Desarrollar las competencias de resolución de problemas y modelización para aprender matemáticas

Develop problem solving and modelling competences to learn mathematics

Jordi Deulofeu Piquet[a], Abraham de la Fuente Pérez[b]
[a] *Universitat Autònoma de Barcelona,*
[b] *Universitat Autònoma de Barcelona y Institut Angeleta Ferrer*

Resumen

Un currículum como el que se acaba de aprobar es una oportunidad para reflexionar sobre los grandes objetivos de las matemáticas escolares, las ideas clave y el papel de las actividades en el aula para un aprendizaje competencial. En este currículum la resolución de problemas y la modelización aparecen como competencias específicas y por lo tanto como objetivos fundamentales de aprendizaje, además de considerarlas también como procesos que permiten aprender matemáticas. El capítulo se centra en estas dos competencias, distinguiendo entre aprender a resolver problemas matemáticos y aprender matemáticas resolviendo problemas. El enlace con la modelización se realiza desde el análisis de los distintos contextos y su interés tanto para construir las matemáticas como para aplicarlas a una variedad de situaciones. A lo largo del capítulo se introducen ejemplificaciones tanto de situaciones-problema como de su gestión en el aula.

Palabras clave: Competencias matemáticas, Resolución de problemas, Modelización, Contextos, Actividades de aprendizaje de las matemáticas.

Abstract

A competency-based curriculum such as the one that has just been approved is an opportunity to reflect on the main objectives of school mathematics, the key ideas, and the role of classroom activities for competency-based learning. In this curriculum, the resolution problem solving and modeling appear as key competencies. The chapter focuses on these two competencies, distinguishing between learning to solve mathematical problems and learning mathematics by solving problems. The link with modeling is made from the analysis of the different contexts and their interest both to build mathematics and to apply them to a variety of situations. Throughout the chapter, we introduce exemplifications of both problem situations and suggestion in the classroom.

Keywords: Mathematical competences, Problem solving, Modeling, Contexts, Mathematics learning activities.

Introducción

La publicación de un nuevo currículum es una buena oportunidad para reflexionar sobre los objetivos de la educación en nuestro país y de cada una de las disciplinas, así como sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de estas. Este cambio curricular, significativo porque se centra en la adquisición de competencias, coincide con el XXV aniversario de la SEIEM. Por lo tanto es un buen momento para mirar hacia atrás y reflexionar con cierta perspectiva sobre el conjunto de aportaciones que, desde la investigación en didáctica, se han realizado durante este tiempo en el marco de esta sociedad y, en particular, en los simposios anuales de la misma y que, por diversas circunstancias, quizá no han trascendido lo suficiente a todo el profesorado de matemáticas que es quien, en última instancia, debería poder utilizar los resultados de estas investigaciones, para lograr que el conjunto de aportaciones redunden en una mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Partimos del enfoque competencial en el cual, como dicen Niss y Højgaard (2019), lo importante no es sólo lo que sabes, sino cómo lo sabes y lo que puedes hacer con lo que sabes. En este marco, el capítulo se dedica a dos grandes competencias matemáticas como son la resolución de problemas y la modelización, y tiene como objetivo mostrar una panorámica de las mismas para ayudar a interpretar el enfoque competencial del nuevo currículum, tanto de Educación Primaria como de Educación Secundaria (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022a, 2022b); nos apoyamos en trabajos relevantes sobre el tema en el marco de la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

En el segundo simposio de la SEIEM una ponencia abordó la importancia de la resolución de problemas (Callejo y Carrillo, 1998), y diez años después en el simposio de Badajoz (Luengo et al., 2008) se dedicó un seminario a la resolución de problemas, con ponencias de Castro, Matos y Santos Trigo y coordinación de Luis Puig. Este, en su texto de presentación, realizó una interesante retrospectiva cuyo título *Presencia y ausencia de la resolución de problemas, en la investigación y en el currículum* (Puig, 2008), ya da a entender que la resolución de problemas, a pesar de su relevancia, no ha tenido una presencia sostenida ni en la investigación didáctica ni en el currículum, y solo se ha tratado con cierta profundidad en periodos concretos. Las causas de este hecho son múltiples y complejas, pero estamos convencidos de que, con la introducción de un modelo competencial, la resolución de problemas va a volver a tener un papel relevante, como contenido y también como uno de los ejes de la enseñanza de las matemáticas, puesto que en todos los modelos de tipo competencial la resolución de problemas tiene el carácter de competencia fundamental.

Más recientemente, en el simposio de la SEIEM de Valladolid (Marbán y otros, 2019), se dedicó un seminario a la modelización, con ponencias de Carreira, Ferrando y Greefrath. La coordinadora del seminario, Berta Barquero, en su ponencia *Perspectivas internacionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática*

(Barquero, 2019), plantea algunos de los logros relacionados con la modelización, como su caracterización como competencia y, sobre todo, su inclusión a lo largo de nuestro siglo en diversos proyectos, como PISA (OECD, 2019) y también en los currículums de diversos países. Pero al mismo tiempo, señala algunas dificultades, como la brecha entre los avances de la investigación y el impacto efectivo de la misma en las aulas, la compatibilidad con la evaluación o las posibilidades de difusión de dicha investigación en la formación del profesorado, entre otros. También plantea algunas preguntas relevantes, como el papel de la modelización en cada país, el debate sobre su significado y sobre su enseñanza-aprendizaje, el impacto en las reformas curriculares y las investigaciones llevadas a la práctica.

En este capítulo se hará referencia a la resolución de problemas como competencia específica y como guía del proceso de enseñanza de las matemáticas. Se seguirá con la competencia de modelización, destacando el papel de los contextos al aprender matemáticas, entendidos como el origen de las situaciones a modelizar, pero también como apoyo a la construcción de conceptos matemáticos, lo que permite relacionar resolución de problemas y modelización con sus puntos de contacto y sus diferencias. Se acabará con una breve referencia a la evaluación de la resolución de problemas.

Queremos finalizar esta introducción recordando a dos de los principales investigadores de la SEIEM en el ámbito de la Resolución de Problemas que nos han dejado en los últimos tiempos: Mari Luz Callejo y Pepe Carrillo, a quienes dedicamos este trabajo. Muchas de sus investigaciones constituyen aportaciones muy relevantes no sólo en resolución de problemas sino también en el desarrollo profesional de docentes y la formación del profesorado de matemáticas.

Las competencias como centro del currículum

La enseñanza efectiva de las matemáticas requiere entender qué sabe el alumnado y qué necesita aprender y, a partir de esta información, provocarlo, estimularlo y acompañarlo para que realice un buen aprendizaje. El alumnado debe entender las matemáticas que va aprendiendo, debe poder construir nuevo conocimiento activamente a partir de sus experiencias y de sus conocimientos anteriores, estableciendo unas conexiones que lo incorporen en su red personal de saberes.

Así pues, un currículum de matemáticas debería responder a las preguntas: ¿qué matemáticas queremos que aprendan nuestros alumnos? ¿Por qué queremos que aprendan esas matemáticas? ¿Cómo las deben aprender? ¿Cuándo y cómo se debe llevar a cabo su enseñanza? ¿Qué resultados muestran el logro de los aprendizajes? La actual propuesta de currículum del Estado Español (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022a, 2022b) tiene como punto de partida en su diseño, desarrollo e implementación en el aula, la alfabetización matemática:

> “La alfabetización matemática es la capacidad de un individuo de razonar matemáticamente y de formular, emplear e interpretar las matemáticas para resolver problemas en una amplia variedad de contextos de la vida real. Esto incluye conceptos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a conocer el papel que cumplen las matemáticas en el mundo y hacer los juicios y tomar las decisiones bien fundamentadas que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos del siglo XXI.” (OECD, 2021, p.11).

Esta definición supone que, al terminar la etapa obligatoria, los estudiantes deberán ser capaces de usar su conocimiento de los contenidos matemáticos para reconocer la naturaleza matemática de una situación (problema), especialmente de aquellas situaciones que forman parte de la vida real, y luego formularla en términos matemáticos. El proceso de matematización de un problema implica transformar una situación confusa y ambigua de la vida real en un problema matemático bien definido. Esto exige un razonamiento matemático. El problema matemático resultante necesita resolverse usando los procedimientos, algoritmos y conceptos matemáticos aprendidos, pero será necesario tomar decisiones estratégicas sobre la selección de estas herramientas y el orden de su aplicación, para lo cual también se recurre al razonamiento matemático. El proceso de matematización termina con la necesidad del estudiante de evaluar la solución matemática interpretando los resultados en la situación original de la vida real.

