargo, los propios profesores tienen dificultades para articular lo que conocen y cómo lo conocen, por lo que la acción de establecer relaciones entre los tipos de conocimiento y entre conceptos específicos de las

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019). Aproximación a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria en tareas de medida y comparación de áreas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 233-242). Valladolid: SEIEM.

matemáticas serían uno de los principales desafíos de la formación inicial. Los estudiantes para profesor y los profesores en ejercicio deben aprender a usar, gestionar, conectar y transformar su conocimiento en un sistema coherente de acciones en el aula que les permita promover un aprendizaje conectado e interpretar lo que saben sus estudiantes. Así, el objetivo de este estudio es identificar las conexiones matemáticas que establece un grupo de estudiantes para maestro al resolver tareas de medida y comparación de áreas de superficies planas. Para esto, observamos y analizamos los cambios de registro en las diferentes estrategias de resolución utilizadas en cada tarea, determinando tres niveles en la elaboración en las conexiones matemáticas establecidas. Para determinar conexiones asociadas al concepto de área, nos basamos en las manifestaciones del área propuestas por Corberán (1996) y, posteriormente, para la caracterización de las conexiones encontradas, tomamos como referencia el marco propuesto por De Gamboa y Figueiras (2014). Aclaramos que cuando hablamos de estudiantes nos referimos a alumnos de primaria, y para futuros maestros de primaria usamos la sigla EPM.

MARCO TEÓRICO

Conexiones matemáticas

La acción de establecer conexiones matemáticas es un proceso que ocurre en la mente de quienes aprenden y, por tanto, es una construcción mental (Businkas, 2008). Dicho proceso podría explicar, en parte, cómo los alumnos organizan los distintos conceptos matemáticos y establecen relaciones entre ellos de un modo coherente. Si bien es cierto que las relaciones entre los diferentes conceptos matemáticos existen por sí solas, es tarea de los profesores asegurarse que los alumnos logren establecer las conexiones apropiadas entre éstos. De esta manera, la capacidad de los profesores para promover el establecimiento de conexiones matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje contribuiría a la construcción de un conocimiento sólido y duradero en los alumnos, a la vez que permitiría gestionar posibles errores y dificultades (De Gamboa et al., 2015). Para que esto ocurra, es necesario, entre otros conocimientos y competencias, que el profesor sea capaz de analizar la actividad matemática implicada en la resolución de los problemas que propone a sus estudiantes, con el fin de diseñar, gestionar y evaluar la implementación de situaciones de enseñanza.

De Gamboa y Figueiras (2014) proponen una clasificación de las conexiones matemáticas que se dan en el aula con base en la naturaleza de las conexiones y en el contexto en el que se producen. Así, aquellas conexiones que establecen relaciones entre aspectos externos de la matemática (contenidos matemáticos asociados a la vida diaria, a otras disciplinas curriculares y a modelos construidos a partir de referentes reales) se denominan *conexiones extra matemáticas* y, aquellas que vinculan aspectos internos de la disciplina (conceptos, definiciones, representaciones, etc.) se denominan *conexiones intra matemáticas*. Las conexiones intra matemáticas pueden ser relacionadas con procesos transversales o con conceptos específicos. Las conexiones relacionadas con procesos transversales establecen relaciones entre un concepto matemático y un proceso transversal asociado, como pueden ser las heurísticas relacionadas con la resolución de problemas. Por su parte, las conexiones de tipo conceptual relacionan representaciones, procedimientos o técnicas asociadas a un concepto o a conceptos diferentes y pueden ser con conversión o tratamiento. En este sentido, para analizar los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático, Duval (2006) diferencia entre dos tipos de representación en la actividad matemática: las conversiones y los tratamientos. Mientras que las conversiones se dan entre registros diferentes, los tratamientos se producen dentro de un mismo registro. En esta investigación, nos enfocamos en las conexiones intra matemáticas de tipo conceptual con conversión, entendiendo las conversiones como los cambios de registros involucrados en cada tarea, es decir, los registros geométricos y numéricos que utilizan los EPM para resolver cada tarea.

