

# El·lipses i forces proporcionals a l'invers del quadrat de la distància

Víctor Curcó Murillo

[vcurco@xtec.cat](mailto:vcurco@xtec.cat)

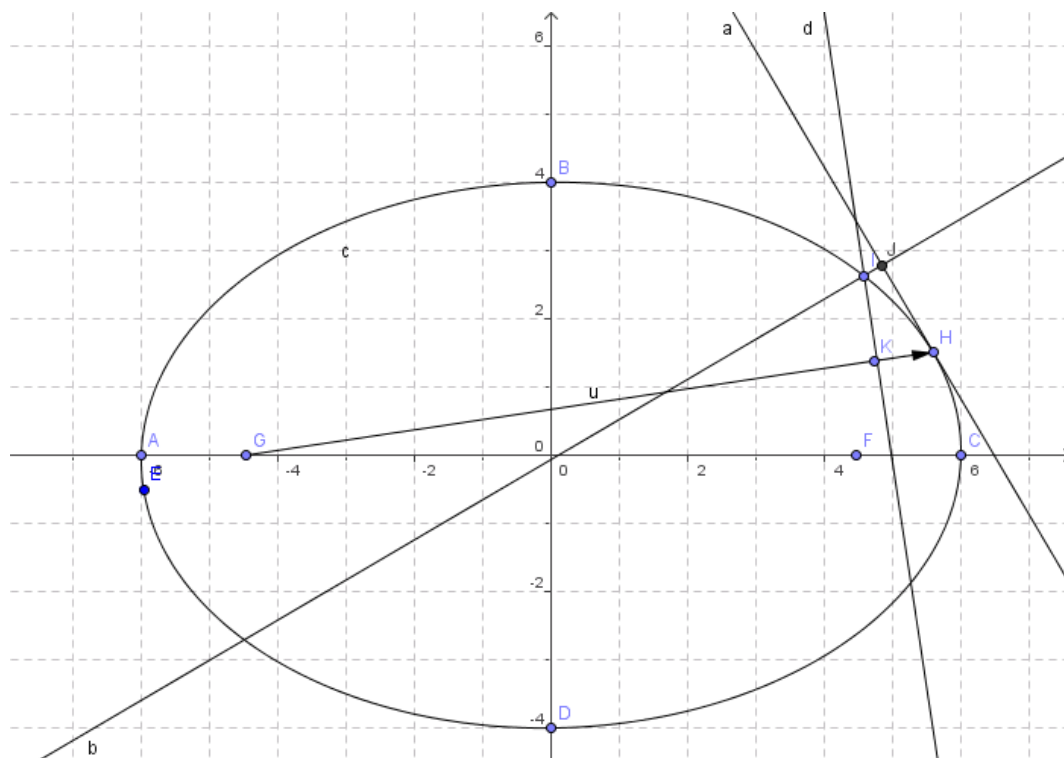
IES La Roca, La Roca del Vallès

*La relació que hi ha entre l'òrbita el·líptica que descriu un planeta al voltant del Sol i la llei de Gravitació Universal es pot obtenir utilitzant una expressió aproximada de la força a partir d'idees bàsiques de física i matemàtiques de primer de batxillerat i fent mesures en una el·lipse amb programari com GeoGebra o Cabri Geometre.*

## Introducció

Quin tipus de força porta un planeta a descriure una òrbita el·líptica? En general hi ha poques experiències relacionades amb la llei de Gravitació Universal que es puguin portar a terme amb els alumnes de secundària que comportin efectuar algun ti-

pus de mesura. Per aquest motiu a continuació es proposa una experiència que es pot presentar als alumnes de diferents formes. La idea original parteix de l'article de Prentis, Fulton, Hesse i Mazzino a la revista *The Physics Teacher* de gener de 2007, "Elliptical Orbit  $\rightarrow 1/r^2$  Force".



**Figura 1.** Òrbita el·líptica usada en la deducció d'una llei de l'invers del quadrat de la distància.

### Fonamentació teòrica

Considerem un planeta que gira al voltant del Sol (figura 1). En un determinat interval de temps es mou del punt **H** al punt **I**. Si no hi hagués cap força sobre el planeta i d'acord amb la llei de la inèrcia de Galileu el planeta es mouria segons la línia tangent **HJ**, amb la velocitat constant que tenia a **H**.

La desviació **IJ** ens proporcionarà una mesura de la força; pensem-ho com si el planeta experimentés una caiguda lliure:

$$\overline{IJ} = \frac{1}{2}at^2 \quad (1)$$

A la segona llei de la dinàmica  $F = ma$  substituïm l'acceleració pel valor que obtindríem d'(1):

$$F = \frac{2m\overline{IJ}}{t^2} \quad \text{o d'una altra manera} \quad F \propto \frac{\overline{IJ}}{t^2} \quad (2)$$

Si ara utilitzem la segona llei de Kepler, el radi vector que connecta el Sol amb el planeta escombra àrees iguals en intervals de temps iguals per la qual cosa tenim que:

$$t \propto A \quad \text{i en conseqüència} \quad F \propto \frac{\overline{IJ}}{A^2} \quad (3)$$

Quan **IJ** → 0 o d'una altra forma **I** → **H** podem aproximar l'àrea del sector escombrat pel radi vector **GH** per l'àrea del triangle **GHI**

$$A = \frac{1}{2}(\overline{GH} * \overline{IK}) \quad (4)$$

I finalment substituint (4) a (3) obtenim que

$$F \propto \frac{\overline{IJ}}{(\overline{GH} * \overline{IK})^2} \quad (5)$$

S'ha de fer notar als alumnes que en l'expressió que hem deduït (5) la força que actua sobre el planeta té unitats de [L<sup>-3</sup>] perquè no ens hem preocupat de la naturalesa del factor de proporcionalitat.

