¿CÓMO COMPARAN EL ÁREA DE FIGURAS 2D LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO?

HOW DO PRE-SERVICE PRIMARY SCHOOL TEACHERS COMPARE THE AREA OF 2D FIGURES?

Sofía Caviedes[1], Genaro De Gamboa[1], Edelmira Badillo[1]

[1]Universitat Autònoma de Barcelona

sofia.caviedes@autonoma.cat, genaro.degamboa@uab.cat, edelmira.badillo@uab.cat

Resumen

Este estudio busca caracterizar el conocimiento matemático movilizado por un grupo de estudiantes para maestro cuando resuelven tareas de área. Se utiliza el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, con énfasis en el subdominio del Conocimiento de los Temas. Se analizan las resoluciones y justificaciones escritas de los estudiantes para maestro mediante herramientas cualitativas y cuantitativas. Los resultados indican que aquellas resoluciones que logran movilizar conocimiento matemático llevan asociada la movilización conjunta de diferentes procedimientos, propiedades y registros de representación. Además, indican que las representaciones podrían tener un valor instrumental y organizador dentro del subdominio del Conocimiento de los Temas, pues permiten la emergencia de determinados procedimientos, propiedades y principios geométricos.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas, conocimiento de los temas, conocimiento de la estructura de las matemáticas, área de figuras planas.

Abstract

This study seeks to characterize the mathematical knowledge mobilized by a group of preservice teachers when solving area tasks. The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model is used, with emphasis on the subdomain of Knowledge of Topics. Preservice teachers' written resolutions and justifications are analyzed using qualitative and quantitative tools. The results indicate that those resolutions that manage to mobilize mathematical knowledge are associated with the joint mobilization of different procedures, properties and registers of representation. Furthermore, the results suggest that representations could have an organizational and instrumental value within the subdomain of Knowledge of Topics, since they allow the emergence of certain procedures, properties and geometric principles.

Mathematics teacher's specialized knowledge, knowledge of topics, knowledge of the structure of mathematics, area of flat figures.

INTRODUCCIÓN

El conocimiento del contenido en los profesores resulta fundamental para dirigir y mejorar el aprendizaje de los alumnos (Hill et al., 2004), ya que permite a los profesores, así como a estudiantes para maestro (EPM), comprender y justificar mejor porqué resuelven tareas matemáticas de una determinada manera (Shulman, 1986). En el caso particular del área, el conocimiento del contenido es determinante para que los profesores puedan proponer preguntas productivas, explicar principios geométricos y responder efectivamente a las inquietudes de los alumnos (Baturo y Nason, 1996; Murphy, 2012). Sin embargo, diversas investigaciones evidencian que los profesores y EPM no cuentan con el conocimiento necesario sobre los procesos de medición de áreas (Chamberlin y Candelaria, 2018; Livy et al., 2012). La falta de dicho conocimiento, en los profesores, afecta fuertemente el uso que éstos hacen de distintas herramientas pedagógicas y, por ello, sus métodos de enseñanza (Carpenter, et al., 1988; Hill et al., 2004), lo que podría impactar de manera negativa el aprendizaje de los alumnos (Hill et al., 2004). Para desarrollar una comprensión de los procesos de medición de áreas en los alumnos, los profesores deben proporcionar experiencias de enseñanza-aprendizaje significativas y sostenidas en el tiempo (Sarama y Clements, 2009). Esto requiere que los profesores cuenten con un conocimiento robusto sobre el área y sus procesos de medición, es decir, es necesario que los profesores comprendan los diferentes procedimientos, propiedades y principios geométricos involucrados en los procesos de medición de áreas (Sarama y Clements, 2009), además de las diferentes representaciones que pueden ser utilizadas para resolver una determinada tarea (Caviedes et al., 2021). En este contexto, el presente estudio busca caracterizar el conocimiento matemático que permite a los EPM resolver tareas de comparación y medición de áreas.

