

L'experiència d'Eratòstenes, 2011

Anna Artigas

Centre per a la Recerca Científica i Matemàtica (CRECIM), UAB

artigasroig@gmail.com

Eratòstenes fou un matemàtic grec que va mesurar el perímetre de la Terra a partir d'una senzilla regla trigonomètrica amb una precisió extraordinària per l'època. L'European Association for Astronomy Education, EAAE, planeja reproduir el proper 21 de juny, i de forma simultània a escoles de diversos llocs d'Europa, l'experiència que Eratòstenes realitzà.

Paraules clau: estructura de la Terra, sistema Sol-Terra, trigonometria, cooperació escolar

El segle III aC Eratòstenes aconseguí de mesurar el perímetre de l'esfera terrestre amb una exactitud extraordinària, tot i les rudimentàries eines de mesura amb les que comptava. El dia escollit pel matemàtic grec per fer la mesura fou el 21 de juny, el dia del solstici d'estiu.

Aquesta també serà la data en què es durà a terme el projecte cooperatiu organitzat per l'Associació Europea per a l'Educació Astronòmica (EAAE per les seves sigles en anglès) en què escoles de tota Europa podran realitzar l'experiment de forma paral·lela i compartir l'experiència mitjançant una videoconferència global.

L'EXPERIÈNCIA

Eratòstenes de Cirene fou el tercer director de la mítica biblioteca d'Alexandria cap al 270 aC. Diu la història que entre la gran quantitat d'informació de què disposava a la llibreria va trobar un escrit on es parlava de l'existència d'un pou a la localitat de Siena, actualment coneguda amb el nom d'Assuan, el fons del qual era il·luminat completament per la llum del Sol en un moment determinat d'un dia determinat de l'any: el migdia del solstici d'estiu.

El matemàtic grec donà molta importància a aquesta data ja que sabia del cert que no hi havia cap dia de l'any que el Gran Obelisc que hi havia a Alexandria no projectés ombra. Va concloure que l'única manera que aquest fenomen pogués produir-se havia de ser que en aquell moment el Sol es trobés directament al zenit del pou però no al zenit del Gran Obelisc.

Per tant, el raonament que feu Eratòstenes per explicar el fenomen va partir de dues premisses:

- 1) La Terra és esfèrica
- 2) Els raigs del Sol són essencialment paral·lels quan arriben a la Terra.

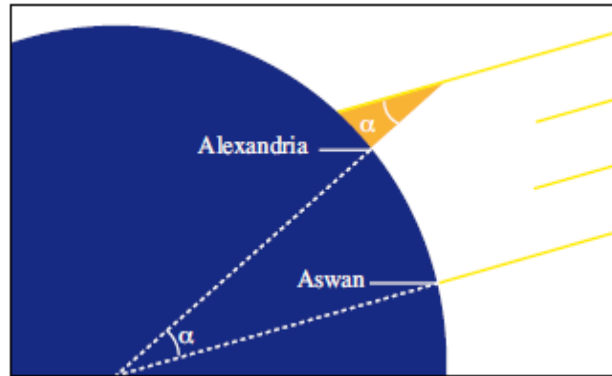


Figura 1. Els rajos solars arriben paral·lels a la Terra tot i que incideixen amb diferent angle a Alexandria i a Assuan.

Tal i com s'il·lustra a la fig. 1 i seguint el seu raonament, l'angle α format pels rajos del Sol i l'Obelisc havia de ser igual a la diferència de latitud entre Alexandria i Assuan. Per tant, partint d'una senzilla regla de proporcionalitat que relacionava la distància entre totes dues localitats (diguem-ne d) i la diferència entre les respectives latituds (anomenada α a la fig. 1) s'arribava fàcilment al valor numèric de la longitud de la circumferència de la Terra, o perímetre, que anomenarem P .

És a dir, si dividim la distància entre els dos punts, d , i la longitud de la circumferència de la Terra, P , obtindrem la relació entre la distància angular que separa tots dos punts, α , i la circumferència terrestre total, 360° :

$$d / P = \alpha / 360$$

Per tal d'obtenir la distància entre Alexandria i Assuan (d) conta la Història que Eratòstenes va enviar un esclau a comptar les passes que hi havia entre totes dues poblacions. Aquest detall de la narració és de ben segur incorrecte però, sigui com sigui, el valor que va obtenir fou sorprenentment precís.