### Procediment i resultats

Amb el programa *GeoGebra* dibuixem una el·lipse de, per exemple, 6 unitats de semieix major i 4

unitats de semieix menor amb el mètode dels 5 punts i determinem els focus de l'el·lipse.

Decidim en quin dels focus situem el Sol (en el nostre cas **G**) i per diferents punts de l'el·lipse fem mesures dels paràmetres geomètrics **IJ**, **GH**, **IK** i avaluem la força mitjançant l'expressió (5)

La taula 1 mostra els resultats obtinguts (es pot seguir tot el procediment mitjançant l'animació que trobareu a

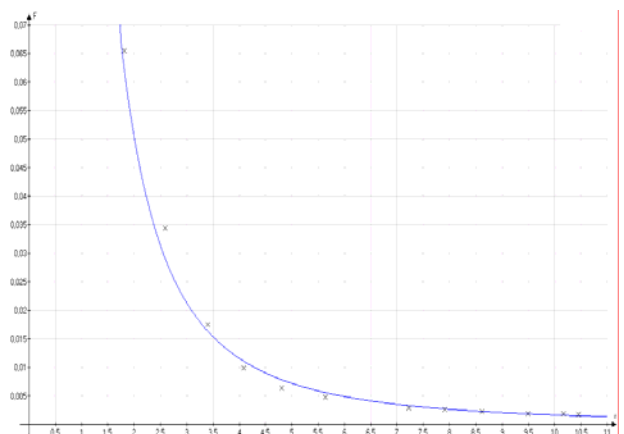
<http://www.xtec.cat/~vcurco/Flash/r2.swf>)

IJ (cm)	IK (cm)	GH = r (cm)	F (cm <sup>-3</sup> )
0.26	1.15	10.45	0.0018
0.31	1.26	10.17	0.0019
0.19	1.05	9.49	0.0019
0.13	0.90	8.61	0.0021
0.10	0.78	7.91	0.0026
0.09	0.77	7.22	0.0029
0.10	0.81	5.64	0.0047
0.04	0.52	4.80	0.0064
0.09	0.74	4.08	0.0099
0.19	0.97	3.40	0.0175
0.24	1.02	2.59	0.0344
0.2	0.96	1.82	0.0655

**Taula 1.** Relació entre força i distància al focus de l'el·lipse.

Si representem gràficament (fig. 2) la força en funció de la distància amb un programa de software científic i gràfic i utilitzem l'opció que permet ajustar els punts experimentals a la millor corba obtenim una llei de dependència entre força i distància proporcional a l'invers de la distància al quadrat amb molt bona aproximació.

$$F \propto \frac{1}{r^{2.12}}$$



**Figura 2.** Gràfica de la força en funció de la distància al focus, segons les dades de la taula 1.

## Adaptació de l'experiència a quart d'ESO

L'experiència també surt força bé i s'adapta millor a les característiques dels alumnes de quart d'ESO dibuixant l'el·lipse en una pissarra en lloc d'utilitzar programari. El procediment és exactament el mateix i s'han d'efectuar el mateix tipus de mesures però recobrim l'el·lipse amb fulls de paper transparent i distribuïm l'adquisició de dades entre diferents grups d'alumnes, assignant-los un sector a cadascun. A l'adreça

<rtsp://video.xtec.cat/vcurco/r2.rm>

es pot veure un clip de vídeo que mostra com fer-ho.

En aquest cas, no cal plantejar als alumnes la justificació de l'expressió (5).

## Consideracions finals

Es pot proposar als alumnes fer diferents modificacions a l'experiència, com per exemple canviar

els paràmetres de l'el·lipse i estudiar si això comporta modificar les conclusions finals.

Tanmateix es pot estudiar si en la mesura que més ens aproximem a la condició  $I \rightarrow H$ , millora l'aproximació a una llei de proporcionalitat a l'invers del quadrat de la distància.

## Bibliografia

- PRENTIS, J, BRYAN, F., HESSE, C., MAZZINO, L. (2007). Elliptical Orbit  $\rightarrow 1/r^2$  Force. *The physics teacher*. Vol 45, pp 20-25.
- GOODSTEIN, D., GOODSTEIN, J. (1999). *La conferència perduda de Feynman. El movimiento de los planetas alrededor del Sol*. Tusquets editores, Barcelona.
- CAAMAÑO, A., CORTEL A., LOZANO, M.T., PUEYO L. (2004). *Física 2*. Editorial Teide, Barcelona.
- CATURLA, E. i VIDAL, F. (1997). *Física 2*. Editorial Castellnou, Barcelona.
- MARTI, J., RUIZ, E., FRAILE, J.M. *Física i Química. Crèdit comú 8*. Grupo Santillana, Barcelona.