MARCO TEÓRICO

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

Utilizamos el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas -MTSK- (Carrillo-Yañez et al., 2018), principalmente, por dos razones. Primero, el modelo considera la especialización como el núcleo del conocimiento del profesor de matemáticas, en todos sus dominios, subdominios y categorías. Segundo, el modelo es una propuesta teórica que modela el núcleo del conocimiento profesional del profesor y es, a su vez, una herramienta metodológica que permite analizar diferentes prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Carrillo-Yañez et al., 2018). El MTSK se ha utilizado, principalmente, para estudiar la práctica de los profesores de matemáticas (Carrillo-Yañez et al., 2018), sin embargo, es posible asumirlo como un referente de los componentes deseables que los EPM necesitan para su futura práctica (Liñan et al., 2019). De esta manera, el MTSK nos permite caracterizar el conocimiento matemático que permite a los EPM comparar tareas matemáticas que involucran el área de figuras planas. En este estudio, nos focalizamos en el Conocimiento de los Temas (KoT). El KoT describe el qué y de qué manera el profesor de matemáticas conoce el contenido que enseña. De esta manera, describe el conocimiento conceptual que los profesores tienen sobre definiciones del área en sus distintos niveles escolares (p.e., ¿qué es el área matemáticamente hablando?); las propiedades y principios involucrados en los procesos de medición de áreas (p.e., la propiedad de conservación de área y los principios geométricos que la sustentan); la fenomenología o contextos de uso del concepto de área (p.e., el reparto equitativo); los procedimientos y justificaciones que se pueden utilizar para resolver tareas de área (p.e., numéricos); y los sistemas de representación que se hacen explícitos por medio de enunciados, procedimientos y/o justificaciones (p.e., mediante registros escritos). Las conexiones intraconceptuales también forman parte de este subdominio y corresponden a las relaciones que se establecen entre los distintos elementos mencionados anteriormente.

Registros de representación

Duval (2017) señala que el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas requiere, necesariamente, la coordinación de dos registros de representación semiótica: el registro discursivo (oral o escrito, en lenguaje natural o simbólico) y el registro no discursivo (dibujos, bocetos, gráficos, figuras y configuraciones geométricas). Además, en el caso de las figuras geométricas la visualización no icónica adquiere un papel relevante (Duval, 2006). Dicha visualización corresponde a una *"secuencia de operaciones que permite el reconocimiento de propiedades geométricas, ya sea por la imposibilidad de obtener determinadas configuraciones, o por la invarianza de las configuraciones obtenidas"* (Duval 2006, p. 21). Eso significa que es necesario realizar una deconstrucción visual de las unidades figurales que se imponen a primera vista, a fin de obtener una reconfiguración. En este sentido, el trazado suplementario se presenta como uno de los principales problemas, pues el cómo dividir la figura no es algo obvio. De acuerdo con Duval (2017) el uso heurístico de una figura requiere, a menudo, poder mirar dicha figura como piezas de un puzle. Así, una de las posibles estrategias a utilizar es la división mereológica (Duval 2007), la que consiste en la división de un todo en partes que se pueden yuxtaponer o superponer, y se hace siempre para reconstruir, con las partes obtenidas, una figura a menudo muy diferente visualmente (pero en la misma dimensión). Esta división constituye una de las heurísticas principales en las transformaciones de las figuras geométricas (Duval, 2017) y admite tres tipos de descomposiciones: (1) estrictamente homogénea, descomposiciones en unidades figurales de la misma forma que la figura de partida; (2) homogénea, descomposiciones en unidades figurales diferentes de la figura de partida, pero todas de la misma forma; y (3) heterogénea: descomposiciones en unidades figurales de formas diferentes entre ellas. Todas estas descomposiciones permiten la exploración puramente visual de una figura de partida, a fin de detectar las propiedades geométricas que se van a utilizar para resolver una tarea y, para obtener una reconfiguración que haga aparecer nuevas formas, no reconocibles en la figura de partida (Duval, 2017). A pesar de su importancia y su utilidad, los EPM presentan dificultades para realizar este tipo de descomposiciones (Baturo y Nason, 1996; Hong y Runnalls, 2020), lo que indica que su abanico de estrategias relacionados con la división mereológica es limitado.