La font d'error més important en aquest càlcul té a veure amb les unitats utilitzades per a mesurar d i per tant també P . La mesura de longitud de l'antiga Grècia eren els estadis, cadascun equivalia a 600 peus. El problema és, però, que la longitud del peu variava de país a país i no queda clara la referència presa pel matemàtic.

El valor de la circumferència terrestre acceptat actualment és de 40 075,16 km. En cas que Eratòstenes hagués utilitzat com a unitat l'estadi grec, el valor obtingut seria 46 620 km i, per tant, l'error comès en el seu càlcul hauria estat d'un 16,3 %. Però en cas d'haver utilitzat l'estadi egipci el valor obtingut disminuiria fins a un valor de 39 690 km i l'error seria només d'un 1 %.

Com a font d'error també s'ha de considerar el fet que Alexandria i Assuan no es troben exactament sobre el mateix meridià i que per tal de trobar la distància entre ambdues ciutats s'havia de seguir el riu Nil, obtenint per tant un valor aproximat de la distància real en línia recta.

De tota manera, Eratòstenes obtingué un valor per al perímetre de la Terra sorprenentment precís per l'època i fou acceptat com a vàlid durant segles.

PROCEDIMENT

L'experiència d'Eratòstenes es pot dur a terme qualsevol dia proper al solstici sense que la seva precisió variï gaire. La importància que la mesura es realitzi durant el solstici d'estiu és que en aquell moment els raigs solars incideixen perpendicularment (i per tant no projecten ombra) a la latitud corresponent al Tròpic de Càncer, justament la latitud en què es troba Assuan.

Llavors, encara que l'experiència no es realitzi exactament el 21 de juny, sí que és important que es dugui a terme quan el Sol es troba en la seva alçada màxima, és a dir, a les 12 h UT que el mes de juny seran les 14 h a Catalunya.

El primer que cal fer és trobar la distància entre el lloc on es fa la mesura i el Tròpic de Càncer (d en la proporció citada anteriorment), una dada que es pot obtenir fàcilment i de forma molt exacta amb l'ajuda d'un GPS o amb qualsevol de les eines disponibles en xarxa (el *Google Maps* per exemple). Un cop es té el valor de d es pot iniciar la part experimental de l'experiència que consisteix en mesurar l'angle que forma l'ombra d'un bastó, és a dir el valor α de la fig. 1.

El que s'ha de fer, per tant, és sortir a l'aire lliure i buscar un lloc allunyat de qualsevol edifici que pugui cobrir el Sol. S'agafa llavors un bastó ben llarg i es mesura la seva llargada amb exactitud (anomenem a a aquesta dada en la fig. 2).

Seguidament es situa el bastó perpendicularment al terra i es mesura la longitud de la seva ombra (dada que anomenarem amb la lletra b en la fig. 2).

Aplicant la fórmula de la tangent es pot obtenir l'angle d'incidència dels rajos solars (α en la fig. 1) amb força precisió:

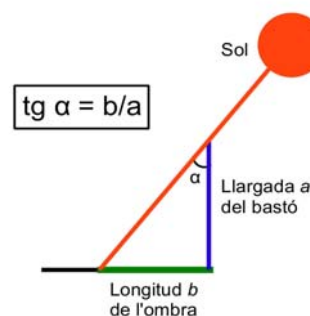


Figura 2. Rajos solars que incideixen amb un angle α i projecten una ombra de longitud b .

En aquest moment l'obtenció del valor de la circumferència de la Terra és directa partint de la proporcionalitat introduïda amb anterioritat, ja que comptem amb totes les dades necessàries tret de la que cerquem, P :

$$d / P = \alpha / 360$$

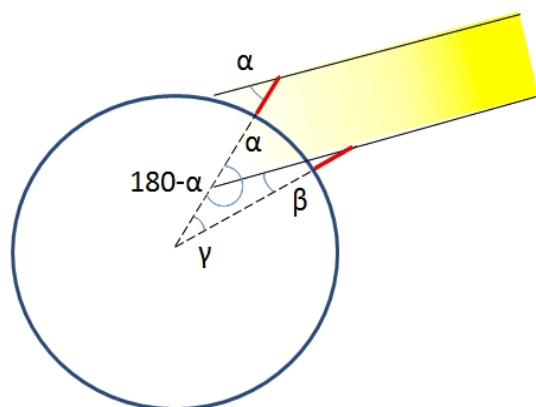
Per tant, obtindrem el perímetre de la circumferència terrestre mitjançant l'expressió

$$P = (d \cdot 360) / \alpha$$

La simplicitat d'aquesta experiència fa que sigui molt vàlida per a alumnes de primària i de primer cycle de la ESO que estiguin estudiant l'estructura de la Terra i el Sistema Solar, ja que els permet de contextualitzar el material mostrat a classe tot obtenint dades significatives.