Medida del área

Diversos estudios centrados en la comprensión del concepto de área en estudiantes de primaria (Corberán, 1996; D'Amore y Fandiño, 2007; Huang y Witz, 2013; Outhred y Mitchelmore, 2000; entre otros) han mostrado que una gran cantidad de alumnos presentan dificultades y errores al resolver problemas asociados a la medida del área, que pueden estar relacionados con una pobre comprensión, tanto del significado de las fórmulas como del concepto. Por ejemplo, D'Amore y Fandiño (2007) muestran evidencias de cómo al variar la forma de una superficie, alumnos de primaria no logran aceptar la conservación del área de la superficie, siendo incapaces de identificar que el área es independiente de la forma de la superficie.

Las dificultades que presentan los estudiantes también se han evidenciado en futuros maestros de primaria. Simon y Blume (1994) informan que muchos EPM utilizan unidades lineales en lugar de unidades cuadradas para medir áreas y asocian cambios de longitud a cambios de área. Además, advierten que una gran cantidad de EPM no logra disociar el área del número que la mide y al medir dos superficies iguales, con distintas unidades de medida, afirman que una es mayor que otra basándose en los datos numéricos. Baturo y Nason (1996) se refieren al tipo de conocimiento que es utilizado por los EPM cuando resuelven tareas de medición de áreas y señalan que el conocimiento de los conceptos matemáticos y las relaciones entre ellos es limitado, pues los EPM priorizan el conocimiento procedimental asociado a la memorización de fórmulas, lo que ocasiona dificultades para conectar representaciones concretas y representaciones abstractas (fórmulas) de la medida del área. Del mismo modo, los EPM no evidencian un uso comprensivo de las fórmulas para medir áreas (por ejemplo, no comprenden la relación entre la fórmula para los triángulos y la fórmula para los rectángulos), debido a que la relación entre los procedimientos numéricos y las experiencias concretas no se ha establecido con antelación.

Corberán (1996), basándose en estudios previos (Douady y Perrin-Glorian, 1989; Freudenthal, 1983), se refiere a que la enseñanza del área debería contemplar un tratamiento cualitativo con privilegio de procedimientos geométricos e intuitivos, y un tratamiento de tipo cuantitativo ligado al uso de procedimientos numéricos. Así, establece cuatro diferentes manifestaciones del área que deberían estar implicadas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la medida del área, a saber:

1. *El área como cantidad de plano ocupado por la superficie:* Se trabaja por medio de tareas de comparación de áreas de superficies con el uso, únicamente, de procedimientos de naturaleza geométrica, donde el número está ausente de cualquier razonamiento. Es la primera manifestación con la que los alumnos deben estar relacionados.

2. *El área como magnitud autónoma:* Se entiende como el área disociada de la forma de la superficie y del número que la mide. Se trabaja por medio de procedimientos de naturaleza geométrica y de naturaleza numérica, en tareas de comparación de áreas de superficies que permiten observar que superficies con forma diferente pueden tener igual área. Se considera que la disociación del área del número que la mide es clave en la comprensión del papel que juega la unidad de medida, y en consecuencia en la comprensión del proceso de medida. Es la segunda manifestación con la que deben relacionarse los alumnos.

3. *El área como número de unidades de recubren la superficie:* Involucra la comprensión del papel que juega la unidad de medida en el cálculo de áreas. Estudiar esta manifestación del área permite enfrentarse al estudio del área como resultante del producto entre magnitudes lineales. Se trabaja realizando tareas de medición basadas en la comparación del área de la superficie cuya área se desea medir con la considerada como unidad. La medida del área se corresponde con el número procedente de un recuento o conteo del número de unidades (o fracción de ésta) que recubren exactamente la superficie. Es la tercera manifestación con la que deben relacionarse los alumnos.

4. *El área como producto de dos dimensiones lineales:* Se trabaja realizando tareas de cálculo de áreas de superficies poligonales que puedan ser descompuestas en rectángulos y/o triángulos, utilizando para ello la fórmula para el cálculo del área de estos polígonos. Es la última manifestación con la que deben relacionarse los alumnos.