Resolución de tareas de área por EPM

La diversidad de situaciones en las que puede aparecer el concepto de área y las diferentes representaciones utilizadas permiten inferir una complejidad subyacente a dicho concepto (Caviedes et al., 2021a). Esta complejidad lleva asociada ciertas dificultades que se hacen presentes en los EPM y que se relacionan, principalmente, con una escasa variedad de procedimientos para la resolución de tareas y una tendencia hacia el uso fórmulas (Runnalls y Hong, 2020; Simon y Blume, 1994); con la falta de adquisición de propiedades y principios geométricos (Caviedes et al., 2022a; Hong y Runnalls, 2020); con la falta de comprensión de las unidades de medida (Chamberlin y Candelaria, 2018); y con la relación que existe entre perímetro y área (Livy et al., 2012). Por ejemplo, Hong y Runnalls (2020) reportan que los EPM presentan dificultades para aceptar la propiedad de conservación del área en figuras no prototípicas, ya que, al no tener valores numéricos para comparar áreas de triángulos equivalentes en área, pero distintos en forma, justifican sus respuestas con base en la estimación visual. Los mismos autores enfatizan que la comprensión de los conceptos que subyacen a la conservación del área permitiría a los EPM desarrollar una comprensión de las fórmulas y una fluidez procedimental. En Caviedes et al. (2022a) se evidencia que la conservación del área puede ser aceptada, y justificada por los EPM, cuando las tareas restringen el uso de cálculos, lo cual podría ser un indicio de cómo diseñar tareas para trabajar dicha propiedad con los EPM. El mismo estudio pone en evidencia que la adquisición de ciertos principios geométricos es fundamental para justificar la propiedad de conservación. En este contexto, y en un intento por seguir profundizando en el conocimiento matemático que permite a los EPM resolver tareas que involucran el área de figuras planas, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué conocimiento matemático especializado movilizan los EPM cuando comparar áreas de figuras 2D?

MÉTODO

El estudio se sitúa en un paradigma interpretativo con un enfoque mixto y exploratorio (Rocco et al., 2003). Se utiliza un enfoque cualitativo y un análisis de contenido (Cohen et al., 2000) para identificar los elementos matemáticos movilizados en las resoluciones de los EPM. Las categorías de análisis corresponden a aquellas que pertenecen al KoT. Dicho subdominio tiene categorías específicas que nos interesan y que vienen dadas por el modelo MTSK. Para cada categoría elaboramos indicadores y, para facilitar el proceso de asignación de éstos a las respuestas de los EPM se utiliza el programa informático MAXQDA plus. Además, se utiliza un enfoque cuantitativo, y un análisis estadístico implicativo (Gras y Kuntz, 2008), para identificar las relaciones entre las diferentes categorías (e indicadores) movilizadas por los EPM. Las variables consideradas para este análisis son aquellos indicadores que surgen del análisis cualitativo. El análisis estadístico implicativo cuantifica cómo de probable es que suceda la variable B si se ha observado la variable A en la población (Gras y Kuntz, 2008). Así, permite identificar y organizar las relaciones de cuasi implicación (relaciones implicativas entre las variables con una determinada probabilidad) mediante un grafo con flechas que relaciona las variables con las implicaciones más fuertes, en distintos niveles e intensidades. En este sentido, el análisis implicativo se presenta como una herramienta eficaz para establecer posibles relaciones entre conceptos a partir de datos empíricos (Trigueros y Escandón, 2008), es decir, sería útil para encontrar aquellas categorías de conocimiento especializado que permitirían a los EPM dar respuesta a la demanda de las tareas solicitadas y, por lo tanto, proporcionar información sobre las categorías que son claves en los procesos de resolución de tareas de área. La cuasi-implicación entre las variables A → B indica que, si los alumnos responden afirmativamente a A, es probable que respondan a B (aunque un número relativamente pequeño de respuestas puede contradecirlo). En este estudio, en el gráfico implicativo, utilizamos la flecha → para indicar una relación de cuasi-implicación según el significado descrito anteriormente. La flecha doble ↔ indica una relación de cuasi-implicación recíproca. Para llevar a cabo este análisis, se asignó un valor de 1 a cada subcategoría movilizada en las respuestas de los EPM y un valor de 0 a cada subcategoría que no se movilizaba en la respuesta. Se utiliza el paquete gratuito de C.H.I.C -Classification Hierarchique, Implicative et Cohesitive- (Couturier, 2008), versión 0.27 en la consola R versión 3.5.2.

