29.- ORDENACION DE CONJUNTOS.

CONCEPTO DE ORDEN: OPUESTO, PROPIO, TOTAL, PARCIAL, ESTRICTO Y DIRIGIDO.

Introducir un orden en un conjunto determinado es introducir una relación binaria transitiva, basta que sea transitiva para que se pueda considerar como orden.

Esta relación binaria la denotaremos en la siguiente forma $a \succ b$ que se lee "a sigue a b".

Cumpliéndose que si $a \succ b \wedge b \succ c \implies a \succ c$. Que es la propiedad transitiva. Dar un orden es que sea conexo o no, es decir que dados dos pares de elementos del conjunto X podrán estar o no en relación, pero cuando lo están, es transitiva dicha relación.

Por ejemplo, la divisibilidad: a divide b, en notación: $a \mid b$ en Z, podemos decir que 4 sigue a 2 y a - 2, o sea que 4 es divisible por 2 y - 2.

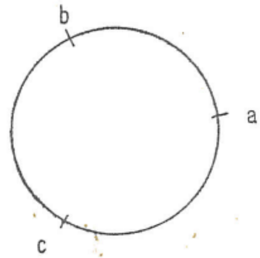
En cambio, el cero sigue a todos ya que cualquier número multiplicado por cero es cero, por lo tanto el cero es divisible por todos.

O sea que $b \mid a$ (b divide a a) podremos decir que $a \succ b$ cuando a es divisible por b .

Hay orden trivial.-

$\forall (a,b) \in X \times X \implies a R b$ este orden es trivial ya que dado cada par de elementos siempre están en orden.

Orden circular.-



No transitivo.-

Si digo $b \succ a$, cuando está situado en la circunferencia en un arco que es menor que 180º en sentido directo, para poder precisar cuando sigue o no.

O sea, $b \succ a$ y $c \succ b$ en cambio c no sigue a sino al revés que $a \succ c$.

Ejemplo: considero el no igual '$\neq$, éste no es un órden en general porque no es transitivo.

$$2 \neq 7 \wedge 7 \neq 2 \not\Rightarrow 2 \neq 2$$

Orden opuesto.-

Es cuando, $a \prec b$ y diremos a precede b.

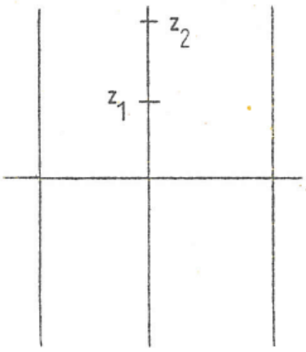
O sea, $a \prec b \ (\equiv)_{def} \ b \succ a$

No es evidente que siendo $b \succ a$ transitiva, la relación $a \prec b$, también lo sea. Es un teorema, pero cuya demostración que si $a \prec b \wedge b \prec c \implies$

$a \prec c$, es fácil de realizar basándose en que es transitiva el orden de seguir.

En el campo complejo C podemos dar el siguiente orden:

$$z_1 \succ z_2 \ (\equiv)_{def} \quad R(z_1) \geq R(z_2) \quad \text{Es transitivo.}$$



Si tengo Z_1 y Z_2, y la parte real de Z_1 está a la derecha de Z_2 o coincide con ella, diremos que $Z_1 \succ Z_2$.

Pero pasa que $Z_1 \succ Z_2$ y $Z_2 \succ Z_1$ sin coincidir o sea que está relación no es asimétrica. Es decir se da que

$$Z_1 \succ Z_2 \wedge Z2 \succ Z_1 \wedge Z_2 \neq Z_1$$

Otro ejemplo es ordenar los números complejos por su módulo:

$$Z_1 \succ Z_2 \ (\equiv)_{def} \ |Z_1| \leq |Z_2|$$

Es relación binaria transitiva o sea que es un orden pero no es asimétrico, porque dos puntos en la misma circunferencia con centro en el origen uno sigue al otro sin que coincidan.