Las cuatro manifestaciones del área contemplan la utilización de procedimientos diversos y de distinta naturaleza. Consideramos que el establecimiento de conexiones entre estos procedimientos de naturaleza geométrica y numérica puede contribuir a desarrollar una comprensión más conectada de la medida del área, pues la utilización de dichos procedimientos permite recurrir a cambios de registros (conversiones) al resolver tareas de medida y/o comparación de áreas. La Figura 1 esquematiza lo mencionado.

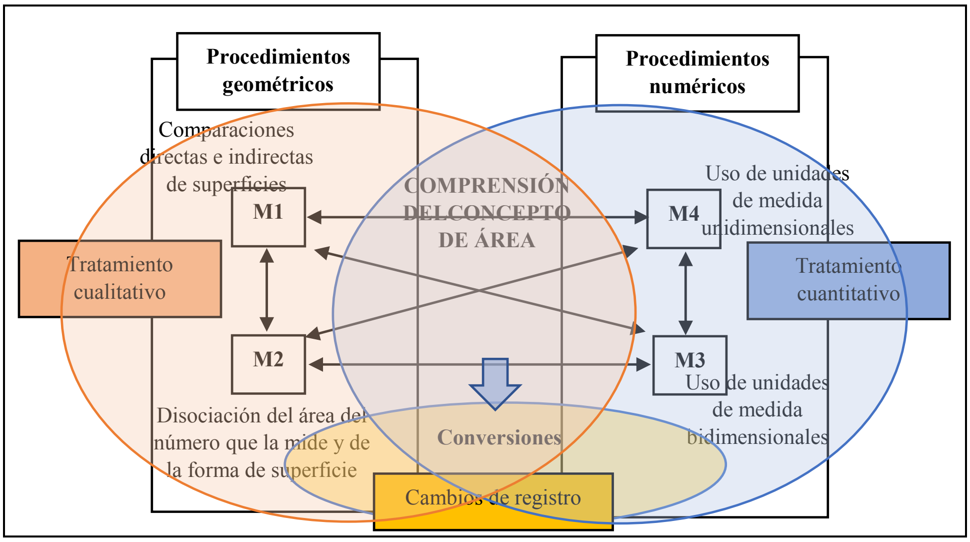


Figura 1. Esquema de la comprensión conectada del concepto de área basándose en manifestaciones del área

Aclaramos que al hablar de superficie nos referimos al espacio bidimensional entre límites específicos, y al hablar de área nos referimos a la medida de la superficie.

MÉTODO

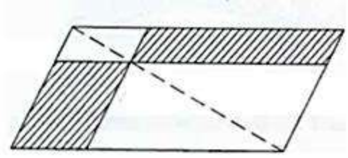
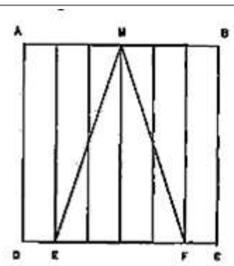
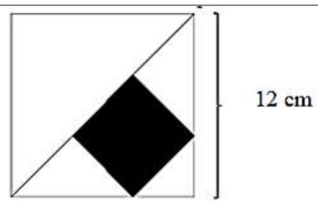
Participantes y contexto

En esta investigación participaron 64 EPM que cursaban su segundo año del grado de Educación Primaria en la Universidad Autónoma de Barcelona. Los EPM habían estudiado en su primer año temas de geometría, incluyendo la medida del área.

Instrumento y procedimiento

Se diseñó un cuestionario no estructurado que constaba de tres tareas de medida y comparación de áreas de superficies planas (Tabla 1). Las tareas 1 y 2 fueron adaptadas de Corberán (1996) y solicitaban el uso de dos procedimientos diferentes, uno con cálculo y otro sin cálculo. La tercera tarea la diseñan los investigadores, a partir de una obra de Theo van Doesburg (García-Honrado, Clemente, Vanegas, Badillo y Fortuny, 2018; Pimm, 2001) y solicitaba el uso de tres procedimientos diferentes y a elección de los estudiantes. Cada una de las tareas solicitaba justificar los resultados con base en los procedimientos utilizados. Los EPM se reunieron en parejas para resolver el cuestionario y se les hizo entrega de instrumentos de medición (reglas y escuadras) a fin de que los utilizaran de la forma que estimaran conveniente.