Instrumento y procedimiento

Se diseñó un cuestionario semi estructurado de respuesta abierta para ser resuelto de forma individual, y se pidió a los EPM justificar por escrito cada procedimiento. Para resolver las tareas los EPM podían utilizar material manipulativo (recortables como anexo al cuestionario), además de instrumentos de medida. El cuestionario constó de 8 tareas, de las que sólo 5 buscaban explorar conocimiento matemático a través del uso de procedimientos para su resolución. El cuestionario fue aplicado por la profesora a cargo de la asignatura, en formato online debido a la COVID-19 y los EPM tuvieron una semana para responderlo y enviarlo en formato Word o pdf. La recogida de datos se realizó en el primer trimestre del curso escolar 2020-2021. Participaron 147 EPM que cursaban el tercer curso del Grado de Educación Primaria en la Universitat Autónoma de Barcelona. Los estudiantes, como parte de su programa de estudios, habían tenido instrucción previa sobre diferentes procedimientos para medir áreas. En el presente reporte se presentan evidencias de las resoluciones a la Tarea 5 del cuestionario (Tabla 1).

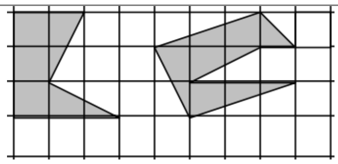
Enunciado de cada Tarea	Gráfica de las Tareas
TAREA 5: Observa las dos figuras dibujadas en la cuadrícula**.** ¿Cuál tiene mayor área? ¿por qué? **Justifica tus respuestas utilizando dos o tres procedimientos diferentes.**	 (Adaptado de Aguilera y Flores, 1998)

Tabla 1: Tarea propuesta al grupo de estudiantes.

Análisis

Las categorías que constituyen el subdominio del KoT se identifican a priori y surgen de una configuración epistémica sobre los procesos de medición de áreas (Caviedes et al., 2021). Los elementos de dicha configuración se adaptan a las categorías del KoT y permiten realizar una codificación deductiva. La Tabla 2 muestra las categorías de conocimiento y sus respectivos indicadores, desde la conceptualización del modelo MTSK.

Categorías del KoT	Indicadores

Representaciones (R)	(R1) *Escrita*: utilizando adjetivos como “igual”, “más delgada” “más ancha”, “el doble”, “la mitad” “la cuarta parte” en relación a las superficies. Se utiliza en los conceptos, términos, proposiciones y propiedades sobre el área. En el enunciado de las tareas, en la justificación de los procesos y en la explicación de los resultados. (R2) *Geométrica:* utilizando el trazado auxiliar de líneas para comparar y/o estimar cantidades de superficies; utilizando cuadrículas y particiones en figuras congruentes (cuadrados y/o triángulos) de las unidades de medida y de las superficies. (R3) *Simbólica:* usando el conjunto de los R^+ para comparar dos o más superficies; para el conteo de unidades, suma y/o cálculo de áreas.
Procedimientos (P) y Justificaciones (J)	(P1) Descomponer de forma conveniente, gráfica o visualmente, dos o más superficies (P2) Realizar movimientos de rotación, traslación y superposición de figuras (P3) Medir áreas como proceso aditivo contando unidades y/o subunidades que recubren la superficie (P4) Medir dimensiones lineales y utilizar fórmulas (P5) Calcular áreas de figuras conocidas para obtener áreas de figuras desconocidas mediante descomposición (J1) Las figuras pueden ser descompuestas y reorganizadas conservando las mismas “partes” (J2) El acto mental de cortar el espacio bidimensional en partes de igual área sirve como base para comparar áreas, pues permite establecer relaciones en función de las partes que componen la superficie, considerando sus longitudes (J3) El área de una superficie cuadrada y/o rectangular está determinada por el producto de las dos dimensiones lineales del rectángulo y/o cuadrado. Así, la fórmula de base por altura permite encontrar el área de superficies cuadras y/o rectangulares (J4) El área del triángulo es la mitad del rectángulo de igual base y altura que lo contiene. Por lo tanto, la fórmula del área del triángulo es base por altura dividido dos.
Propiedades (Pp) y principios (Pr)	(Pp1) Conservación (Pp2) Transitividad (Pp3) Acumulación y aditividad (Pr1) Para calcular el área de una figura, se puede descomponer la figura en un número finito de partes de tal forma que estas partes puedan volver a juntarse para formar una figura más sencilla