En coherencia con las ideas anteriores y de acuerdo con Niss y Højgaard (2011), el currículum estructura esta alfabetización a través de la competencia matemática, es decir, de la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos matemáticos y no matemáticos. Y tanto la resolución de problemas como la modelización son competencias específicas en la categorización que hacen Niss y Højgaard (2019) de la competencia matemática.

La resolución de problemas como competencia específica y objeto de aprendizaje

Dentro del marco de competencias descrito en el punto anterior, la resolución de problemas ocupa un lugar destacado que se expondrá y justificará en este apartado. Para ello se hará referencia a la importancia de los problemas, tanto para las matemáticas como para la Educación Matemática, para seguir con la idea de problema que se maneja en este capítulo y que es similar a la utilizada en el currículum. En el último punto de este apartado, se aborda el desarrollo de la resolución de problemas con las competencias y los contenidos asociados, y se ejemplifica la que se considera que es la parte más relevante de este proceso: la búsqueda de un camino para resolver un problema, para lo cual se toma en consideración el desarrollo de herramientas y estrategias heurísticas.

Aprender a resolver problemas, ¿para qué?

En cualquier currículum basado en la adquisición de competencias matemáticas o en el desarrollo de los procesos fundamentales de estas, la resolución de problemas ocupa un lugar destacado e indispensable, y esto es así por distintos motivos, todos ellos relevantes para una educación matemática de calidad: su importancia para las matemáticas, para la educación matemática y para la formación personal y profesional de las personas.

En un conocido artículo sobre el papel de los problemas en las matemáticas, Halmos decía:

> "¿En qué consisten realmente las matemáticas? ¿En axiomas, como el postulado de las paralelas? ¿En teoremas, como el teorema fundamental del álgebra? ¿En conceptos, en definiciones, en teorías, en fórmulas, en métodos? La matemática seguramente no existiría sin todos estos ingredientes, todos son esenciales, pero ninguno de ellos es el corazón de la disciplina, puesto que la principal razón de existir de un matemático es resolver problemas y, por lo tanto, en lo que realmente consiste la matemática es en [plantear] problemas y [encontrar sus] soluciones" (Halmos,1980, p.519).

De modo parecido podríamos plantearnos cuál es el lugar de la resolución de problemas en la educación matemática, y preguntarnos por qué la resolución de problemas tendría que ser el núcleo de la enseñanza de las matemáticas.

En este sentido, entendemos que un trabajo en el aula donde la resolución de problemas ocupe un lugar relevante contribuye a lograr, entre otros, los siguientes objetivos:

- Ayudar a los alumnos a progresar en su autonomía a través del planteamiento de problemas que les lleven a tomar decisiones, a comprender las informaciones que reciben, a ser críticos con aquello que se les presenta y con aquello que hacen, y a ser creativos para encontrar caminos que proporcionen vías para diseñar estrategias de resolución.
- Desarrollar la mayoría de las grandes competencias de las matemáticas como pensar, razonar, modelizar, utilizar técnicas, comunicar y argumentar, así como contribuir a una construcción significativa del conocimiento matemático propio.
- Mostrar lo que son realmente las matemáticas y crear interés por ellas como parte importante del conocimiento generado por la humanidad, relevante tanto por él mismo como por sus aplicaciones.
- Dar sentido al hecho de plantearse problemas y al reto que supone tratar de resolverlos, en un sentido amplio, útil y necesario para el desarrollo tanto personal como profesional de una persona.

Si se aceptan los objetivos anteriores como aspectos nucleares de la educación matemática, pronto surgen diversas preguntas desde el punto de vista didáctico:

– ¿Qué problemas son adecuados en las diferentes etapas y en qué momentos del proceso de aprendizaje será más adecuado plantearlos?
– ¿Cómo hay que introducir y gestionar en el aula las actividades centradas en la resolución de problemas?
– ¿Qué actitudes hay que favorecer en el alumnado en relación con la actividad de resolver problemas?
– En definitiva ¿qué problemas constituyen actividades de aprendizaje competencialmente ricas? y ¿cómo gestionar la clase para ayudar a los alumnos a aprender matemáticas, tanto conceptos, como técnicas y procesos, mediante la resolución de problemas?

¿Qué se entiende por problema?

La delimitación de lo que se entiende por problema es necesaria para comprender su relevancia en la formación matemática del alumnado. En este sentido es necesario empezar diciendo que los problemas escolares estándar -caracterizados por un enunciado verbal que contiene de manera explícita los datos necesarios para su resolución y solo estos, cerrados, es decir, de solución y método único y planteados de modo que el alumno debe identificar cuál es ese método, que ha sido previamente enseñado a menudo justo antes de proponer el supuesto problema- no son auténticos problemas de matemáticas, porque lo que se pretende con ellos es que el alumnado los resuelva por clasificación, y tienen la finalidad de comprobar si se conocen e identifican las técnicas necesarias para ello.

Para concretar lo que se entiende por problema, se parte de lo que expresa Polya (1964) cuando dice que la idea de problema es amplia y, sobre todo, que tratar de resolver un problema es buscar de manera consciente un camino para lograr un objetivo claramente concebido, pero no accesible de modo inmediato. Y de manera consecuente, el punto central para *resolver un problema* es encontrar este camino.

Avanzando un poco más, cuando se hace referencia a un problema para el aula de matemáticas, surgen otros elementos necesarios relacionados con el aprendizaje. En este sentido partimos de la siguiente caracterización:

> "Una situación, planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al alumno o grupo de alumnos que intenta resolverla, porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o de un proceso que identifique automáticamente los datos con la conclusión, y por lo tanto deberá buscar, investigar, establecer relaciones, implicar sus afectos, etc… para afrontar una situación nueva." (Vila y Callejo, 2004, p.31).

Hay un elemento que se revela como esencial en la definición anterior: una actividad matemática para el aula puede ser un problema para un alumno y no serlo para otro, por lo que hay un cierto carácter subjetivo, no absoluto, que es necesario tener en cuenta. También el momento en el que se introduce la actividad puede hacer que esta sea realmente un problema o no.

¿Qué debería abordar el desarrollo del proceso de resolución de problemas?

Como se verá más adelante, la resolución de problemas es algo más que un conjunto de competencias matemáticas puesto que puede constituir un organizador de la enseñanza. Sin embargo, conviene plantearse si debe existir un aprendizaje explícito de la resolución de problemas.

En el seminario de la FESPM realizado en Madrid y en Castro Urdiales en 2017 (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, 2018) dedicado a la resolución de problemas, se consideraron los principales objetivos de la enseñanza de la resolución de problemas que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Objetivos de la enseñanza de la resolución de problemas (FESPM, 2018)

Elaborar, desarrollar y utilizar razonamientos y técnicas heurísticas como herramientas para la resolución de problemas. 1. Llegar a ser consciente de los procesos de razonamiento que se desarrollan al resolver problemas mediante la heurística y saber gestionar dichos procesos. 2. Considerar que la resolución de un problema no finaliza cuando se obtiene la solución, sino tras la fase de revisión y extensión del proceso realizado. 3. Adoptar una postura crítica ante los mensajes, informaciones y situaciones diversas, aplicando el estilo heurístico de resolución de problemas para analizarlos, confrontarlos, sacar conclusiones y tomar las decisiones más adecuadas. 4. Generar y elaborar ideas, planes y todo tipo de recursos personales para la resolución de problemas, practicando y reflexionando sobre distintas técnicas que ayuden a desarrollar la creatividad. 5. Mostrar actitudes propias de la actividad matemática: recogida, exploración y clasificación ordenada de la información, cuestionamiento y crítica constante, flexibilidad y apertura para aceptar otras ideas debidamente argumentadas y capacidad de comunicar resultados y procesos. 6. Conocer y valorar las propias habilidades y aptitudes para la resolución de problemas afrontando y superando los bloqueos propios del proceso de resolución.

