

32.- PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS - INFINITESIMOS - TEOREMAS DE BOLZANO Y BAIRE - PROPIEDAD D.

Máximos y Mínimos en \bar{D} (cerrado y acotado). Para el caso de funciones de una variable el recinto se convierte en un intervalo cerrado y acotado. El teorema dice: Para una función continua el supremo de los valores funcionales en un recinto cerrado y acotado \bar{D} es finito y accesible. Análogamente para el ínfimo.

$$\exists x_m \in \bar{D} \wedge \bar{x}_M \in \bar{D} \Rightarrow \forall \bar{x} \in \bar{D} \Rightarrow m = f(\bar{x}_m) \leq f(\bar{x}) \leq f(x_M) = M$$

Generalización de Baire:

Basta que la función sea semicontinua superiormente para que tenga máximo, en D cerrado y acotado, y para que tenga mínimo basta que sea semicontinua inferiormente o sea,

$$\exists x_M \in \bar{D} \Rightarrow \forall \bar{x} \in \bar{D} \Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_M) = M = R \text{ finito}$$

Lo análogo para semicontinua inferiormente.

Hay varias demostraciones y mediante el lema de Borel ya mediante los puntos de Weierstrass.

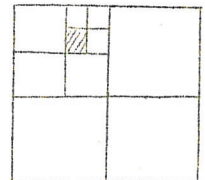
Esto último significa que en una función cualquiera tal que esté definida en un recinto acotado X existen puntos tal que en todo entorno de este punto el supremo de valores funcionales coincide con el supremo en todo el conjunto X .

para $f(x,y)$ cualquiera definida en un conjunto X acotado.

$$\Rightarrow \exists \bar{x}_M \ni \forall U_{\bar{x}} \Rightarrow \sup_{x \in U_{\bar{x}_M} \cap X} f(\bar{x}) = \sup_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}) \in \bar{R}$$

Se obtienen por dicotomía.

Dividimos en cuatro: en uno al menos habrá un punto en que el supremo coincide con el supremo total si son más de uno elegimos el de la izquierda y el de abajo, entonces lo dividimos en cuatro, y



sucesivamente así, por dicotomía voy determinando un encaje de intervalos que nos da el punto x_M aunque puede ser que no pertenezca a X ya que X no tiene porqué ser cerrado, pero es un punto propio, en donde por la manera de elegir el encaje, en todo entorno, del punto obtenido llegará a haber uno de los cuadritos, entonces para los puntos X que están dentro del entorno, el supremo por la manera de elegir los cuadritos, coincidiría con el supremo de $f(x)$.

Demostración del teorema de Boire.

Si $X = \bar{D}$ cerrado y acotado $\Rightarrow \bar{x}_M \in \bar{D} \wedge f(\bar{x})$ semicontinua superiormente,

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow M = \sup_{x \in \bar{D}} f(x) = \sup_{x \in \bar{D} \cup \bar{x}_M} f(x) \leq f(\bar{x}_M) + \varepsilon \in \mathbb{R}$$

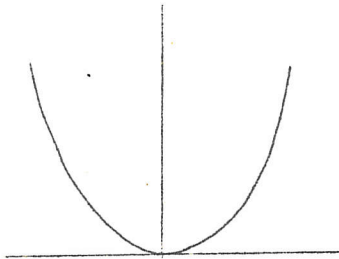
La misma hipótesis por exhaustión ($\varepsilon \rightarrow 0$) nos dice que será,

$$M \leq f(\bar{x}_M) \wedge M = \sup \Rightarrow M = f(\bar{x}_M) \quad \text{c.q.d.}$$

Ejemplo: Para ver que todas las hipótesis son necesarias,

$u = x + y$ continua en $y \geq x^2$ en \bar{D} (no acotado) no tiene máximo.