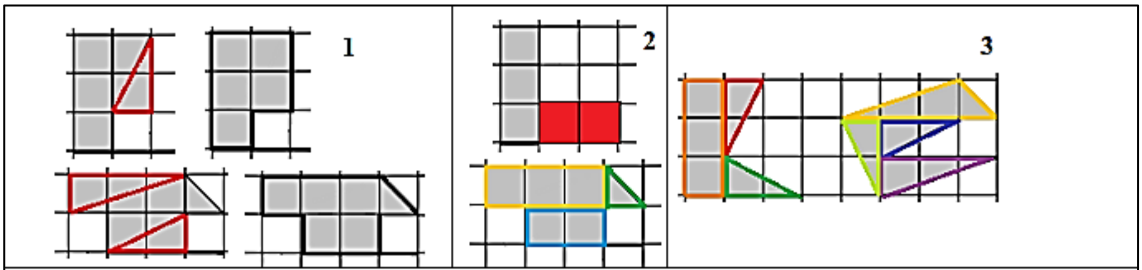
Tabla 2: Categorías e indicadores de conocimiento especializado en el subdominio del KoT.

RESULTADOS

La Figura 1 muestra la resolución de EPM 15 a la Tarea 5 (para más información, ver Caviedes et al., 2023). Se observa que EPM 15 utiliza representaciones en sus registros de representación discursivos de tipo escrito (R1) y simbólico (R3); y no discursivo de tipo geométrico (R2). La Figura 1(1) muestra que EPM 15 es capaz de visualizar que ambas figuras irregulares pueden ser descompuestas utilizando descomposiciones homogéneas y heterogéneas. Esto, con el fin de reorganizar las figuras presentadas en otras más sencillas (P1 y P2), que permitan facilitar el conteo de unidades cuadradas (P3). Los procedimientos utilizados, permiten inferir que EPM 15 reconoce que el cálculo del área se facilita al descomponer y reorganizar una figura desconocida, en otra figura conocida (Ppr1). Al mismo tiempo, dicha reorganización y comparación de las partes que componen ambas superficies permite inferir que EPM 15 moviliza las propiedades de acumulación y aditividad (Pp3), transitividad (Pp2) y conservación del área (Pp1). Esto último se ve sustentado por justificaciones que indican que las figuras pueden ser descompuestas y reorganizadas conservando las mismas partes, y que el acto mental de cortar el espacio bidimensional en partes de igual área sirve como base para comparar áreas (J1 y J2).

Figura 1.