Tabla 1. Tareas propuestas a los estudiantes para maestro

Enunciado de cada tarea propuesta a los EPM	*Gráfica de las tareas*
Por un punto de la diagonal del paralelogramo se trazan las paralelas a los lados de esta figura. ¿Qué relación puedes establecer entre las áreas de las superficies sombreadas que resultan de trazar las paralelas? Utiliza dos procedimientos diferentes, uno con cálculo y otro sin cálculo, para justificar la relación establecida. Recuerda justificar tus respuestas considerando los procedimientos utilizados.	
El cuadrado ABDC se ha dividido en seis bandas rectangulares iguales. Utiliza dos procedimientos diferentes para justificar que las áreas de las figuras AMED, MEF y MBCF son equivalentes. Justifica tus respuestas considerando los procedimientos utilizados.	
Calcula el área del cuadrado negro utilizando tres procedimientos diferentes de tu elección. Justifica tus respuestas teniendo como referencia los tres procedimientos utilizados.	

Análisis

Como un primer paso para el análisis y con el fin de poder identificar qué manifestaciones del área estaban siendo utilizadas por cada pareja, revisamos cada uno de los procedimientos y justificaciones proporcionadas por los EPM. Una vez identificadas las manifestaciones del área involucradas en cada resolución, se establecieron 3 niveles para indicar el grado de conexión entre las manifestaciones del área: (1) Conexiones primitivas: los procedimientos para medir y comparar áreas son únicamente numéricos con uso de fórmulas; (2) Conexiones emergentes: los procedimientos para medir áreas son de tipo numérico con uso de fórmulas, sin embargo, para establecer relaciones entre áreas se utilizan procedimientos geométricos; y (3) Conexiones más elaboradas: los procedimientos para medir y comparar áreas son de tipo geométrico y numérico. Un segundo paso fue identificar el número de conversiones. Debido a que las manifestaciones del área se conectan por medio de los procedimientos utilizados (geométricos y numéricos), las conversiones se dan en aquellos casos donde se evidencia la presencia de más de una manifestación del área. Se consideraron las resoluciones de 29 de las 32 parejas, debido a que 3 de las parejas no resolvieron las tres tareas según lo solicitado, pues sólo hicieron uso de un procedimiento para cada tarea y no proporcionaron justificaciones de los procedimientos utilizados.

Nivel 1: Conexiones primitivas entre manifestaciones del área: En este nivel las parejas de EPM se inclinan exclusivamente por el uso de cálculos rutinarios para medir áreas (ver Figura 2). Se evidencia una tendencia generalizada de los EPM a aplicar la fórmula del área cuando se tienen las medidas de longitud de las figuras. En caso de no tener las medidas de longitud, una mayoría se inclina por obtenerlas al medir con la regla. En este nivel los EPM no hacen uso de procedimientos de naturaleza geométrica o naturaleza numérica con uso de unidad de medida bidimensional que impliquen, por ejemplo, el recubrimiento de superficies y la relación entre la unidad de medida y la superficie a medir. En este caso, las conexiones se dan sólo entre los procedimientos numéricos asociados al área como producto de dos dimensiones lineales, sin involucrar las otras manifestaciones del área. Las conexiones entre los procedimientos numéricos se apoyan en las descomposiciones ya hechas de las figuras.