Otro ejemplo:

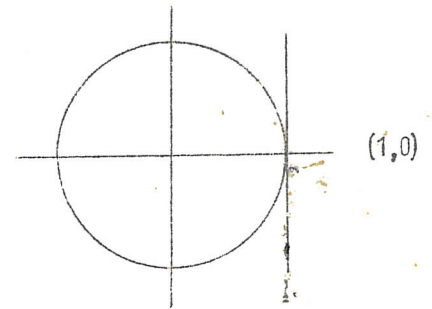


$$u = \frac{y + 1}{x - 1} \quad \text{en } x^2 + y^2 < 1 \quad \text{continua en } D, \text{ pues } D$$

en $(0,1)$ no se anula el denominador o sea $x=1$ está fuera del conjunto.

Es

continua y no tiene máximo porque el recinto no es cerrado.



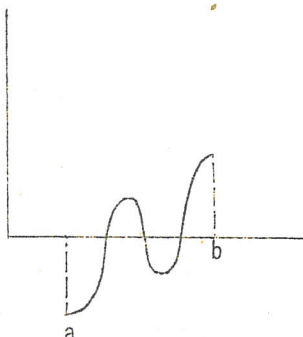
to no es cerrado.

El teorema de Bolzano es muy útil "si una función de una variable es continua en un intervalo cerrado y tiene valores opuestos en los extremos, existe un punto interior en el cual se anula la función:

$$f(x) \text{ continua en } [a, b] \wedge f(a) \cdot f(b) < 0 =$$

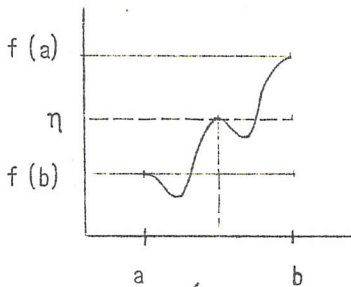
$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) \quad \exists f(c) = 0$$

se demuestra por dicotomía en demostración constructiva.



La función de Dirichlet no se cumple aunque pasa de -1 a $+1$ lo que ocurre es que no es continua.

Propiedad D (Darboux). Dice que si una función es continua en un intervalo cerrado a, b junto con un valor cualquiera del intervalo funcional $[f(a), f(b)]$ implica exista un punto del intervalo cerrado en que la función vale η .

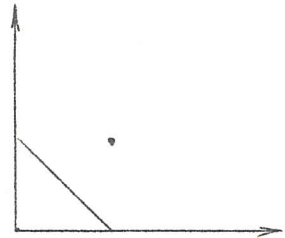


Pues $f(x)$ - η cambio de signo al pasar de $x = a$ a $x = b$.

Una función continua toma todos los valores intermedios. Esto no es una propiedad característica como podemos verlo por unos ejemplos:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

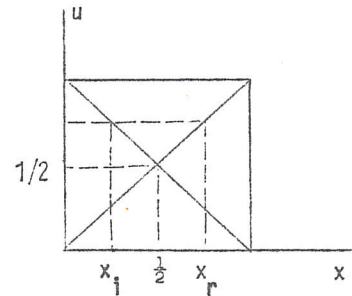
Ejemplos:



Esta función toma todos los valores intermedios y no es continua pues tiene un salto en a y otro en b.

Vamos a dar una función discontinua y que tome todos los valores intermedios una sola vez.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x = x_r \text{ racional } \neq 0 \vee \frac{1}{2} \wedge f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ 1 - x & \text{si } x = x_i \text{ irracional} \\ 0 & \wedge f(0) = 2 \end{cases}$$



Toma todos los valores intermedios una sola vez y no es nunca continua. Cualquier valor funcional que demos, si el valor es racional cortará en un punto racional a la recta $y = x$ y si es irracional lo cortará a la otra recta.

El tomar todos los valores intermedios es característico para la continuidad de funciones monótonas.

Teorema: Si $f(x)$ es monótona creciente en $[a, b]$ \wedge toma todos los valores intermedios \Rightarrow Es continua en $[a, b]$.