Podemos aplicar una relación de equivalencia que convierte en asimétrico cualquier orden transitivo.

Podemos decir, que desde el punto de vista del primer orden, que tomamos, en el campo complejo, todos los puntos que están sobre la misma vertical son equivalentes.

O análogamente en el segundo caso; todos los puntos que están en la misma circunferencia respecto a una definida proximidad al origen en valor absoluto son también equivalentes.

Se puede demostrar que:

$$(a = b) \vee (a \succ b \wedge b \succ a)$$

es relación de equivalencia a E b o sea que establecida una relación binaria transitiva, lo que hemos llamado orden, en un conjunto X, los pares de elementos que cumplen con la condición a la vez de ser o bien iguales, o bie $a \succ b \wedge b \succ a$, son pares de elementos que están en relación: reflexiva, simétrica y transitiva.

Entonces es relación de equivalencia.

Orden propio.

Es el que sea transitivo $\wedge$ asimétrico.

Dentro de estos órdenes propios pueden ser:

$$\begin{cases} \text{Reflexivo} \quad \forall a \Longrightarrow a \succ a \quad \text{Ejemplo } (\geq) \\ \text{Irreflexivo} \quad \forall a \Longrightarrow a \not\succ a \quad \text{"} \quad (>) \end{cases}$$

y los que no sean ni reflexivos ni irreflexivos.

La propiedad asimétrica, la significación que tiene en los órdenes reflexivo e irreflexivo es la siguiente.

En el primero será:

$$a \succ b \wedge b \succ a \Longrightarrow a = b$$

En el segundo será:

$$a \succ b \Longrightarrow b \not\succ a \quad \text{por definición de irreflexivo}$$

Orden estricto.-

Es el que sea transitivo y tricotómico, donde

$$\text{tricotómico} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Lineal} & a \neq b \Longrightarrow a \succ b \vee b \succ a \\ \text{Irreflexivo} & \\ \text{Asimétrico} & \end{cases}$$

El orden además puede ser total, significa que sea transitivo lineal, en el sentido de que cada dos elementos que no sean iguales siemp están en relación.

O también puede ser parcial, que sea siempre reflexivo y asim trico, también transitivo. Significa que no todo par de elementos tiene q estar en relación.

La inclusión de conjuntos es ejemplo de orden parcial, porque siempre un conjunto está contenido en otro.

También es la implicación entre proporciones.

La divisibilidad da un orden parcial.

El orden total reflexivo es un caso particular del orden parc

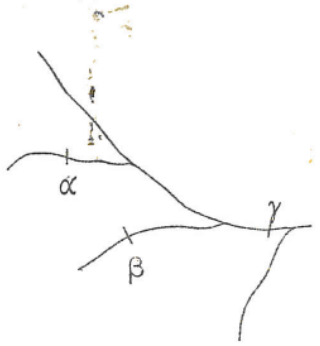
Orden dirigido.-

Tiene la propiedad de ser transitivo con tener propiedad de rección o composición también llamada de Moore-Smith, que dice: Respecto dos elementos, aunque no sean comparables, siempre existe un tercer eleme que sigue a los dos.

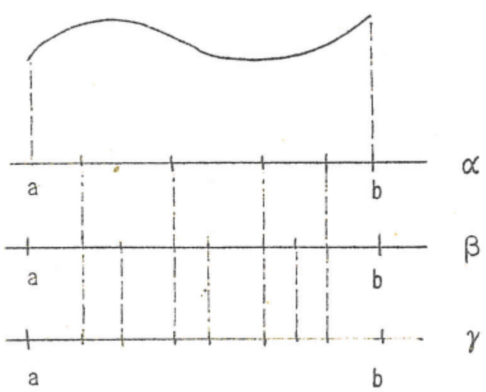
$$\begin{cases} \alpha \succ \beta \wedge \beta \succ \gamma \Longrightarrow \alpha \quad \gamma & \text{transitivo} \\ \forall(\alpha, \beta) \in D \times D \Longrightarrow \exists\, \gamma \in D \ni \gamma \succ \alpha \wedge \gamma \succ \beta & \end{cases}$$

Podemos comparar esto con una cuenca fluvial, por ejemplo.