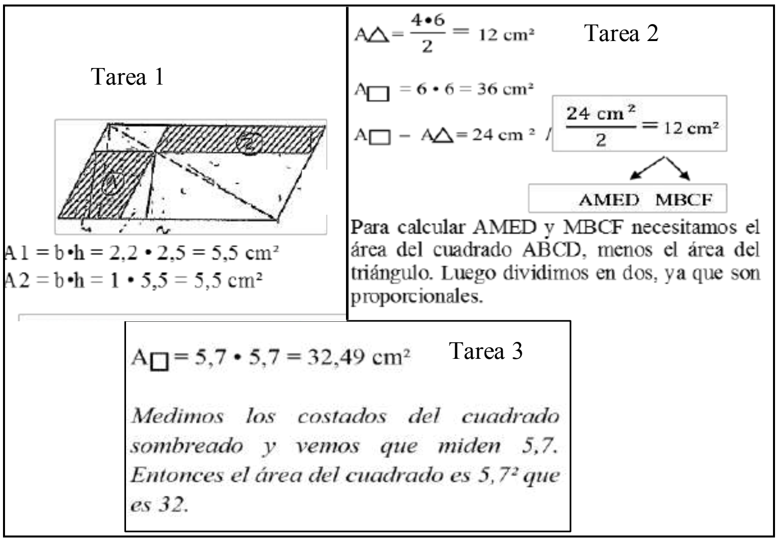


Figura 2. Ejemplos de resoluciones para el Nivel 1

Nivel 2: Conexiones emergentes entre manifestaciones del área: En este nivel las parejas de EPM se inclinan por el uso de cálculos rutinarios para medir áreas, no obstante, recurren a procedimientos de naturaleza geométrica para establecer relaciones entre las áreas de las superficies que se quieren comparar (ver Figura 3). Los EPM son capaces de identificar relaciones de equivalencia entre las figuras que pueden componer una superficie (triángulos, rectángulos y cuadrados), pero al momento de medir las áreas necesitan recurrir al uso de fórmulas. Además, identifican la propiedad de conservación del área, disociando el área de la forma de la superficie y del número que la mide. Los EPM que se encuentran en este nivel logran utilizar estrategias de recubrimiento de superficies y relacionar la unidad de medida con la superficie a medir. Así, relacionan las manifestaciones 3 y 4 del área y en algunos casos (como en la Tarea 3 de la Figura 3) incluyen la manifestación 2 del área al realizar descomposiciones convenientes de superficies para facilitar la medida del área.

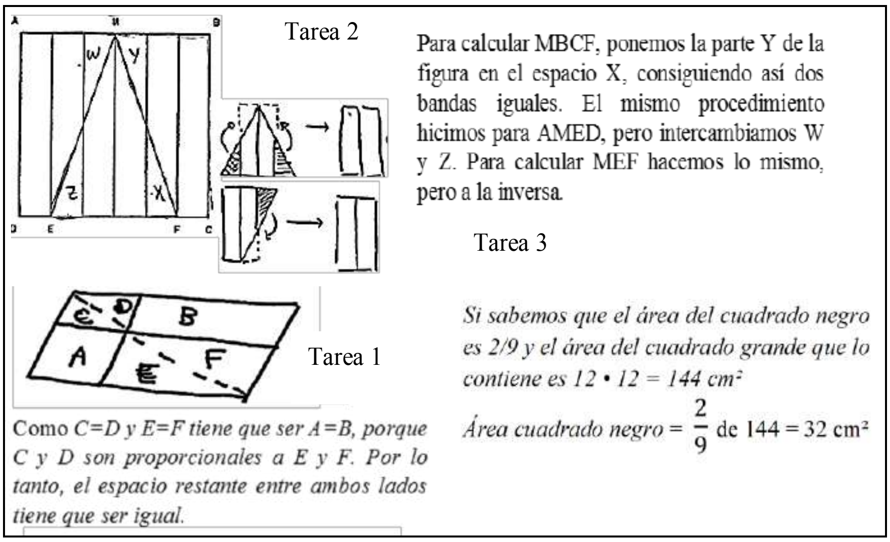


Figura 3. Ejemplos de resoluciones para el Nivel 2

Nivel 3: Conexiones más elaboradas entre manifestaciones del área: En este nivel las parejas de EPM pueden utilizar cálculos rutinarios para medir áreas, y además recurrir (sin problemas) a procedimientos de tipo geométrico estableciendo relaciones de equivalencias entre las figuras que pueden componer una superficie (triángulos, rectángulos y cuadrados), comparando y midiendo áreas sin llegar a calcularlas (ver Figura 4). Además, en las justificaciones se consideran los elementos matemáticos de los que puede depender el área de una superficie como longitud de los lados, número de unidades cuadradas que recubren una superficie, entre otros. Los estudiantes que se encuentran en este nivel son capaces de establecer relaciones entre los procesos que se ven implicados en la medición del área. Logran utilizar estrategias de recubrimiento de superficies y relacionar la unidad de medida y a superficie a medir. Además, son capaces de disociar el área de la forma de la superficie y del número que la mide e identificar que superficies diferentes en forma pueden tener igual área. Este nivel implica el uso de las 4 manifestaciones del área.