Ejemplos de resolución para la Tarea 5



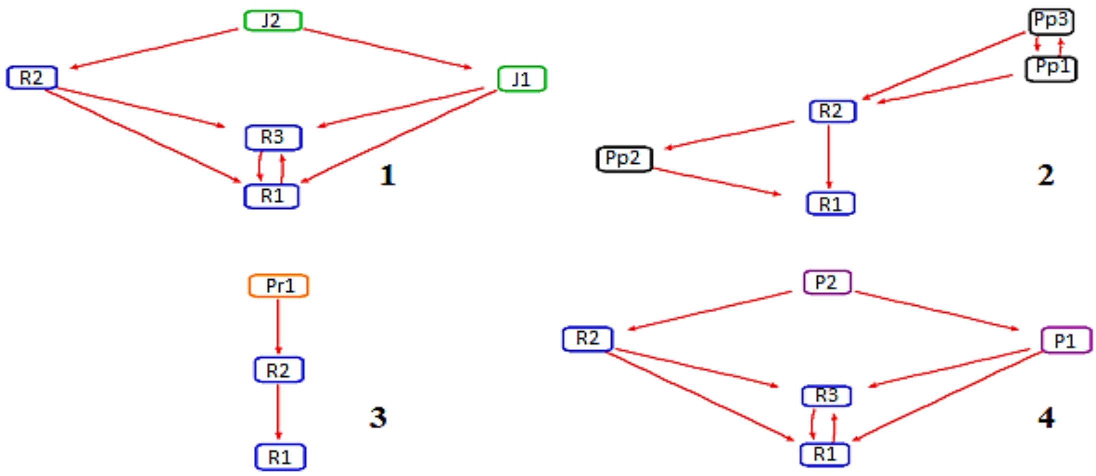
" ***Procedimiento 1:*** *suponemos que cada cuadrado mide 1x1... agrupar las figuras en formas familiares...la primera figura está formada por 5 cuadrados, cada cuadrado tiene 1cm2, el área es 5cm2. La segunda figura hace 5 cuadrados y un triángulo... 5 cuadrados y medio... 5,5cm2...* ***Procedimiento 2:*** *calcular el área de las figuras rotando sus partes... en la primera figura, el rectángulo gris tiene 1x3 = 3cm2... el rojo 2x1= 2 cm2... la figura tiene 3 + 2 = 5cm2... en la segunda figura, el rectángulo amarillo tiene 3cm2... el azul, 2cm2... el triángulo verde tiene 0,5cm2... el área total es 5,5cm2...* ***Procedimiento3:*** *dividiendo la figura en triángulos y rectángulos y calcular el área... la primera figura tiene 3 + 1 + 1 = 5cm2... la segunda figura tiene 2 +1 + 1 + 1,5 = 5,5cm2."* **(EPM 15)**

En la Figura 1(2) se observa movilización de los elementos mencionados anteriormente y, además, la aplicación de la fórmula del área de rectángulos y triángulos (P4 y P5). Dichas operaciones se ven sustentadas por justificaciones que indican que la fórmula de base por altura permite encontrar el área de superficies cuadras y/o rectangulares, y que el área del triángulo es la mitad del rectángulo de igual base y altura que lo contiene (J3 y J4). La Figura 1(3) muestra que EPM 15, nuevamente, es capaz de visualizar que ambas figuras irregulares pueden ser descompuestas homogénea y heterogéneamente (P1) a fin de calcular el área de cada una de las partes que conforman la superficie (P4), y luego sumarlas. Igualmente, este procedimiento se ve sustentado por las justificaciones mencionadas anteriormente (J3 y J4).

El gráfico implicativo de la Figura 2 muestra relaciones entre los distintos indicadores de conocimiento que se movilizan en la Tarea 5 (con un 98 % de significancia indicado por las flechas rojas). Las justificaciones se muestran en verde, los procedimientos en morado, las propiedades en negro, los principios geométricos en naranja, y las representaciones en azul. La Figura 2(1) muestra que los EPM que justifican que los cambios en la forma de una figura no alteran su área (J1), utilizan el trazado de auxiliar de líneas (R2) y, a la vez, reconocen que el acto de cortar una superficie es útil para comparar áreas (J2). Esto último, lo hacen mediante el uso de un registro escrito (R1) y simbólico (R3), es decir, justifican la utilidad de cortar una superficie de manera escrita y mediante cálculos. Se observa que (R1) y (R3) tienen una relación de implicación recíproca, lo que indica que los EPM que utilizan justificaciones escritas, también utilizan cálculos y viceversa. A su vez, aquellos EPM que utilizan representaciones de tipo geométrico (R2) también utilizan (R1) y (R3), lo que se debe a la demanda de la Tarea 5 (utilizar dos o más procedimientos). La Figura 2(2) muestra que los EPM movilizan las propiedades de acumulación y aditividad (Pp3) y conservación (Pp1) de manera conjunta. Ambas propiedades implican el uso de un registro de tipo geométrico (R2), lo que indica que dichas propiedades podrían dar sustento al trazado auxiliar de líneas que permite, posteriormente, ejecutar procedimientos propios de la división mereológica. Por su parte, el registro de tipo geométrico (P2) implica el uso de la propiedad de transitividad (Pp2), lo que indica que el trazado auxiliar de líneas permite establecer comparaciones entre las figuras. A su vez, la propiedad de transitividad implica el uso de (R1), es decir, los EPM justifican la comparación entre las figuras mediante un registro de tipo escrito. La Figura 2(3) muestra que los EPM que evidencian que el área se puede calcular al reorganizar una figura en otra más sencilla (Pr1), utilizan el trazado auxiliar de líneas (R2), justificando dicho trazado de manera escrita (R1). La Figura 2(4) muestra que el trazado de líneas (R2) y las descomposiciones de las figuras (P1), son una condición necesaria para que los EPM puedan movilizar procedimientos asociados con transformaciones isométricas (P2). Finalmente, la Figura 2(4) muestra que las descomposiciones de figuras (P1) implican el uso de (R1) y (R3), lo que indica que los EPM justifican por escrito, y mediante cálculos, sus procedimientos asociados a descomposiciones de las figuras.