En efecto: Al ser monótona creciente $f(x) \Rightarrow \exists$ límites laterales en todo $x_0 \in [a, b]$

|aplic. monot. $\Rightarrow f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+) \wedge$ valores intermedios \Rightarrow

$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0) \Rightarrow$ continua en x_0 .

Límite izquierda igual a límite derecha. a.q.d.

CONTINUIDAD UNIFORME, Y EQUICONTINUIDAD: TEOREMAS DE CANTOR Y HEINE. - Que una función sea continua en cada punto significa que cuando la x varía muy poco la función también varía muy poco. O sea que para $\epsilon > 0$ arbitrario, se puede hallar un número positivo $\delta = \delta(\epsilon)$. Este δ depende además de x . Cuando no depende de x y sí solo de ϵ se dice que la función es continua uniforme.

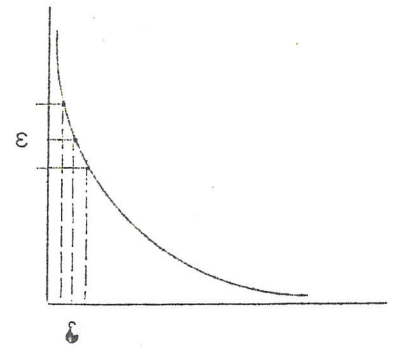
Para $u = \frac{1}{x}$ continua en $(0; 1]$ se ve que el δ no puede ser siem-

pre el mismo sino que cuando nos acercamos al origen el δ tendrá que ser menor.

Entonces esta es continua uniforme.

Heine dió el concepto de la continuidad uniforme. Se dice que una función es continua uniformemente en X (\equiv) def.

$$\begin{aligned} & [\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) \ni \bar{x}', \bar{x}'' \in X \wedge \\ & \wedge | \bar{x}' - \bar{x}'' | < \delta \Rightarrow | f(\bar{x}') - f(\bar{x}'') | < \varepsilon] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & [\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ni \bar{x}', \bar{x}'' \in X \wedge \\ & \wedge | \bar{x}' - \bar{x}'' | < \delta \Rightarrow \omega_f \left\{ [\bar{x}', \bar{x}''] \cap X \right\} \leq \varepsilon] \end{aligned}$$



Tomando \bar{x}' fijo, se ve que una función continua uniformemente es continua en cada punto de X , pero el recíproco, puede no ser cierto.

Teorema de Cantor. Una función continua en un recinto \bar{D} cerrado y acotado es uniformemente continua en D .

Demostración: Se basará en el Tema de Borel. Haremos corresponder a cada uno de los puntos del recinto cerrado y acotado \bar{D} , el entorno de continuidad, bastará un número finito de estos entornos para cubrir todo el recinto y tomar el mínimo de éstos.

$$f(\bar{x}) \text{ continua en } \bar{D} \Rightarrow \forall \bar{x}_k \in \bar{D} \Rightarrow \exists \delta_k = \delta_k(\varepsilon, \bar{x}_k) > 0 \ni | \bar{x} - \bar{x}_k | < \delta_k$$

$$| \Leftrightarrow \bar{x} \in U_{\frac{\delta_k}{3}} | \Rightarrow | f(\bar{x}) - f(\bar{x}_k) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{Sea entonces } V_k = \left\{ \bar{x} \ni | \bar{x} - \bar{x}_k | < \frac{\delta_k}{4} \right\} \text{ o sea hacemos correspon-$$

der a \bar{x}_k un entorno V_k de radio $1/4$ del $U_k \Rightarrow$ Basta un número finito de entornos para incluir el conjunto; esto es:

$$\exists V_1, V_2, \dots, V_m \ni \bar{D} \subseteq \bigcup_{k=1}^m V_k$$

entonces como tengo m entornos ya existirá un mínimo.

$$\delta = \min. \left\{ \frac{1}{4} \delta_1, \dots, \frac{1}{4} \delta_m \right\}$$

con lo que para cada par de puntos que estén en \bar{D} y difieren en menos de δ cumplen la condición de continuidad uniforme.