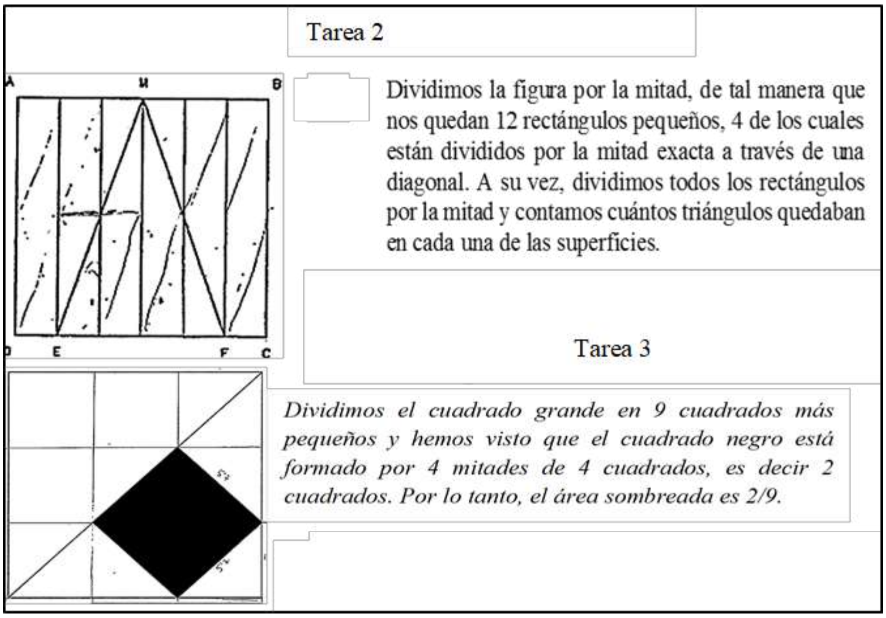


Figura 4. Ejemplos de resoluciones para el Nivel 3

RESULTADOS

Las estrategias observadas en las tres tareas muestran similitudes, tanto en los procedimientos como en las justificaciones. La estrategia más utilizada en las tres tareas es *la medición de longitudes y uso de fórmulas*, donde las parejas de EPM miden con la regla los costados de las figuras para obtener la medida de sus longitudes y posteriormente hacer uso de la fórmula que permite obtener la medida del área. Le sigue la estrategia de *estimación visual basada en la relación entre los triángulos* y la estrategia de *reconfiguración por complementariedad de trozos*. Mientras la primera implica la equivalencia de triángulos a partir de la "observación", es decir, los EPM justifican la igualdad de triángulos "al ojo", en la segunda se requiere establecer relaciones de equivalencia por medio de la unión de partes, en superficies que ya presentan una descomposición previa. También se identificaron la estrategia de *comparación indirecta*, que implica recortar una superficie y recomponer sus partes en una nueva forma sin superponerlas, la estrategia de *comparación directa* que implica superponer una superficie sobre otra para encontrar relaciones de equivalencia, y la estrategia de *descomposición de superficies* que consiste en descomponer una superficie en unidades congruentes y luego contarlas. La Tabla 2 muestra el número de EPM que utilizan cada estrategia.

Por otro lado, debido a que el cuestionario solicitaba de forma obligada el uso de dos procedimientos diferentes, uno con cálculo y otro sin cálculo, la gran mayoría de las parejas se encuentran en los niveles 1 y 2 de conexiones entre manifestaciones del área. Los procedimientos geométricos utilizados apoyan a los procedimientos numéricos que les preceden. De esta manera, los EPM los utilizan para confirmar los cálculos realizados. Una minoría de parejas se encuentran en el nivel 3 de conexiones entre manifestaciones del área, lo cual indica que existen dificultades para medir y/o comparar áreas cuando no hay un valor numérico asociado. Considerando las estrategias y los niveles establecidos, identificamos las conexiones intra matemáticas, concordando con el marco propuesto por De Gamboa y Figueiras (2014), encontrando conversiones para los niveles 2 y 3, pues en estos niveles se identifica la presencia de más de una manifestación del área al utilizar procedimientos de distinta naturaleza. La Tabla 3 muestra el número de parejas de EPM por nivel y el número de parejas de EPM que evidencia conversiones en sus resoluciones.