Figura 2.

Relaciones entre indicadores del KoT en la Tarea 5.



DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis del proceso de resolución mostrado sugiere distintas relaciones entre las categorías de conocimiento especializado del KoT. Los resultados del análisis cualitativo y cuantitativo sugieren que los EPM que logran dar respuesta a la demanda de la Tarea 5, utilizando dos o más procedimientos diferentes, lo hacen mediante el uso conjunto de distintas categorías del KoT. La coordinación de los registros de representación (discursivo y no discursivo) se presenta como un elemento clave en la resolución de la Tarea 5 (Duval 2007), ya que permite a los EPM ejecutar procedimientos de descomposición y reorganización de superficies, en conjunto con el uso de cálculos. El registro geométrico, y el trazado auxiliar de líneas asociado, permite a los EPM visualizar cómo descomponer superficies mediante la división mereológica, y comparar o calcular el área de figuras desconocidas, aspecto que puede facilitar la movilización de las propiedades geométricas que se pueden utilizar (como la conservación del área), y la obtención de reconfiguraciones que permiten dar respuesta a la demanda de la tarea (Duval, 2017). Los resultados, además, sugieren que las propiedades de conservación y acumulación y aditividad se movilizan de manera conjunta en las resoluciones de EPM, lo que muestra una cierta dependencia entre ellas. Es posible que la movilización de dichas propiedades pueda permitir a los EPM ampliar el repertorio de estrategias para resolver tareas (Caviedes et al. 2022a, Hong y Runnalls, 2020), ya que dan sustento a procedimientos propios de la división mereológica y al trabajo con unidades de medida bidimensionales.

Lo anterior sugiere que la coordinación de los registros de representación (discursivos y no discursivos) sería un aspecto clave para que los EPM puedan comparar áreas movilizando conocimiento especializado (KoT). En este contexto, es posible que los distintos registros de representación posean un valor instrumental y organizador dentro de las categorías del KoT (Caviedes et al., 2022b). Esto es, ciertas representaciones permiten el uso de ciertos procedimientos que no serían posibles con el uso de otras representaciones. Por ejemplo, el uso de un registro de tipo geométrico permite a los EPM el uso de procedimientos relacionados con la descomposición y reorganización de superficies (así como de las propiedades, principios y justificaciones que dan soporte a dichos procedimientos), lo que no sería posible mediante el uso de un registro simbólico.

Los ejemplos mostrados en el análisis, y los indicadores utilizados, permiten caracterizar el conocimiento especializado que movilizan los EPM, y la forma en que se coordinan las diferentes categorías e indicadores de conocimiento en un contexto que requiere comparar y calcular áreas de figuras planas. En este sentido, el modelo MTSK sería útil para caracterizar el conocimiento especializado que es deseable en los EPM (Liñan et al., 2019), y, además. para construir dicho conocimiento mediante sus distintas categorías. Consideramos que esto podría tener implicaciones en el diseño y secuenciación estratégica de tareas para los formadores de EPM, los que podrían ir aumentando de forma gradual los elementos conceptuales que se quieren desarrollar. Sin embargo, dado que el estudio se ha realizado en un único contexto, no es posible asumir que el uso de los indicadores proporcionados podría servir como base para desarrollar, o potenciar, el conocimiento especializado de EPM de un contexto diferente. Al respecto, la necesidad de seguir realizando investigaciones es evidente, pues se requiere explorar aún más la manera en que las distintas categorías del KoT se ponen en juego en un proceso de resolución de distintas tareas matemáticas.