ERATÒSTENES EN PARELLES

Aquesta activitat és també molt interessant des del punt de vista col·laboratiu. Si es posen d'acord dues escoles que es trobin situades en el mateix meridià i a una distància d entre elles, les dades obtingudes conjuntament per totes dues els permet arribar a calcular de la mateixa forma el perímetre de la Terra sense haver de tenir en compte la seva distància relativa al Tròpic de Càncer.



$$180 = 180 - \alpha + \beta + \gamma$$

$$\gamma = \alpha - \beta$$

Figura 3. Relació entre els angles d'incidència dels rajos del sol en dues localitats que no són al Tròpic de Càncer.

En aquest cas, la relació d'Eratòstenes per trobar P s'escriuria així:

$$d/P = \gamma/360$$

On els angles d'incidència del Sol en totes dues localitats, α i β , s'obtidrien anàlogament a l'explicació de la fig. 2.

PROJECTE DE COOPERACIÓ ESCOLAR

L'any 2010 es va realitzar l'experiment d'Eratòstenes de forma simultània a 20 països dels 5 continents (Artigas *i al.*, 2011). L'experiència va ser coordinada per la EAAE i en col·laboració amb la biblioteca d'Alexandria. A les 12 h TU del dia del solstici d'estiu, escoles de tots els països participants varen mesurar l'angle d'incidència dels rajos solars a les seves respectives poblacions. Mitjançant aquesta mesura i sabent la distància exacta de la seva escola al paral·lel on es troba Assuan,

és a dir, al Tròpic de Càncer, els alumnes podien utilitzar la mateixa regla de proporcionalitat que utilitzà fa més de 2000 anys el matemàtic grec per tal de mesurar el perímetre de la Terra.

L'experiència fou acollida amb entusiasme i per aquesta raó aquest any 2011 es repetirà. Se'n pot trobar més informació a la pàgina web de l'Associació Europea per a l'Educació Astronòmica:

www.eaae-astronomy.org

LA VIDEOCONFERÈNCIA

Aquest any també es preveu fer, igual que l'any passat, una videoconferència entre totes les escoles participants perquè els alumnes puguin compartir resultats, incidències i experiències en general.

Per altra banda, a la biblioteca d'Alexandria s'hi fa la mateixa experiència cada any i per tant serà possible connectar en directe amb el lloc on es dugué a terme l'experiència per primer cop, per tal de veure com es fa a l'escenari original.

CONCLUSIONS

L'any passat l'experiència fou un èxit perquè els alumnes en general van poder veure que l'enginyer de les persones pot ser suficient per arribar a descobertes excepcionals; i també per als professors que van aprofitar l'activitat per relacionar-hi altres materials didàctics i treballar a fons el sistema Terra-Sol mentre preparaven l'activitat.

Per altra banda, la possibilitat de poder comunicar per videoconferència escoles de diferents països parlant llengües diferents fou enriquidor i engrescador per als alumnes. El problema més gran que va trobar-se fou que la majoria de països participants ja eren pràcticament en el període de vacances d'estiu i hi havia pocs alumnes que encara anessin a classe. Per això va ser complicat de trobar un gran nombre d'escoles per a cadascun dels països participants.

Aquesta és una experiència que es pot dur a terme qualsevol dia de principis de juny, sense que la precisió del resultat es modifiqui gaire i no fa falta col·laboració amb cap altra escola per tal d'obtenir un bon resultat, ja que n'hi ha prou amb la distància de la pròpia escola al Tròpic de Càncer. Tot plegat fa que l'experiència sigui de fàcil realització.

REFERÈNCIES

Artigas *i al.* (2011). "EAAE 2010: The Eratosthenes Project". *Phys. Educ.* **46** 17.