Los cambios de registro observados en las resoluciones de cada tarea muestran similitudes en cuanto a los procedimientos utilizados por cada pareja. A pesar de que el cuestionario demandaba el uso de procedimientos geométricos y numéricos, sólo 21 de 29 parejas evidencian conversiones en todas sus resoluciones y/o justificaciones, pues utilizan para cada una de las tareas procedimientos de naturaleza geométrica (mayormente apoyándose en las descomposiciones ya hechas) y numérica.

Tabla 2. Número de parejas que utilizan cada estrategia en las 3 tareas

	Estrategias utilizadas por los EPM en la resolución de cada tarea	*Parejas que la utilizan de forma correcta*	*Parejas que la utilizan de forma incorrecta*
Tarea 1	1.1. Comparación indirecta por recorte y pegado	1	0
	1.2. Comparación directa por superposición	6	2
	1.3. Estimación visual basada en la relación entre los triángulos	24	1
	1.4 Medición de longitudes y uso de fórmulas	26	1
Tarea 2	2.1. Reconfiguración por complementariedad de trozos	29	0
	2.2. Descomposición conveniente de superficies y recuento de unidades	1	0
	2.3 Medición de longitudes y uso de fórmulas	28	0
Tarea 3	3.1. Descomposición conveniente de superficies y recuento de unidades	5	0
	3.2 Medición de longitudes y uso de fórmulas	29	0

Tabla 3. Parejas de EPM que se ubican en cada nivel por tarea y número de parejas que evidencian conversiones en sus resoluciones

	Número de parejas de EPM en cada nivel		
	Tarea 1	*Tarea 2*	*Tarea 3*
Nivel 1: Conexiones primitivas entre manifestaciones del área	26	28	29
Nivel 2: Conexiones emergentes entre manifestaciones del área	21	28	21
Nivel 3: Conexiones más elaboradas entre manifestaciones del área	3	5	5
Conversiones	26	29	21

DISCUSIÓN

Al analizar los procedimientos y/o justificaciones realizadas por cada pareja de EPM, es posible evidenciar que existe una tendencia generalizada a asociar el área con el uso de fórmulas, aun cuando esta estrategia implica una mayor cantidad de tiempo para resolver cada tarea. No obstante, es posible evidenciar que a pesar de que los estudiantes conocen la fórmula de memoria (largo por ancho) y pueden aplicarla fácilmente y con éxito cuando dos longitudes les son dadas, este proceso les presenta un mayor grado de dificultad cuando no conocen una o ambas de sus longitudes (en este caso, se inclinan a obtenerlas utilizando una regla graduada). Un ejemplo de esto se evidencia en la Tarea 3, donde sólo 5 parejas de EPM, además de utilizar procedimientos numéricos, logran utilizar procedimientos de carácter geométrico (descomposición de la superficie en partes, o fracción de partes, congruentes) para estimar el área de la superficie del cuadrado negro, y establecer relaciones entre el área de la superficie del cuadrado negro, el área de triángulos y el área del cuadrado grande, facilitando así el proceso de medida del área. De forma similar, en la Tarea 2 sólo una pareja puede utilizar procedimientos geométricos, vinculados a la descomposición de superficies en partes congruentes, en conjunto con un procedimiento numérico que implique el uso de fórmulas para calcular áreas. De esta manera, se advierte que la comparación de áreas en un contexto numérico resulta más sencilla para los EPM, que hacerlo en un contexto geométrico, pues sólo comparan valores numéricos sin considerar las características de las superficies que se están comparando