Aunque la formulación es distinta, existe una clara relación entre las competencias específicas de matemáticas del nuevo currículum y los objetivos mencionados en la tabla 1 y se defiende que estos mantienen su validez en relación a la resolución de problemas. En concreto, aquellas competencias del currículum que se refieren de forma específica al proceso de resolver problemas se relacionan con las distintas fases de dicho proceso, desde la lectura y comprensión del enunciado hasta la revisión de las soluciones, pasando por el diseño de un plan de acción y su correspondiente aplicación.

Por otra parte, se ha comentado en el punto anterior que una característica clave en la resolución de un problema es la búsqueda de un camino, un plan, que posibilite su resolución. Centrarse en el aprendizaje de este proceso (objetivos 1 y 2) significa fundamentalmente posibilitar la práctica de las principales heurísticas, planteando problemas que muestren el valor de estas y que las expliquen, especialmente en aquellos casos que es posible realizar un trabajo específico para su desarrollo.

Para una reflexión sobre las heurísticas y su carácter de herramientas para resolver un problema nos remitimos al libro *Elementos de resolución de problemas* (Puig, 1996). Así mismo, en la tabla 2 mostramos una lista de algunas de las heurísticas clasificadas en dos grupos: aquellas de carácter general que difícilmente pueden enseñarse de manera explícita, pero que sí pueden practicarse y aprenderse y que llamamos estrategias heurísticas y aquellas más concretas, que llamamos herramientas heurísticas por entender que admiten una enseñanza concreta.

Tabla 2. Relación de heurísticas. Elaboración propia a partir de Polya (1945) y Puig (1996)

Estrategias heurísticas	- Realizar pruebas, experimentar con los datos y las condiciones -Utilizar ensayo y error -Realizar un trabajo sistemático -Buscar pautas o regularidades -Analizar casos particulares -Simplificar datos y condiciones -Estudiar un problema más general -Dividir el problema en partes -Relacionar el problema con un análogo conocido -Usar conceptos clave: paridad, simetría, principio del palomar -Conectar conceptos, definiciones y representaciones
Herramientas heurísticas	-Visualizar relaciones (con dibujos, y/o esquemas) -Construir tablas y diagramas de árbol para organizar y analizar los datos. -Elegir un lenguaje adecuado y/o una codificación -Introducir elementos auxiliares / escalones intermedios -Empezar por el final / suponer el problema resuelto

La extensión del capítulo no permite ejemplificar cada una de las heurísticas anteriores, pero sí proponer un problema para ver que en su resolución se pueden movilizar diversas heurísticas tanto de carácter general como herramientas específicas.

ENUNCIADO PROBLEMA. En un hotel con 100 habitaciones, numeradas del 1 al 100, hay 100 personas también numeradas del 1 al 100 que hacen el siguiente juego: el primero abre todas las puertas. El segundo cierra las puertas pares. El tercero cambia las puertas múltiplos de 3 (abre si está cerrada o cierra si está abierta), el cuarto las que son múltiplos de 4 y así hasta la última persona que solo mueve la puerta de la habitación 100. Después de pasar todas las personas, ¿qué puertas quedarán abiertas?

Sin entrar a discutir la gestión de este problema como actividad matemática para el aula, algo que se hará más adelante con otro ejemplo, en el proceso de resolución pueden surgir o utilizarse diversas heurísticas.

Una manera de empezar es ver qué sucede con las primeras puertas, es decir, *realizar pruebas, experimentar con los datos y las condiciones* y también *estudiar casos particulares*. Si se hace esto, al margen de decidir cuántas puertas se prueban, surge una cuestión: ¿cómo organizamos los datos? Esto lleva a *buscar un lenguaje/codificación adecuada* y a disponer los datos de una manera que facilite su análisis. Una posibilidad es *hacer una tabla de doble entrada*, personas / puertas. Con ello se llega a la *búsqueda de un patrón o regularidad* (números cuadrados u otros equivalentes, por ejemplo, crecimiento según los números impares: 1+3+5+7+…). Todo este proceso conduce a la posibilidad de realizar una conjetura y, para llegar aquí, han surgido cinco posibles heurísticas.

Sin duda el problema no ha finalizado: ¿es válida la conjetura?, ¿por qué son estos números? De acuerdo con Polya, con estas preguntas se provoca que se inicien en otro tipo de problemas (de demostrar), cuyas heurísticas son, en general, distintas a las anteriores y tienen relación con el razonamiento matemático, en concreto, con la argumentación, la deducción y la demostración. Aunque ya podrían haber aparecido anteriormente, es en esta parte donde aparecen las conexiones entre conceptos (en este caso: divisor, número de divisores –par o impar-, números cuadrados), sus caracterizaciones y representaciones.

Aunque en este punto se focaliza la atención en las heurísticas como contenido de aprendizaje, lo cierto es que, al elegir un problema para llevar al aula, además de las heurísticas que pone (o puede poner) en juego, hay que tener en cuenta otros factores, todos ellos relevantes, como son: el contexto del problema (o de la situación), la formulación y presentación del mismo, el tipo de problema (construcción / prueba), las posibilidades de generalización y/o de inmersión en otros problemas más amplios (campo de problemas), así como los conceptos y/o técnicas curriculares involucrados en su resolución.

Aprender matemáticas por medio de la resolución de problemas

Tanto la resolución de problemas como la modelización, que se abordará más adelante, no son únicamente competencias relevantes, sino que pueden convertirse en algo más transversal que permita diseñar una manera de desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En el aula se debe poner el foco, por un lado, en la interrogación, ya que hacer y hacerse preguntas es incluso más relevante que hallar respuestas. Y, por otro lado, en los contextos, que son necesarios tanto para construir los conceptos matemáticos de naturaleza abstracta, como para aplicarlos, juntamente con las técnicas, a otras situaciones en otros contextos distintos.

En este apartado se desarrollará la primera de estas ideas: introducir las preguntas y los problemas de manera habitual en la clase.

La resolución de problemas como ambiente para el aula de matemática

En la introducción del primer currículum de Catalunya en el que se incluyó, aunque todavía de manera poco estructurada, la idea de competencia (Departament d'Educació, 2007) se indica que la competencia matemática debe adquirirse a partir de contextos que tengan sentido, tanto para el alumnado como para el conocimiento matemático que se pretende desarrollar.

Siguiendo con esta idea, en la misma introducción se expresa que aprender con significado es fundamental para capacitar al alumnado en el uso de todo lo que aprende y para que pueda continuar aprendiendo, de forma autónoma, a lo largo de la vida. Para ello, es necesario proporcionar en todas las clases de matemáticas oportunidades para que el alumnado aprenda a pensar matemáticamente, proponiendo actividades de aprendizaje donde la resolución de problemas, en un sentido amplio, sea el núcleo de la enseñanza.

De acuerdo con Abrantes (1996) gestionar la clase de manera que en el aula haya un ambiente de resolución de problemas servirá para mostrar que los problemas son mucho más que un contenido a enseñar y también más que una competencia específica. Son una manera de enseñar matemáticas, o mejor dicho, un instrumento de aprendizaje.

En efecto, si la actividad de resolver problemas adquiere suficiente relevancia y continuidad en el conjunto de propuestas del aula de matemáticas, podremos cambiar el foco y pasar de "aprender a resolver problemas" a "aprender resolviendo problemas".

Incluso si no se ha llegado a una presencia muy elevada en el uso de problemas como actividades de aprendizaje en el aula (alcanzar este punto es una tarea larga y compleja), como expresan Vila y Callejo (2004) y también se recoge en Deulofeu y Vila (2021), un trabajo con problemas en el aula con una cierta continuidad puede ser ya algo muy valioso, si se pone el foco en desarrollar las propias capacidades del alumnado, en valorar los procesos y los progresos logrados, en discernir lo relevante de lo que no lo es, en confiar en los criterios propios y, por encima de todo, en evitar el temor a equivocarse, aceptando que los errores son indispensables para aprender, que muchas veces es necesario cambiar de punto de vista y también que es necesario revisar las creencias propias, aceptando ayudas cuando sea necesario.