$$\forall \bar{x}', \bar{x}'' \in \bar{D} \wedge | \bar{x}' - \bar{x}'' | < \delta \Rightarrow \exists V_{k_1} \wedge V_{k_2} \ni \bar{x}' \in V_{k_1} \wedge \bar{x}'' \in V_{k_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow | \bar{x}' - \bar{x}_{k_1}' | < \frac{1}{4} \delta_{k_1} \wedge | \bar{x}'' - \bar{x}_{k_2}'' | < \frac{1}{4} \delta_{k_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow | \bar{x}_{k_1}' - \bar{x}_{k_2}'' | \leq | \bar{x}_{k_1}' - \bar{x}' | + | \bar{x}' - \bar{x}'' | + | \bar{x}'' - \bar{x}_{k_2}'' | \leq \frac{1}{4} \delta_{k_1} + \delta + \frac{1}{4} \delta_{k_2}$$

$$\leq \max. \left\{ \delta_{k_1}, \delta_{k_2} \right\} \Rightarrow (\bar{x}_{k_1} \in U \bar{x}_{k_2} \vee \bar{x}_{k_2} \in U \bar{x}_{k_1}) \Rightarrow$$

$$|f(\bar{x}') - f(\bar{x}'')| \leq \underbrace{|f(\bar{x}') - f(\bar{x}_{k_1})|}_{\varepsilon/3} + \underbrace{|f(\bar{x}_{k_1}) - f(\bar{x}_{k_2})|}_{\varepsilon/3} + \underbrace{|f(\bar{x}_{k_2}) - f(\bar{x}'')|}_{\varepsilon/3} < \varepsilon$$

c. q. d.

Equicontinuidad. Teorema de Heine. Es $f(x,y)$ equicontinua en $x = x_0$ uniformemente respecto a $y \in Y$ si por definición

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \in Y}} f(x,y) = f(x_0,y) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) \text{ independientemente de } y \in Y$$

$$\exists |x - x_0| < \delta \wedge \forall y \in Y \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y)| < \varepsilon$$

Acaso $f(x_0,y)$ no continua en y .

El teorema 2º de límites repetidos nos dice que si la función $f(x_0,y)$ es continua en $y = y_0$ es decir

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0,y) = f(x_0,y_0)$$

y se cumple la hipótesis de que $\exists U_{y_0} \ni \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \in U_{y_0}}} f(x,y) = f(x_0,y)$

entonces por dicho teorema $\lim_{P \rightarrow P_0} f(x,y) = f(x_0,y_0) \Leftrightarrow$ continua en P_0 .

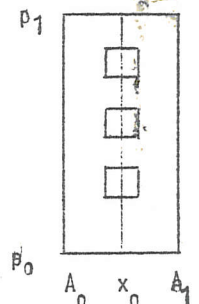
Querrá decir que para asegurar la continuidad respecto a las dos variables podemos estudiar la continuidad respecto a cada una de las variables.

Teorema de Heine. - Es el recíproco de éste.

Si $f(x,y)$ continua en $a_0 \leq x \leq a_1 \wedge b_0 \leq y \leq b_1 \wedge x \rightarrow x_0 \in (a_0, a_1) \Rightarrow$

$$f(x,y) \xrightarrow{\quad} f(x_0,y)$$

$y \in [b_0, b_1]$



A cada punto le corresponderá un entorno de x_0 tal que cuando x se aproxima a x_0 , se da la condición de que $f(x,y)$ difiere de $f(x_0,y)$ en menos de ε . Habrá una δ que dependerá no tan sólo del valor de ε sino de la altura en que nos encontremos, tendremos cada uno de los puntos de esta vertical encerrado en un entorno, cuyo ínfimo podrá ser cero, pero como es cerrado, podemos aplicar el lema de Borel, bastará un número finito para cubrir la vertical, entonces habrá un mínimo de estos δ y este mínimo servirá para todos los puntos.

DISCONTINUIDADES FUNCIONALES.