Para α y β no son comparables, pero en cambio hay posición γ que sigue a α y a β.



Tiene importancia en aplicación al cálculo integral:



Supondremos dada una función determinada en un intervalo (a, b).

Y consideremos una subdiv sión del intervalo de integración.

Entonces se comparan subd siones sucesivas en el sentido siguie se llamará refinamiento de una partic aquella en que conservando los puntos subdivisión de la 1ª podremos agregar tros.

Es un orden porque cumple

propiedad transitiva, entre refinamientos.

Además tiene la propiedad de dirección, pues dada otra partición por ejemplo β, puede considerarse otra γ que sea refinamiento de las dos primeras.

Ejemplo en las sucesiones que dependen de dos índices, m,n.

Diremos que:

$$S_{mn}, \succ S_{m_0,n_0} (\equiv)_{def}\ m > m_0 \ \wedge \ n > n_0$$

es decir sean sucesiones dobles.

Y ocurrirá que dados dos elementos cualesquiera de la sucesión doble por ejemplo, 2,7 con 3,5 siempre existe una tercera, tomando dos índices mayores que ambos, que sigue a las dos.

Esto es también con conjunto dirigido según los índices dobles, que lo podemos generalizar a índices cualesquiera.

Igual ocurre con la inclusión, siempre, dados dos conjuntos cualesquiera, no tienen porque ser en general comparables.

Pero tomando el vacío entre la familia de conjuntos, siempre existe un tercero que está contenido en los dos.

Igualmente en la divisibilidad, siempre existe un múltiplo del mínimo común múltiplo, que es múltiplo de los dos.

A veces en lugar de tener un conjunto dirigido se tiene lo que llamaremos una aplicación dirigida, es:

$$D \underset{en}{\longrightarrow} \overline{R}\ (o\ \overline{C}) \ni u_\alpha \in \overline{R}\ (o\ \overline{C}) \wedge \alpha \in D$$

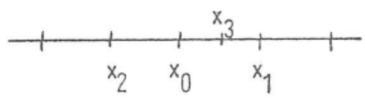
$\overline{R}$, $\overline{C}$ significan la recta real (o el plano complejo) acabados o compactos.

Igualmente, en lugar de poner u_α ponemos $u(x)$ y será

$$u(x) \ni x \to x_0$$

Entonces podemos decir que, $x_1 \succ x_2$ si está más próximo a x_0, sin coincidir con él, para el concepto por ejemplo de límite.

Y podrá resultar que aunque haya dos que no sean comparables, porque equidisten, siempre habrá un tercero que se encontrará más próximo a x_0, el x_3 por ejemplo.



Esto no permitirá estudiar unificadamente el concepto de límite de las aplicaciones dirigidas que por ejemplo comprenderá el límite funcional por la derecha, o por la izquierda, según sea la aproximación que hayamos tomado.

COTAS Y EXTREMOS DE UN CONJUNTO $x \subseteq I$ PARCIALMENTE ORDENADO.

Cotas universales $\begin{cases} p \in X \text{ es 1er. elemento(mínimo) de } X\ (\equiv)_{def}\ \forall x \in X \Rightarrow p < x \\ u \in X \text{ es último " (máximo) de } X\ (\equiv)_{def}\ \forall x \in X \Rightarrow x < u \end{cases}$

Por ejemplo:

En la inclusión de conjuntos, en que I no es el conjunto total, sino que es la familia de los subconjuntos del conjunto total I_1. Entonces existe un primer elemento que es el conjunto vacío, porque como es comparable con todos los demás. En cambio si son la familia de subconjuntos del conjunto total, que es el I_1, tendremos que el total incluye a todos ellos, es el último elemento, o elemento máximo en la relación de inclusión.