Si se pretende introducir un ambiente de interrogación será necesario que las actividades de aprendizaje, así como su gestión, lo promuevan de manera constante y una de las principales consecuencias de este hecho es que en las clases las preguntas y los problemas deberán estar presentes desde el principio.

No se trata pues de enseñar conceptos y herramientas matemáticas para después aplicarlos a la resolución de problemas, sino partir de estos para ayudar a construir y dar significado a los conceptos necesarios y luego abordar otros problemas en los que se puedan usar y consolidar dichos conceptos.

Problemas para ayudar a construir conceptos y técnicas

De acuerdo con lo anterior, la selección de los problemas según su objetivo en el aprendizaje de las matemáticas resulta una tarea esencial. Arcavi (1999) mostró diversos ejemplos de las distintas funciones de los problemas como actividades para construir las matemáticas en el aula. En concreto, proponía una reflexión sobre dos problemas como los siguientes:

A) Queremos organizar una comida con las familias en la escuela y disponemos de mesas en las que caben 6 personas. Si sabemos que se han apuntado 84 personas a la comida, ¿cuántas mesas necesitaremos?

B) Una piscina de forma rectangular tiene una superficie de 84 m^2 y su anchura es de 6 metros. ¿Cuál es la longitud de la piscina?

Se trata de dos problemas que se podrían considerar estándares y cuya resolución es matemáticamente equivalente; sin embargo, para que resulten verdaderos problemas, su lugar en el proceso de aprendizaje es muy distinto. El primero puede servir para preparar la introducción de la división, si se propone antes de la enseñanza de esta: los alumnos tratarán de resolverlo por métodos informales y poco a poco irán mejorando sus métodos acercándose a un cierto algoritmo para dividir y mostrando el interés de conocer una determinada técnica más comprimida y efectiva.

En cambio, el segundo problema, que se resuelve mediante la misma división, no es adecuado para preparar su introducción, ya que incluye elementos más complejos -en este caso geométricos- y una idea de división subyacente distinta. Ambos pueden tener su lugar, pero el primero tiene especial interés cuando se sitúa como actividad inicial mientras que el segundo, no.

El siguiente ejemplo muestra cómo un problema nos puede ayudar a aprender a utilizar el lenguaje algebraico. El alumnado ha trabajado con generalizaciones y ha usado las letras para representar cantidades e incluso ha simplificado expresiones algebraicas sencillas, pero no ha resuelto ecuaciones de primer grado. Se puede plantear la resolución del siguiente problema:

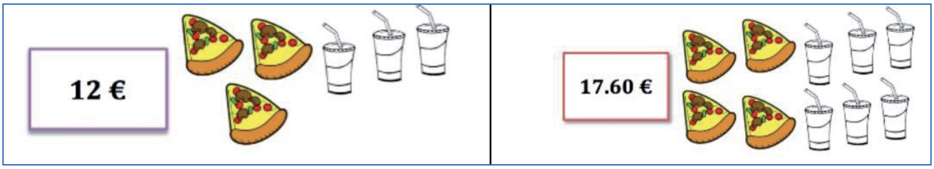

Figura 1. Problema planteado en lenguaje icónico. Elaboración propia

¿Cuál es el precio de una porción de pizza? ¿Y el de una bebida?

En la figura 2 se aportan tres producciones de tres alumnos que lo resuelven siguiendo diferentes estrategias. En la resolución 1, una alumna resuelve el problema dividiendo la primera condición por 2 y restando esta cantidad de 12 €, que es lo que vale la segunda condición. Así consigue saber que una pizza cuesta 3,2 €. En la resolución 2, se ve cómo otra alumna hace paquetes de una pizza y una bebida, sabiendo que cada paquete cuesta 4 € a partir de la segunda condición. Como puede hacer 4 paquetes de 4 euros, solo tiene que restar 16 € de 17,60 € para saber lo que cuestan dos bebidas. Y así, dividiendo entre dos el resultado, averigua el valor de una de ellas. La segunda resolución, además de ser diferente, está expresada de una manera que permite leer e interpretar el pensamiento de la alumna de forma más clara. En de la Fuente (2016) se muestra cómo un profesor necesita de la interpretación de la primera alumna para poder entender su razonamiento y, en cambio, esto no pasa con la segunda producción ni con la tercera. Esta última sigue un procedimiento muy similar a la resolución 2, pero con una representación muy cercana a lo que esperaríamos del uso del lenguaje algebraico para la resolución de sistemas de ecuaciones.

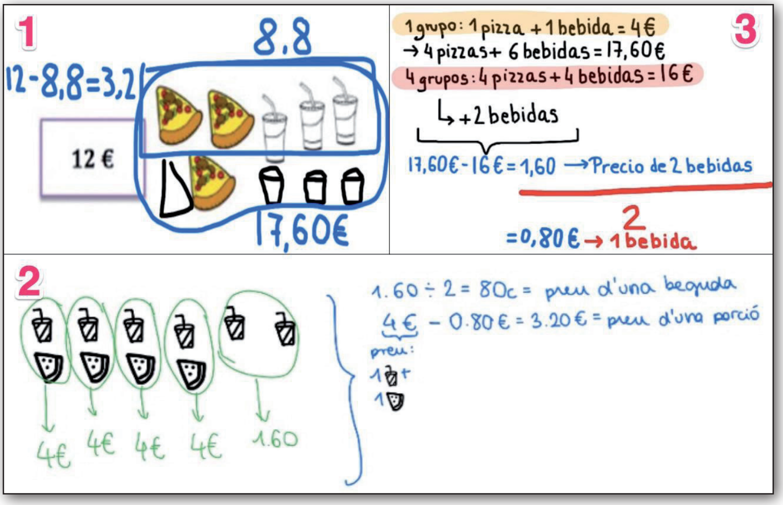

Figura 2. Producciones de alumnos. Elaboración propia

En conclusión, este problema y, en particular, su formulación icónica, permite a los alumnos desarrollar estrategias de resolución de modo que, por el hecho de tener que explicar la resolución con detalle, empiezan a utilizar lenguajes similares al lenguaje algebraico.

Para el profesor de matemáticas, lo que están haciendo estos alumnos es resolver sistemas de ecuaciones y realmente es lo que los alumnos hacen, pero no lo están haciendo mediante el uso del lenguaje algebraico, sino mediante razonamientos aritméticos.

Podemos continuar proponiendo a los alumnos los problemas que vemos en la figura 3.

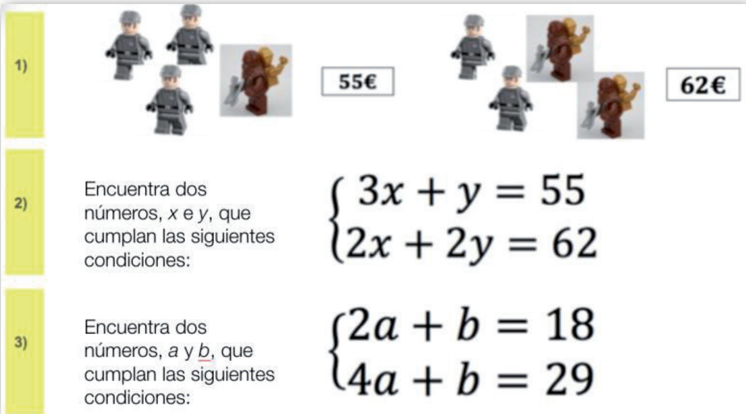

Figura 3. Secuencia de tres problemas. Elaboración propia

De acuerdo con de la Fuente et al. (2016), los alumnos pueden usar su experiencia previa para avanzar en la resolución. Es decir, las estrategias icónicas que van aprendiendo mientras resuelven problemas les sirven para resolver problemas puramente algebraicos mediante la transferencia de aquellas estrategias al nuevo lenguaje. En la figura 4, se puede ver cómo dos alumnos resuelven el segundo problema, que es equivalente al primero. El primer alumno explica la relación que encuentra entre los dos problemas identificando las incógnitas del segundo problema con los iconos del primer problema. El segundo reproduce la estrategia que utilizó en la resolución del primer problema, expresándola algebraicamente. Cuando este segundo alumno fue preguntado sobre por qué volvió a hacer el problema si ya se había dado cuenta que le serviría la misma estrategia, él explicó que no había visto la relación al principio, sino cuando estaba a punto de acabar el problema y que prefirió acabarlo de esa manera para comunicar la solución de manera que se pudiera entender.