Evitable. Para ser una función continua en un punto tiene que haber límite en dicho punto. Pero puede que el valor de la función en dicho punto no coincidirá con el límite. A veces en dicho punto no existe la función y entonces podemos darle el valor del límite.

Existe discontinuidad evitable cuando:

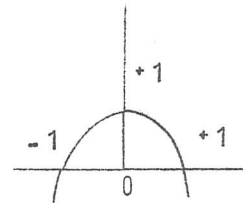
$$\exists \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) \neq f(\bar{a}) \text{ se evita cambiando el valor } f \text{ en } \bar{a} \ni f(\bar{a}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x})$$

Ejemplo, $u = \frac{x^2 + x}{x} = x + 2$ si $x \neq 0$ $u \rightarrow 2$ si $x \rightarrow 0$

Así obtenemos el verdadero valor, a veces este verdadero valor no es el que corresponde a la naturaleza de la función. Ejemplo:

$$u = [1 - x^2] \text{ en } [-1, 1]$$

La gráfica de la parte entera de $1 - x^2$ en el origen es +1. Evitando la discontinuidad en $x = 0 \Rightarrow u \equiv 0$ en $[-1, 1]$.



Una función se llama puntualmente discontinua si en todo intervalo parcial tiene puntos de continuidad. Ej.:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \wedge f(x_i) = 0 \quad \text{Continua en } x_i \text{ irracional} \wedge \text{discontinua en}$$

$$x_r = \frac{p}{q} \text{ . Que los puntos } x_r = \frac{p}{q} \text{ sean discontinuos es inmediato, como en}$$

todo entorno de puntos racionales hay puntos irracionales con valor cero, la oscilación de la función es $1/q$. Estúdiese porque es continua en los puntos irracionales.

La discontinuidad tiene carácter puntual. Una función se llama totalmente discontinua si todos los puntos son de discontinuidad. Ejem. pfunción Dirichlet

Discontinuidad. Una discontinuidad en $x_0 \in \bar{R}$ se llama de 1ª especie cuando existen límites laterales distintos.

Ejemplo: La función parte entera, la función $sgxx$, función mantis. Se llama regular o normal cuando el valor de la función en el punto $f(x_0)$ es el promedio

$$f(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Se llama de 2ª especie cuando no existen límites laterales.

Se llama mixta si existe algún límite lateral y no ambos.

Discontinuidad infinita si algún límite superior o inferior, es + infinito.

INFINITESIMOS E INFINITOS. COMPARACION. - Para funciones de variables también ocurre que:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \lambda \langle \Rightarrow \rangle \varphi(\bar{x}) = f(\bar{x}) - \lambda \rightarrow 0 \quad \text{para } \bar{x} \rightarrow \bar{a}$$

Un infinitésimo es una función tal que para $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$ el límite

tiende a cero. Una función puede ser de infinitésimo no sólo en puntos aislados, sino en conjunto, tal una línea.

Ejemplo:

$$u = \cos(x^2 + y^2) \text{ es infinitésima en } x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2}$$

Para cualquier punto de dicha circunferencia, cuando el punto P se acerque al punto el límite de la función coseno tiende a cero.

Para comparar infinitésimos hay que comparar variables en un entorno de un punto. Para comparar infinitésimos introducimos una notación muy cómoda, que es la siguiente:

$$\text{Si } \exists \lambda > 0 \wedge \exists U_a^r \ni \left| \frac{f(\bar{x})}{\varphi(\bar{x})} \right| < K \quad (\equiv)_{\text{def.}} \quad f = O(g) \text{ para } \bar{x} \rightarrow \bar{a}$$

$(\equiv)_{\text{not.}}$ f del orden de g .

Más estrictamente si existe el límite del cociente y vale cero, es decir:

$$\text{Si } \exists \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = 0 \quad (\equiv)_{\text{def.}} \quad f = O(g) \text{ para } \bar{x} \rightarrow \bar{a} \quad (\equiv)_{\text{not.}}$$

f es del orden infinitesimal de g .