Considerando que la gran mayoría de EPM se ubica en un Nivel 1 y 2 de conexiones entre manifestaciones del área, se evidencian dificultades en cuanto al conocimiento de los elementos matemáticos (descomposición de superficies en partes congruentes, conservación del área, congruencia aditiva, papel de la unidad de medida, entre otros) involucrados en la medida del área. Dichas dificultades ocasionan que los EPM se inclinen mayoritariamente por el uso de cálculos para medir y/o comparar áreas estableciendo pocas conexiones matemáticas, pues los procedimientos utilizados son de una misma naturaleza. Por esta razón consideramos que trabajar las 4 manifestaciones del área vendría a promover el establecimiento de conexiones matemáticas, pues su consideración conlleva de forma implícita el uso de diferentes registros, asociados a procedimientos de naturaleza geométrica y numérica, que se ven relacionados en la resolución de una tarea matemática que implica medir y comparar áreas, y que se evidencia en los niveles descritos en el análisis. En este sentido, a fin de promover un aprendizaje conectado sobre el concepto del área, creemos necesario trabajar con diferentes estrategias que permitan el uso de procedimientos geométricos y numéricos, considerando las posibles relaciones que se pueden establecer entre éstos.

CONCLUSIONES

Los resultados de esta investigación refuerzan los de Simon y Blume (1994) y Baturo y Nason (1996) al observar que una gran cantidad de EPM muestran un conocimiento poco comprensivo del concepto de área, asociándolo mayoritariamente al uso de fórmulas para su cálculo y presentando dificultades para medir áreas cuando no existe un valor numérico asociado. Además, cuando no se dispone de forma explícita de una medida lineal para el cálculo del área, los EPM tienen tendencia a utilizar instrumentos de medida de forma directa en detrimento de procedimientos de carácter deductivo. En este sentido, aunque las manifestaciones del área propuestas por Corberán (1996) ayudan a explicar la comprensión del concepto de área a partir de acciones sobre objetos concretos hasta la utilización de fórmulas, se produce la paradoja de que al alcanzar el nivel más abstracto del conocimiento del área, esta tiende a despojarse de su esencia geométrica.

Los tres niveles que determinamos para clasificar las conexiones matemáticas sugieren la necesidad de incorporar en la formación de maestros tareas que permitan a los EPM trabajar diferentes estrategias para medir y comparar áreas, a fin de que puedan construir un conocimiento más conectado en relación al concepto de área, y puedan establecer conexiones matemáticas por medio de cambios de registros asociados a los distintos tipos de procedimientos que se ven involucrados. En particular, se hace necesario que los EPM puedan revisar sus concepciones del área utilizando registros geométricos, numéricos y algebraicos, que le permitan proponer y gestionar en su actividad profesional actividades que promuevan en los alumnos la concepción profunda del concepto de área y el uso estratégico de las fórmulas. Además, una comprensión profunda del concepto de área puede ser la base sobre la que los EPM construyan un conocimiento conectado del volumen de cuerpos geométricos.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Baturo, A. y Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics, 31*(3), 235-268.

Businkas, A. M. (2008). *Conversation about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* (Tesis doctoral no publicada). Universidad Simon Fraser, Burnaby, Canadá.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: Middle East Technical University y ERME.

Corberán, R. M. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valencia, Valencia.

D'Amore, B. y Fandiño, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *RELIME*, *10*(1), 39-68.

De Gamboa, G., Badillo, E. y Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en educación primaria. *PNA*, *10*(1), 1-24.

De Gamboa, G. y Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). Salamanca: SEIEM.

Douady, R. y Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20*(4), 387-424.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

García-Honrado, I., Clemente, F., Vanegas, Y., Badillo, E. y Fortuny, J. M. (2018). Análisis de la progresión de aprendizaje de una futura maestra. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 231-240). Gijón: SEIEM.

Huang, H-M. E. y Witz, K. G. (2013). Children's conceptions of area measurement and their strategies for solving area measurement problems. *Journal of Curriculum and Teaching, 2*(1), 10-26.

Outhred, L. N. y Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 144-167.

Pimm, D. (2001). Some notes on Theo van Doesburg (1883-1931) and his *Arithmetic Composition 1*. *For the learning of Mathematics, 21*(2), 31-36.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. En Á. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research of the Psychology of Mathematics Education*: *Past, Present and Future* (pp. 461-494). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishing.

Simon, M. A. y Blume, G. W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 472-494.

[xx] Estudio financiado por EDU2015-65378-P, MINECO/FEDER, y GIPEAM, SGR-2017-101, AGAUR.