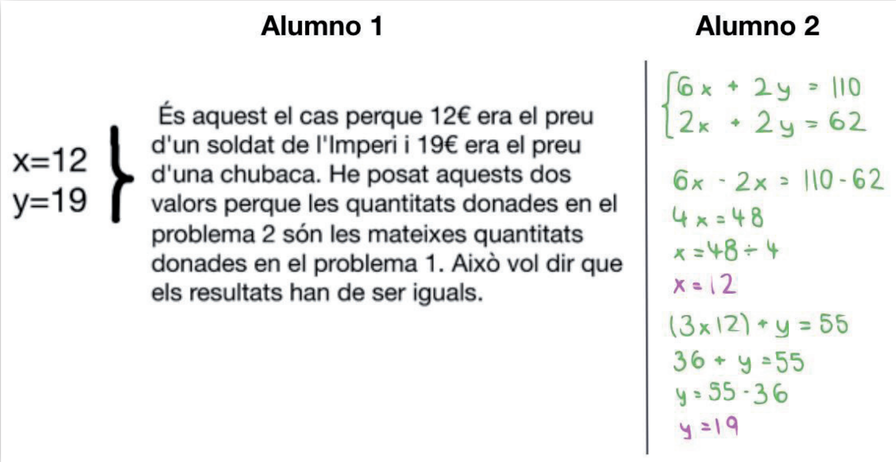

Figura 4: Dos resoluciones distintas del segundo problema

Además, el hecho de que los problemas se pueden resolver de más de una manera permite a los docentes conducir discusiones que ayudan a conectar diferentes representaciones de una misma resolución (resolución 1 y 2) o conectar diferentes formas de razonar (de la Fuente y Deulofeu, 2022).

Para lograr que efectivamente los problemas sean una herramienta potente para aprender matemáticas en todos los sentidos, es deseable que esta actividad esté presente de manera regular en el aula, de modo que a los aspectos que se acaban de señalar sea posible añadir otros igualmente relevantes. Entre estos, acompañar al alumnado a entender que sus conocimientos le ayudarán a responder las preguntas formuladas, ayudarles a ser conscientes que en ocasiones dichos conocimientos son insuficientes para abordar determinadas cuestiones, despertando así la necesidad de incorporar nuevos conocimientos o bien a reestructurar los que ya se conocen. También, para posibilitar la construcción de otros conocimientos que adquirirán sentido al contribuir a responder determinadas preguntas complejas.

Se puede concluir, por tanto, que estas tareas permiten que los alumnos construyan sus propios métodos para resolver sistemas de ecuaciones a través de la resolución de problemas. Pero no hay que olvidar que la gestión por parte del profesor es indisociable del aprendizaje, tal y como se verá más adelante. Una parte muy relevante de esta gestión es el uso de las conexiones, también relacionada con la modelización, tema que se desarrollará en el siguiente apartado.

Problemas para desarrollar la práctica

De la misma manera que se plantean situaciones problemáticas para introducir conceptos, también es posible plantearlas para desarrollar la práctica de técnicas y algoritmos, que son necesarios pero que no son un fin en sí mismo. Se trata de presentar actividades de práctica productiva y no reproductiva, es decir, usando las técnicas y algoritmos para lograr un objetivo distinto al de realizar operaciones. Con su desarrollo se encontrarán más elementos de resolución de problemas que en la mayoría de los llamados problemas aritméticos (y/o algebraicos) escolares (Calvo et al., 2016). Este es un ejemplo en el campo numérico:

> Observa los siguientes pares de multiplicaciones:
>
> $$33 \cdot 34 \quad \text{y} \quad 32 \cdot 35$$
> $$28 \cdot 29 \quad \text{y} \quad 27 \cdot 30$$
> $$76 \cdot 77 \quad \text{y} \quad 75 \cdot 78$$
>
> ¿Existe alguna relación entre los resultados de los dos pares de multiplicaciones? ¿Sabrías proponer otros dos pares en los que suceda lo mismo? ¿Qué condiciones deben darse para que suceda siempre lo mismo? ¿Podrías justificarlo?

Este tipo de actividades, donde la práctica es necesaria como punto de partida, es decir, dentro de la parte inicial de la actividad que se podría llamar de experimentación, puede generarse para todos los niveles y son especialmente útiles para tratar la diversidad del aula. A continuación, se aporta otro ejemplo, esta vez en el campo algebraico:

> Tenemos un sistema de dos ecuaciones de la forma:
>
> $$a\,x + b\,y = c$$
>
> $$d\,x + e\,y = f$$
>
> Sustituye las letras a, b y c por tres números pares consecutivos y las letras d, e y f por tres números impares consecutivos. Resuelve el sistema. Haz lo mismo cambiando los números, pero manteniendo las mismas condiciones. ¿Qué observas? ¿Crees que sucederá siempre lo mismo?

Como antes, para poder saber qué sucede es necesario resolver por lo menos dos sistemas y quizás un tercero para realizar una conjetura plausible.

Hacia la modelización matemática: la relevancia de los contextos

En los trabajos sobre el proyecto danés KOM (Niss y Højgaard, 2011, 2019), se estructuran las 8 competencias matemáticas consideradas en dos grandes grupos: las relacionadas con hacer preguntas y hallar respuestas “en”, “con” y “sobre” las matemáticas (pensar y razonar matemáticamente, resolver problemas y modelizar) y aquellas relacionadas con el manejo del lenguaje y las herramientas (representar, comunicar, usar símbolos y usar ayudas y herramientas).

En particular, siguiendo a Niss, la competencia de modelización (también llamada de modelación) implica, por un lado, analizar los fundamentos y propiedades de los modelos matemáticos existentes, así como evaluar su alcance y validez, lo que implica, entre otras cosas, ser capaz de decodificar e interpretar los elementos y resultados del modelo en términos de la situación real que se supone que deben modelar. Por otro lado, la competencia de modelización implica ser capaz de realizar un modelado activo en un contexto dado y aplicarlo a situaciones externas a las propias matemáticas.

Se puede afirmar que la modelización es la competencia que se desarrolla cuando utilizamos las matemáticas para analizar y resolver situaciones no matemáticas, pero también cuando se utilizan estas situaciones para interpretar los modelos matemáticos, en un proceso dialéctico entre el mundo (en el sentido más amplio del término) y las matemáticas.

Cuando el nuevo currículum se refiere al uso de situaciones de la vida cotidiana, algo que sucede reiteradamente, se entiende que lo hace en este doble sentido, tratando de establecer una relación entre una situación conocida por el alumno (que se supone próxima y significativa) y un modelo matemático. Más adelante, al hablar de los contextos, se matizará y ampliará esta idea que posibilita distintas interpretaciones.

La modelización como proceso

Uno de los objetivos de las matemáticas es el de proporcionar modelos para comprender, interpretar y proporcionar soluciones a situaciones y problemas de campos muy distintos de las ciencias, las ciencias sociales y el mundo en general y es por eso que una de las grandes competencias de las matemáticas es la modelización. De acuerdo con Maaß (2006), se puede afirmar que para modelizar un problema real hay que moverse entre la realidad y la matemática. El proceso de modelización comienza en el mundo real: simplificando, estructurando e idealizando este problema se obtiene un modelo real. La matematización del modelo real conduce a un modelo matemático. Trabajando dentro de las matemáticas se obtiene una solución matemática, que tiene que ser primero interpretada y luego validada. Si la solución o el proceso elegido no resulta adecuado para el problema de la realidad, los pasos o incluso la totalidad del proceso de modelización necesita ser revisado. El propio Maaß sintetiza este proceso en el esquema que mostramos en la figura 5.