Se dice que f es equivalente a g , en notación.

$$\text{Es } f \sim g \quad (\equiv)_{\text{def.}} \quad \exists \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = 1 \quad \text{variables equivalentes para } \bar{x} \rightarrow \bar{a}$$

Esto es una relación de equivalencia pues cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

$$\text{Si } \exists \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \lambda \neq 0 \iff f \sim \lambda g \text{ para } \bar{x} \rightarrow \bar{a}$$

Igualmente,

Para $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$ será $f = O(1) \iff f$ acotado en el entorno del punto \bar{a} .

También se dice,

$$f = O(1) \iff f \text{ infinitésimo}$$

en cambio,

$$f \rightarrow \lambda \iff f \sim \lambda \neq 0$$

No hay que confundir $O(g)$ con $o(g)$, refiriéndonos con $O(g)$ no a una función determinada sino a una cualquiera de una familia de funciones (del orden de g).

Ejemplo: $O(1) + O(1) = O(1)$ indica que la suma de dos funciones acotadas en un entorno del punto \bar{a} da una función acotada en el entorno del

punto \bar{a} :

Ejemplo:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \quad \text{Para } x \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} f = O(x^p) \text{ si } p \leq 2 \\ f = O(x^p) \text{ si } p < 2 \\ f \sim 3x^2 \end{array} \right.$$

$$\text{Para } x \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} f = O(x^p) \text{ si } p \geq 3 \\ f = O(x^p) \text{ si } p > 3 \\ f \sim x^3 \end{array} \right.$$

Comparación de infinitos e infinitésimos. - Lo haremos respecto al infinitésimo tipo. El infinitésimo tipo es el $h(x) = x - a \wedge$ sus potencias $h^p \wedge p > 0$.

Para $x \rightarrow \infty$ el infinitésimo tipo es $h(x) = x^{-1}$ y sus potencias. El infinito principal

$$H(x) = \frac{1}{x - a}$$

en el caso de que a fuera punto propio si fuera impropio, $H(x) = x$. Esto para el caso de funciones de una variable para dos variables sería:

$$h = x - a \wedge k = y - b \quad \text{Infinitésimo tipo} \quad r = + \sqrt{h^2 + k^2};$$

en el caso de n variables:

$$h_i = x_i - a_i, \quad \bar{x} \rightarrow \bar{a} \implies r = + \sqrt{\sum_i h_i^2}$$

Dos infinitésimos son del mismo orden en el caso de que:

$$\varphi = O(\Psi) \wedge \Psi = O(\varphi) \quad (\text{infinitésimo})$$

$$\Phi = O(\Psi) \wedge \Psi = O(\Phi) \quad (\text{infinitos})$$

Se dice:

$$\varphi \text{ es de orden superior a } \Psi (\equiv)_{\text{def}} \varphi = o(\Psi)$$

$$\text{El infinito } \Phi \text{ es de orden inferior } \Psi (\equiv)_{\text{def}}$$

$$\Phi = o(\Psi)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{El infinitésimo } \varphi \\ \text{El infinito } \Phi \end{array} \right\} \text{ de orden } p \text{ cuando } \left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ y } h^p \\ \Phi \text{ y } H^p \end{array} \right. \text{ mismo orden } \iff$$

$$\iff \exists k, K (\text{no reales } > 0) \ni \bar{x} \in U \frac{r}{a} \implies 0 < k < \left\{ \begin{array}{l} |\varphi/h^p| \\ |\Phi/H^p| \end{array} \right\} < K$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Infinitésimo } \varphi \\ \text{Infinito } \Phi \end{array} \right\} \text{ de orden superior a } p (\equiv)_{\text{def}} \left\{ \begin{array}{l} \varphi = o(h^p) \\ \text{superior a todo } g < p \\ H^p = o(\Phi) \end{array} \right.$$