En la divisibilidad entre números hay un 1er.elemento, que es el nº entero divisor de cualquier número, que es el 1. O sea 1 divide a toda nº a: $1 \mid a$.

En cambio hay un número entero que es divisible por todo número que es el cero, y éste es el último elemento en la divisibilidad.

$p' \in X$ es minimal de X $(\equiv)_{def}$ $\nexists\, x \in X \ni x < p' \wedge x \nless p' \wedge x \neq p'$ (si el orden es total $p' = p$)

$u' \in X$ es maximal de X $(\equiv)_{def}$ $\nexists\, x \in X \ni u' < x \wedge u' \neq x$ (si total $u' =$

$k \in I$ es cota inferior de X $(\equiv)_{def}$ $x \in X \Longrightarrow K < x$

$K \in I$ es cota superior de X $(\equiv)_{def}$ $x \in X \Longrightarrow x < K$

Llamaremos ínfimo i a la cota inferior máxima, que se suele escribir en la forma siguiente (ínfimo de $X = \inf X$) o extremo inferior de $X = \text{extr inf } X = o = \text{extr } X$) $(\equiv)_{def}$ es cota inferior máxima, si cumple las dos condiciones

$$\begin{cases} I_1)\ x \in X \Longrightarrow i < x & \text{con lo cual significa que es cota inferior} \\ F_2)\ k \ni \forall x \in X \Longrightarrow [k < x \Longrightarrow k < i, & \text{con lo cual vemos que es cota inferior máxima.} \end{cases}$$

En cambio:

Supremo S que se designa por (sup. X o extremo superior de $X = \text{extr sup } X = \text{extr } X$) es $(\equiv)_{def}$ cota superior mínima, si cumple las dos propiedades.

$$\begin{cases} S_1)\ x \in X \Longrightarrow x < S & \text{cota superior} \\ S_2)\ \forall x \in X \text{ es } x < K \Longrightarrow S < K & \text{con lo que vemos que es cota superior mínima} \end{cases}$$

Por la ley asimétrica, en un orden propio si existen los S e i son únicos.

Supongamos, que hay dos supremos, S_1 y S_2 que se comportan como tales con arreglo a lo dicho anteriormente.

Si S_1 es supremo respecto a S_2 que será cota superior, se verificará que $S_1 < S_2$.

Decimos lo mismo con S_2; o sea si S_2 es supremo respecto a la cota superior S_1, tendremos que $S_2 < S_1$.

Es decir:

$$S_1 < S_2 \wedge S_2 < S_1 \Longrightarrow S_1 = S_2 \quad \text{por la ley asimétrica.}$$

Ejemplo.

Suponiendo que la X sea un subconjunto de los puntos racionales (con la relación $\leq$ que es un orden parcial, pueden o no existir la S o i.

Suponemos $X = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ni n \in N \right\}$

Vemos que la i existe y vale i = 2.

En cambio el supremo no existe en Q, pues en R es S = e $\notin$ Q.

En $\overline{R}$, recta acabada y completa, o sea acabada en ($-\infty \leq x \leq +\infty$) los S, i de $X \subseteq \overline{R}$ existen siempre.

Entonces estas mismas definiciones se suelen dar en la forma siguiente:

Se llama i = inf X = extr X a un número que cumple las dos condiciones siguientes:

$$\begin{cases} I_1) & x \in X \Longrightarrow i \leq x \\ I_2) & i = -\infty \vee \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists_x \in X \ni x < i + \varepsilon \end{cases}$$

O sea i es cota inferior, porque para todo x está a la izquierda ahora bien, para un número ε, el i + ε ya no es cota inferior.