Referencias

Aguilera, S. y Flores, P. (1998). *Comparación de áreas de figuras por estudiantes de primero de magisterio*. VII Jornadas andaluzas de educación matemática THALES.

Baturo, A. y Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational studies in mathematics*, *31*(3), 235-268. https://doi.org/10.1007/BF00376322

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. y Carey, D. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for research in mathematics education*, *19*(5), 385-401. https://web.phys.ksu.edu/current/seminar/f10/pckcarpenter.pdf

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2023). Preservice teachers' knowledge mobilized in solving area tasks. *Journal on Mathematics Education, 14*(1), 35-54. https://doi.org/10.22342/jme.v14i1.pp35-54

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2022a). Preservice teachers' knowledge on area measurement. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti. (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research Society in Mathematics Education* (pp.1-8). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2022b). Pre-service teacher`s specialised knowledge on area of flat figures. En C. Fernández et al. (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2. pp. 123-130). PME.

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2021a). Mathematical objects that configure the partial area meanings mobilized in task-solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-20. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1991019

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021b). Aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (213-220). Valencia: SEIEM.

Couturier, R. (2008). CHIC: Cohesive Hierarchical Implicative Classification. En R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet y F. Spagnolo (Eds.), *Statistical implicative analysis* (Vol. 127, pp. 41–53). Springer.

Chamberlin, M. y Candelaria, M. (2018). Learning from Teaching Teachers: A Lesson Experiment in Area and Volume with Prospective Teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, *20*(1), 86-111. https://eric.ed.gov/?id=EJ1173370

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2000). *Research methods in education,* 5th ed, Routledge falmer. https://doi.org/10.4324/9780203224342

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. Cham: Springer. https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-56910-9

Gras, R., y Kuntz, P. (2008). An overview of the statistical implicative analysis (SIA) development. En R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet y F. Spagnolo (Eds.), *Statistical implicative analysis* (pp. 11–40). Springer.

Hill, H. C., Schilling, S., y Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The elementary school journal*, *105*(1), 11-30. https://doi.org/10.1086/428763

Hong, D., y Runnalls, C. (2020). Examining preservice teachers' responses to area conservation tasks. School Science and Mathematics, 120(5), 262-272. https://doi.org/10.1111/ssm.12409

Liñan, M., Barrera, V., y Infante, J. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: La resolución de un problema con división de fracciones. *Escuela Abierta*, *17*(1), 41-63. https://doi.org/10.29257/EA17.2014.04

Livy, S., Muir, T. y Maher, N. (2012). How do they measure up? Primary pre-service teachers' mathematical knowledge of area and perimeter. *Mathematics Teacher Education and Development*, *14*(2), 91-112. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1018652.pdf

Murphy, C. (2012). The role of subject knowledge in primary prospective teachers' approaches to teaching the topic of area. *Journal of mathematics teacher education*, *15*(3), 187-206. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9194-8

Rocco, T., Bliss, L., Gallagher, S., Pérez, A., y Prado, P. (2003). Taking the next step: Mixed methods taking the next step: Mixed methods research in organizational systems research in organizational systems. *Information technology, learning, and performance journal*, *21*(1), 19-29.

Runnalls, C., y Hong, D. (2020). "Well, they understand the concept of area": Pre-service teachers' responses to student area misconceptions. *Mathematics Education Research Journal*, *32*(4), 629-651. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00274-1

Sarama, J., y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Simon, M., y Blume, G. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 472-494. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.25.5.0472

Trigueros, M. y Escandón, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 13*(36), 59-85.