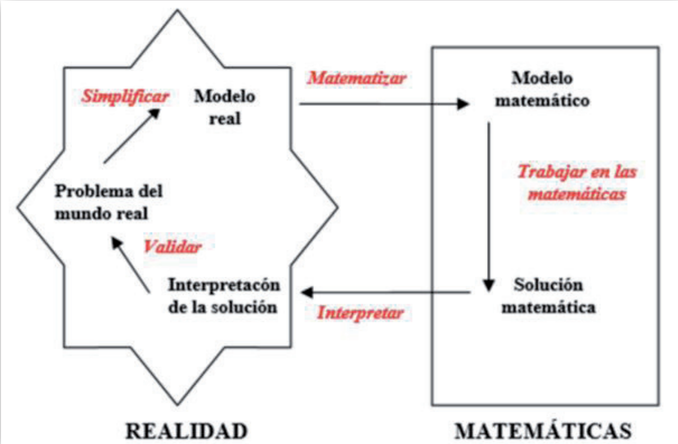

Figura 5. Fases del proceso de modelización de acuerdo con Maaß (2006)

El papel de los contextos: algunos ejemplos

Existe cierto paralelismo entre el proceso que se acaba de describir y el proceso de resolver un problema, pero son competencias claramente distintas, aunque con puntos en contacto. En cierta manera, se puede decir que cuando se resuelve una situación problemática externa a las matemáticas planteada en términos no matemáticos y lo hacemos usando las matemáticas estamos involucrando un proceso de modelización.

Un punto relevante que conecta la resolución de problemas y la modelización es el contexto (o la situación) en el que se enmarca el problema. A menudo, en los currículums se hace mucho hincapié en el contexto cotidiano, olvidando que se trata de un contexto difícil de acotar y subjetivo (por ejemplo, no es el mismo para alumnos que viven en entornos urbanos o en rurales). Es cierto que hay que partir de lo más próximo para ayudar a construir y también a aplicar conceptos y técnicas, pero existen una diversidad de contextos que tienen relevancia para el aprendizaje de las matemáticas y que pueden ser significativos para el alumnado, aunque su relación con lo cotidiano sea discutible.

Así, además del contexto cotidiano, hay que considerar el contexto real, distinto del anterior especialmente porque muchas situaciones del mundo pueden estar alejadas de muchos alumnos, es decir, fuera de su cotidianeidad, por ejemplo, interpretar el recibo de la luz u otras muchas situaciones, cuyo análisis desde el punto de las matemáticas puede ser significativo. Abordar situaciones socialmente relevantes es importante para entender el papel de las matemáticas y, en particular, de la modelización.

También es importante el contexto histórico, puesto que muchos de los conceptos que se trabajan en el aula sirvieron para resolver problemas en un momento determinado y hoy han perdido parte de su significado. Por ejemplo, Aristarco de Samos (s.

III a.C.) calculó las distancias del triángulo Tierra-Luna-Sol, utilizando la semejanza de triángulos. Hoy el uso de instrumentos basados en la tecnología láser realiza estas mediciones de manera muy distinta. También una mirada a la historia de las matemáticas ofrece situaciones y problemas que están en la génesis de conceptos clave como la probabilidad como herramienta para conocer si un juego de azar es favorable o no, o la idea de grafo para mostrar que el camino que quería realizar Euler, pasando una sola vez por todos los puentes de Königsberg, no era posible.

Otro contexto, que podría considerarse dentro de lo cotidiano, pero que tiene unas características específicas es el lúdico: las recreaciones y, sobre todo, los juegos son un magnífico contexto para desarrollar las matemáticas, la resolución de problemas y la modelización. En Navarro y Deulofeu (2016) se muestra que cuando los alumnos practican pequeños juegos de estrategia, aprenden a resolverlos, analizan posibles variantes y llegan a plantear y resolver generalizaciones, más allá de mejorar su capacidad para resolver este tipo de juegos, adquieren competencias (uso de códigos y lenguajes, uso de heurísticas, revisión y validación de soluciones) que les permitan afrontar con mayores garantías la resolución de problemas en otros contextos.

Un ejemplo de pequeño juego de estrategia, para los jugadores, es el Nim simplificado: hay 14 fichas sobre la mesa y en su turno, cada uno de los dos jugadores retira una o dos fichas (las que quiera). El jugador que quita la última, gana la partida. En grupos de cuatro juegan (experimentan) en equipos de dos jugadores, tratando de hallar la mejor manera de jugar; usando heurísticas como reducir el número de fichas, empezar por el final o hallar situaciones de equilibrio se llega a determinar qué jugador, el primero o el segundo, tiene ventaja y cómo debe hacerlo para ganar siempre. Una vez resuelto el juego, se pueden proponer generalizaciones sucesivas: primero, variando el número inicial de fichas y, a continuación, el número de fichas que se pueden retirar en cada turno. Finalmente, al expresar la estrategia en lenguaje matemático, surge la necesidad de utilizar conceptos de divisibilidad, entre ellos, el de resto de una división entera.

Finalmente, no se puede olvidar el propio contexto matemático. Aquí es posible plantear problemas en forma de reto, teniendo en cuenta que ciertos conceptos son más próximos al alumnado que otros. Como se ha mostrado antes, en este contexto se puede desarrollar una parte importante de la práctica de técnicas y rutinas mediante actividades denominadas de práctica productiva. Los problemas de contexto matemático también son importantes para conectar distintos contenidos y establecer relaciones entre ellos.

Veamos el siguiente ejemplo: Tenemos 6 cifras distintas, 1, 3, 4, 6, 7 y 9 y, con ellas, formamos dos números de tres cifras, sin repetir ninguna cifra, es decir, utilizándose todas. Por ejemplo: 147 y 369. ¿Cómo deberemos formar estos dos números si queremos que tanto la suma como el producto de los dos números sean los mayores posibles? ¿Qué sucede si cambiamos los seis números? ¿Sabrías justificarlo?

Lograr que la suma sea máxima (y constar que hay varias soluciones) no debería suponer una dificultad grande si el alumnado conoce el valor de posición de nuestro sistema de numeración, pero, en cambio, establecer una conjetura correcta sobre el producto máximo no resulta sencillo. Una comprobación experimental permitirá establecer el resultado y también conjeturar correctamente para cualquier otro conjunto de seis números. Sin embargo, justificar por qué el producto máximo se da cuando la diferencia entre los números es menor, exige establecer conexiones, primero con la geometría: dos números, su suma y su producto se relacionan con un rectángulo (las medidas de sus lados, el semiperímetro y el área respectivamente y, posteriormente, con el álgebra y las funciones (cómo varía el producto de dos números de suma igual).

Al ir avanzando en el desarrollo del ejemplo anterior, de contexto matemático, se van estableciendo numerosas conexiones entre distintos contenidos del currículum. Se parte de números enteros positivos y las operaciones de suma y resta, para pasar a la geometría: rectángulos -perímetro y área-y de aquí a las funciones mediante expresiones algebraicas y su representación gráfica.

Una actividad de modelización

Presentamos un ejemplo de una actividad llevada a cabo con alumnos de 3er curso de la ESO (Deulofeu et al., 2021), para mostrar una manera de trabajar la modelización en el aula. La situación se planteó en forma de reto, que consistía en encontrar el número adecuado de gomas elásticas para que un muñeco, lanzado sin ejercer más fuerza que la de la gravedad, al dejarlo caer desde una altura determinada, llegara lo más abajo posible, sin tocar el suelo cuando se ataba con estas gomas. De nuevo, no se puede separar la gestión del aula del planteamiento del problema para analizar los aprendizajes de los alumnos. La profesora planteó la situación, organizó la clase en grupos de 4 alumnos, facilitó un muñeco diferente a cada grupo y gomas elásticas iguales. A todos los grupos se les puso la condición de que no debían salir del aula, pero que dentro del aula no había más restricciones, excepto que los grupos no se podían comunicar estrategias entre ellos y que con la altura a la que les restringía la propia condición del aula, debían saber cuál sería la longitud de caída del salto en función del número de gomas que ataban al muñeco. También les dijo que esta relación entre el número de gomas y la longitud de caída del salto la tendrían que utilizar posteriormente para conjeturar el número de gomas que atarían a su muñeco para que el salto fuera de la máxima longitud posible (siempre sin tocar el suelo) desde una altura que todavía no conocían y sobre la cual sólo tendrían una oportunidad para probar. Hasta el último día dedicado a trabajar en esta situación, la profesora no desveló el lugar desde donde debían realizar el salto del muñeco: una pasarela en el patio del centro que está a 4,9 metros de altura. En la figura 6 se pueden ver a algunos alumnos haciendo los experimentos para establecer el modelo.