Se llama S = extremo superior de X = sup X cuando cumple las condiciones:

$$\begin{cases} S_1) & x \in X \Longrightarrow x \leq S \\ S_2) & S = +\infty \vee \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists x \in X \ni S - \varepsilon < x \end{cases}$$

O sea S es cota superior de X pero cogiendo un ε > 0, el S - ya no es cota superior.

Es la misma definición que dimos antes pero aplicada a la relación "menor que".

Un conjunto $X \subseteq \overline{R}$ se llama acotado superiormente cuando $(\equiv)_{def}$ $\exists K \in R \ni X \subseteq [-\infty, K]$

Un conjunto $X \subseteq \overline{R}$ se llama acotado inferiormente $(\equiv)_{def} \exists k \in R$ $X \subseteq [k, +\infty]$

Para demostrar que existen siempre el S, e i, por ejemplo el S, pueden haber tres casos.

1º) Que el conjunto X sólo esté compuesto del elemento $-\infty$, o sea $X = \{-\infty\}$ entonces vemos, evidentemente, que tiene un supremo y un ínfimo ~~rior~~ que son $-\infty$.

2º) Que X no esté acotado superiormente, entonces S = + ∞.

3º) Supongamos que X esté acotado superiormente, y hagamos la siguiente clasificación.

$A^* = \{K \ni X \subseteq [-\infty, k]\} \neq \emptyset$ por hipótesis ya que hemos supuesto que está acotado superiormente.

$$A = R - A^* \neq \emptyset$$

Entonces, en esta cortadura el elemento de separación es el supremo. Debido a la importancia del supremo y del ínfimo, algunos autores toman, sus existencias como condición para introducir el número real, como por ejemplo el álgebra de Brikhoff-Maclanne.

Basta postular la existencia del supremo, para que como ~~consecuen~~ ~~cias~~, quede como teorema la existencia del ínfimo.

En la recta real pueden no ser accesibles los supremo e ínfimo. O sea, si los extremos son accesibles, la i podemos llamarla mínima = p o primer elemento.

En cambio S podría ser máximo = u o último elemento.

Entonces se suele designar:

p = máximo de X , u = mínimo de X .

Por ejemplo, en la recta real, el conjunto de números reales correspondiente al intervalo $(0;1]$ abierto en 0 y cerrado en 1 tienen siempre ínfimo y supremo, el ínfimo es el cero, y el supremo es el 1.

Pero el ínfimo no es accesible en el conjunto X , en cambio el supremo sí que es accesible.

Para un conjunto arbitrario X de números enteros ordenados según la divisibilidad puede ocurrir que un par de esos números tenga un múltiplo común, o que en ese subconjunto $X \subseteq Z$ no tenga un múltiplo común. Entonces no tendrán supremo estos pares de números.

Si ocurre que para cada par de elementos, existe el supremo y el ínfimo, de ese par de elementos de un conjunto ordenado parcialmente, ese conjunto se llama reticulado.

Ejemplo. En la inclusión, $\subseteq$, tendremos:

El supremo de un par de elementos A , B es la unión de ambos

$$\text{sup.} \{A, \beta\} = A \cup B$$

En cambio:

El ínfimo $\{A, \beta\} = A \cap B$ o sea es su intersección.

Vemos pues existen los dos, el S y el i.

En la implicación tendremos igualmente,

supremo $\{p, q\} = p \vee q$, viene dado por la alternativa

El ínfimo $\{p, q\} = p \wedge q$, es la conjunción.

Para la divisibilidad en Z es sup $\{a, b\}$ = m.c.m $(a,b) = a \cup b$, mientras es inf $\{a, b\}$ = m.c.d. $[a, b] = a \cap b$.

En conjuntos de este tipo ordenados parcialmente, tales que cada par tenga supremo e ínfimo se llaman reticulados o retículos (en inglés "lat~~tice~~" y en alemán "verband").