Figura 6. Un grupo de alumnos realizando el experimento

En síntesis, para ayudar a los grupos de trabajo a establecer su propio modelo, la profesora propuso a los alumnos que siguieran los siguientes pasos, que tienen relación con el proceso de modelización de Maaß (2006):

- Identificar las variables que intervienen en el problema y que se querían relacionar.
- Realizar diversos saltos trabajando en el aula, es decir, con alturas menores a la del reto final, y organizar los datos obtenidos.
- Disponer los distintos datos en una tabla o un gráfico para su análisis.
- Formular un modelo que les permitiera hacer una conjetura sobre el resultado.

En el primer punto, se está pidiendo a los alumnos que identifiquen la información del mundo real que les servirá para hacer su predicción, además de pedirles que encuentren la manera de medirla. De esta manera, se podrá matematizar la situación utilizando la representación que sea más conveniente (hay muchas opciones, desde el uso directo del gráfico, hasta el análisis algebraico de la situación). Finalmente, desde el mundo de las matemáticas podrán encontrar una solución que tendrán que comprobar en el mundo real. Y solo tendrán una opción, porque si la muñeca se golpea la cabeza…

El hecho de que el planteamiento de la tarea fuera abierto y que los alumnos trabajaran en pequeños grupos sin comunicación entre ellos, facilitó que la manera de afrontar la situación, de tomar datos y de encontrar el modelo fuera diferente para cada grupo. Por ejemplo, uno de los grupos utilizó la función de regresión de GeoGebra para encontrar la función lineal que modeliza matemáticamente la situación y llegó a la expresión: $y = 16x + 30{,}8$. Posteriormente tuvieron dificultades para utilizar esta información para resolver el problema de encontrar el número de gomas necesario para hacer el lanzamiento final, porque no sabían identificar las variables. En cambio, otro grupo hizo una predicción a través de un gráfico que dibujaron en un papel cuadriculado y con eso tuvieron suficiente para resolver el problema.

Otro aspecto interesante de esta experiencia es la evaluación que de ella se hizo. La profesora proporcionó a los diferentes grupos un diario de clase en el que cada grupo debía escribir las conclusiones a las que llegaba, lo que estaban aprendiendo y cómo lo estaban haciendo, para cada una de las sesiones realizadas. Dedicó un total de 3 sesiones a este problema, que ella planificó en: recogida de datos, búsqueda del modelo y uso del modelo para resolver el reto final. En cada sesión leía lo que habían hecho y hacía anotaciones en el diario para que al día siguiente los grupos lo tuvieran en cuenta antes de seguir procediendo. De esta manera, integró la evaluación en el proceso y esto fue posible gracias a la gestión diseñada: al hacer grupos independientes, no debía dar retroalimentación individual y esto podía hacerlo a diario. Cuando, posteriormente, quiso realizar una retroalimentación individualizada, propuso a los alumnos una reflexión sobre lo aprendido a partir de preguntas sobre el proceso de modelización realizado, que complementó con anotaciones individuales realizadas durante las sesiones dedicadas a este trabajo de modelización.

Otros ejemplos de modelización

De entre los muchos ejemplos para desarrollar la competencia de modelización en la educación obligatoria, queremos destacar los llamados problemas de Fermi. Son problemas abiertos y contextualizados en el mundo real que requieren una estimación basada en suposiciones razonadas sobre la situación del problema. Una característica específica de los problemas de Fermi es que no ofrecen toda la información necesaria para obtener una solución por lo que el contexto juega un papel relevante para establecer una estimación. Los problemas de Fermi son útiles para introducir la modelización matemática porque son accesibles para estudiantes de diferentes etapas educativas y no dependen de conocimientos matemáticos previos específicos. En general, pueden resolverse descomponiendo el problema original en subproblemas más simples y haciendo estimaciones razonables para cada subproblema para llegar a una solución de la pregunta original. En el proceso de resolución, los estudiantes deben especificar la estructura de la información relevante, generando en el proceso un modelo matemático (Albarracín y Gorgorió, 2014). A partir de esta forma de resolver problemas de Fermi, se han identificado conexiones con la modelización matemática en estudios que involucran el trabajo de estudiantes de secundaria (Ferrando et al., 2017) y también con estudiantes de primaria (Ferrando y Albarracín, 2021).

Sobre la evaluación de competencias

Uno de los puntos clave de cualquier reformulación del currículum es la evaluación, especialmente en aquellos casos en los que hay un cambio significativo, como sucede con la introducción de un marco competencial. En este contexto, surge una pregunta fundamental: ¿cómo evaluar el nivel competencial del alumnado? El tratamiento en profundidad que requiere este tema escapa de los objetivos de este capítulo, y ha sido abordado en este mismo libro en el capítulo 1.4, que lleva por título *La evaluación en Matemáticas*. Sus autores, Chamoso, Cáceres, y Cárdenas, presentan al final un interesante decálogo sobre los aspectos fundamentales de la evaluación.

Sin embargo, queremos hacer una breve aportación a dicha temática y en particular a los dos primeros puntos del decálogo: (1) Convierte la evaluación en un elemento para aprender y (2) Diseña criterios de valoración o rúbricas, precisos y adecuados, y ponlos a disposición de los estudiantes con antelación.

En efecto, la introducción de las competencias es una oportunidad para centrar la evaluación en su aspecto formativo más que en el acreditativo, es decir, entender la evaluación en su dimensión de contribuir a la mejora del aprendizaje. Como señala Sanmartí (2020), si no cambia la evaluación, difícilmente cambiará nada. Por lo tanto, una visión competencial del aprendizaje comporta cambiar qué, cómo, cuándo y por qué evaluar. Esta idea ya la habían planteado en el caso de la resolución de problemas Vila (1992) y Callejo (1996). Más adelante, Sanmartí (2020) añade otra consideración que nos parece fundamental: el alumnado percibe lo que es importante aprender a partir de lo que el profesorado valora, no tanto con palabras, sino cuando propone actividades concretas para evaluar los aprendizajes y cuando aplica unos determinados criterios de evaluación.

En el ejemplo de modelización mostrado en el punto anterior, ya se vio que una parte esencial de la evaluación se centra en la obtención de datos durante el proceso y, sobre todo, en la retroalimentación a los alumnos (en aquel caso a los grupos de trabajo). Existen otros instrumentos y otros métodos de evaluación que comparten la misma finalidad: proporcionar ayudas al alumnado para mejorar su aprendizaje.

Desde la perspectiva anterior, algunas de las prácticas de evaluación habituales dejan de tener sentido, porque ahora el objetivo es otro. Por ejemplo, ¿qué relevancia tiene, para la mejora del aprendizaje del alumnado, constatar si la solución de un problema es o no correcta o admisible, en una prueba de problemas al final de un proceso de enseñanza?

En cambio, teniendo en cuenta que la resolución de problemas es un proceso largo y complejo, será necesario ir obteniendo y compartiendo con el alumnado datos sobre el estado de desarrollo de dicho proceso y reflexionando sobre los mismos, para poder reconducir el camino e incidir en la mejora.

Un ejemplo concreto de instrumento para una evaluación formadora en resolución de problemas que tiene las características de un andamiaje educativo conocido como base de orientación (BO) se muestra en la tabla 3 y sintetiza de manera ordenada las acciones a realizar para resolver un problema, tratando de promover la planificación y revisión de sus acciones en el alumnado.

Tabla 3. Base de orientación de resolución de problemas (Deulofeu y Villalonga, 2018)

DIMENSIÓN	*ACCIONES*
Entiendo el problema	He leído lo que se expone, al menos dos veces Entiendo lo que pretende el problema He identificado y he entendido los datos
Trazo un plan de acción	He jugado con los datos He preparado una estrategia de resolución He comprobado que mi estrategia encaja bien con los datos
Aplico mi plan de acción	He implementado mi estrategia He recopilado mis acciones de manera que las entiendo He recopilado mis acciones de manera que los otros las entiendan
Reviso mi tarea	Cuando me atasco vuelvo al principio Cuando he finalizado, he comprobado mis respuestas He explorado otras respuestas y/o mejores soluciones

Los estudios realizados sobre el uso de una base de orientación de resolución de problemas (Villalonga y Deulofeu, 2017) con alumnos de primer ciclo de secundaria han mostrado que es una guía que les permite avanzar y que sirve también como catalizador para explicitar elementos metacognitivos (tomar conciencia del propio proceso de resolución y de las decisiones tomadas). Asimismo, el uso de la base de orientación se mostró relevante para detectar bloqueos y errores y para ayudar al alumnado a persistir en la búsqueda de otros caminos para resolver el problema.

La transformación de este instrumento en otro de carácter cíclico (Torregrosa et al., 2020, 2021) ha incrementado las posibilidades de este, adaptándose mejor al proceso de resolución de un problema, con sus avances y retrocesos, y concretamente, proporcionando ayudas para hacer emerger las acciones metacognitivas esenciales para mejorar los procesos de resolución.

Se ha constatado también que la realización de actividades de coevaluación y autoevaluación como métodos de retroalimentación durante la construcción y uso de una BO no lineal permite la construcción de bases mejor adaptadas y más utilizadas por el alumnado.

Esta evaluación debe incidir también en los aspectos metacognitivos, en el sentido de Schoenfeld (1992), y también a las ideas de Mason et al. (1988) sobre el monitor interior, contribuyendo a hacerlos explícitos y a mostrar su relevancia para el aprendizaje al alumnado.

Consideraciones finales

A lo largo del capítulo, se han tratado de caracterizar las competencias de resolución de problemas y de modelización que aparecen en muchas de las competencias específicas del nuevo currículum, tanto de Educación Primaria como de Secundaria.

La resolución de problemas es el corazón de las matemáticas y el motor de su aprendizaje. Cuando el ambiente de clase es realmente de resolución de problemas (es decir, cuando están presentes resoluciones que no son el resultado de la aplicación de una técnica, sino que requieren el uso de heurísticas, de formulación de conjeturas, de argumentos o de comparaciones) los alumnos tienen que conectar conceptos o traducir representaciones entre diferentes lenguajes. De manera general, podemos decir que un ambiente de resolución de problemas, o una enseñanza a través de la resolución de problemas, favorece el desarrollo del conjunto de competencias específicas en matemáticas presentes en el nuevo decreto curricular. Es decir, esta forma de enseñar proporciona un medio que posibilita aprender matemáticas de manera global.

De manera análoga, la modelización es el proceso por el cual establecemos conexiones entre las matemáticas y el mundo externo a ellas, mostrando que los modelos matemáticos pueden aplicarse a situaciones pertenecientes a campos muy diferentes, y que es necesario moverse del mundo a las matemáticas y viceversa. En este proceso intervienen acciones de tipo competencial como interpretar, seleccionar, tomar decisiones, traducir, aplicar técnicas, evaluar y reinterpretar soluciones, que refuerzan el valor de la modelización y su trabajo en el aula.

Nos parece pertinente terminar con una cita de Polya (1945) que, a pesar de su antigüedad, sigue conservando plena actualidad y en la cual reivindica el papel de la resolución de problemas, de las preguntas en el aula y de la función del profesorado de matemáticas como mediador del aprendizaje de sus alumnos:

> "Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica el tiempo a ejercitar a sus alumnos con operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero, si pone a prueba la curiosidad de sus alumnos, planteándoles problemas adecuados y les ayuda a resolverlos con preguntas estimulantes, podrá despertar el gusto por el pensamiento independiente, además de proporcionarles ciertos recursos". (Polya, 1945, p. 5)

Referencias

Abrantes, P. (1996). El papel de la Resolución de Problemas en un contexto de innovación curricular. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8*, 7-18.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 79-96. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9528-9

Arcavi, A. (1999). Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos? *Números*, *38*, 39-56.

Barquero, B. (2019). Una perspectiva internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.) (2019). *Investigación en Educación Matemática XXIII.* (pp. 19-22). Consultable en https://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml

Callejo, M. L. (1996). Evaluación de procesos y progresos del alumnado en la resolución de problemas. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8*, 53-63.

Callejo, M. L. y Carrillo, J. (1998). Elementos de resolución de problemas, cinco años después. En J. R. Pascual (Ed.), *Actas del Segundo Simposio de la SEIEM* (pp. 87-105). SEIEM.

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J. y Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la Educación Secundaria*. Síntesis.

de la Fuente, A. (2016). Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas: El rol del conocimiento del profesor. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Matemáticas). *Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals. Universitat Autónoma de Barcelona.*

de la Fuente, A. y Deulofeu, J. (2022). Uso de las conexiones entre representaciones por parte del profesor en la construcción del lenguaje algebraico. *BOLEMA*, *72*, 389-410. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

de la Fuente, A., Deulofeu, J. y Rowland, T. (2016). Conectar lenguajes para resolver ecuaciones. *UNO*, *74*, 68-73.

Departament d'Educació (2007). Currículum de l'Educació Secundària Obligatoria. Decreto 143/2007. Generalitat de Catalunya.
http://culturaeducacio.gencat.cat/admin/uploads/docs/ 20160926140812X.pdf

Deulofeu, J., de la Fuente, A. y Vilaplana L. (2021). Funciones: modelización, representaciones y autorregulación. *UNO, 91*, 32-39.

Deulofeu, J. y Villalonga, J. (2018). Resolución de problemas y regulación del aprendizaje. *Educatio siglo XXI*, *36* (3), 153-175.

Deulofeu, J. y Vila, A. (2021). Aprender a pensar matemáticamente en ambientes de resolución de problemas. En GIDIMAT-UA (Eds.), *Ideas para la Educación Matemática. Perspectivas desde el Trabajo de Ma Luz Callejo de la Vega*. (pp.41-68). Compobell.

Federación Española Sociedades Profesores de Matemáticas (2018). *Conclusiones del seminario de resolución de problemas.* En https://fespm.es/index.php/2018/09/07/conclusiones-del-seminario-de-resolucion-de-problemas/

Ferrando, I. y Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: Analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(1), 61-78. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M. y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 220-242. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11

Halmos, P.R. (1980). The Heart of Mathematics. *American Mathematical Monthly*, *87* (7)*,* 519-24

Luengo, R., Gómez, B., Camacho, M., Blanco, L. (Eds.) (2008). *Investigación en Educación Matemática XII*. SEIEM.

Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *ZDM: the international journal on mathematics education 38*(2), 113-142. DOI: 10.1007/BF02655885

Marbán, J. M., Arce, M., Maroto, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Alsina, Á. (Eds.) (2019). *Investigación en Educación Matemática XXIII*. SEIEM.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar Matemáticamente*. Labor-MEC. (VO 1982).

Ministerio de Educación y Formación profesional (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. BOE 2 de marzo de 2022.

Ministerio de Educación y Formación profesional (2022b). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria. BOE 30 de marzo de 2022.

Navarro, A. y Deulofeu, J. (2016). Aprendiendo a resolver problemas en un contexto de juegos de estrategia. *Suma*, *82*, 9-17.

Niss, M. y Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and Inspiration for the Development of Mathematics Teaching and Learning in Denmark*. Ministry of Education Report (485). Roskilde University.

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies* in Mathematics 102, 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

OECD. (2019). *PISA 2021 Mathematics Framework*. Draft. OECD Publishing.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press. Versión Española, *Como plantear y resolver problemas*. Trillas.

Polya, G. (1964). *Mathematical Discovery*. Vol 2. John Wiley and Sons.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Comares.

Puig, L. (2008). Seminario 2. Resolución de problemas: 30 años después. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.) (2008). *Investigación en Educación Matemática XII.* (pp. 19-22). Consultables en https://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml.

Sanmartí, N. (2020). *Evaluar y aprender, un único proceso*. Octaedro.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Macmillan.

Torregrosa, A., Deulofeu, J. y Albarracín, L. (2020). Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Educación matemática, 32*(3), 39-67.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas. *Bolema*, *35*(69), 89-111.

Vila, A. (1992). Per què avaluem? *BIAIX,1*, 5-9.

Vila, A. y Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas.* Narcea.

Villalonga, J. y Deulofeu, J. (2017). La base de orientación en la resolución de problemas: Cuando me bloqueo o me equivoco. *REDIMAT*, *6* (3), 256-282.