Pueden no ser de orden p y ser de orden superior a todo $g < p$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Infinitésimo } \varphi \\ \text{Infinito } \Phi \end{array} \right\} \text{ por lo menos de orden } p(\equiv) \text{ def. } \left\{ \begin{array}{l} \varphi = o(h^p) \\ H^p = o(\Phi) \end{array} \right.$$

Entonces: Si $q < p \Rightarrow \varphi = o(h^q)$ pues $\frac{\varphi}{h^q} = \frac{\varphi}{h^p} h^{p-q} \rightarrow 0$

Si $p < q \Rightarrow H^q = o(\Phi)$ pues $\frac{H^q}{\Phi} = \frac{H^p}{\Phi} H^{q-p} \rightarrow 0$

Por ejemplo tenemos la función

$$x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

Este infinitésimo no es de 1er. orden pero es por lo menos de

1er. orden. Pues cumple la condición de K pero no la de k .

Igualmente para infinitos.

$$\frac{1}{x} \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{x} \rightarrow \infty \text{ para } x \rightarrow 0 \text{ es infinito por lo menos de 1er. orden sin}$$

ser de 1er. orden.

Igualmente para funciones de 2 variables.

$c_1 h + c_2 k = o(r)$ por lo menos de 1er. orden pues

$$\left| \frac{c_1 h + c_2 k}{r} \right| \leq |c_1| + |c_2|$$

no de 1er. orden $c_1 h + c_2 k = 0 \wedge r \neq 0$

Con los de 2º orden ocurre,

$$c_1 h^2 + 2 c_2 h k + c_3 k^2 = o(r^2)$$

es además del orden infinitesimal de r , es de orden superior al 1º y por lo menos de 2º. Si es una forma definida,

$$c_2^2 - c_1 c_3 < 0$$

la forma tendrá extremo y no se anulará que sea un infinitésimo exactamente de 2º orden.

Teorema 1º. Si a un infinitésimo se le suma uno de orden superior se obtiene un infinitésimo equivalente al primero.

$$\Psi = o(\varphi) \Leftrightarrow \varphi + \Psi \sim \varphi$$

Análogamente resulta con los infinitos (pero ahora inferior):

$$\Psi = o(\Phi) \Leftrightarrow \Phi + \Psi \sim \Phi.$$

Demostración en infinitésimos.

Directo: $\frac{\varphi + \Psi}{\varphi} = 1 + \frac{\Psi}{\varphi} \rightarrow 1$; Recíproco: $\frac{\chi}{\varphi} \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{\varphi - \chi}{\varphi} = 1 - \frac{\chi}{\varphi} \rightarrow 0$

La condición necesaria y suficiente para que 2 infinitésimos sean equivalentes es que su diferencia sea un infinitésimo de orden superior.

Teorema 2º. El orden de una suma de un nº fijo finito de sumandos

es el del sumando que lo tenga $\left\{ \begin{array}{l} \text{infinitésimos} \\ \text{infinitos} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{menor} \\ \text{mayor} \end{array} \right\}$, siempre que éste sea único. Este sumando se llama principal.

ORDENES FUNDAMENTALES DE INFINITUD.- Las funciones,

	logaritmo	potencial	exponencial	potencial exponencial
infinitos	$(\log_b x)^m$	x^p	a^x	x^{kx}
	$(b > 1, m > 0)$	$(p > 0)$	$(a > 1)$	$(k > 0)$
infinitésimos	$(\log_b x)^{-m}$	x^{-p}	a^{-x}	x^{-kx}

para $x \rightarrow +\infty$; pero cada infinito (por ejemplo) es de orden inferior al siguiente, así:

El infinito exponencial a^x ($a > 1$) es de orden superior al infinito potencial x^p ($p > 0$) por grande que sea p .

Demostración: Poniendo,

$$n = \left\{ \begin{array}{ll} = p & \text{si } p \text{ es entero} \\ = [p] + 1 & \text{si } p \text{ no es entero} \end{array} \right\} \Leftrightarrow n = - [-p]$$

y aplicando la regla de Bernoulli - L'Hôpital a veces al cociente x^p/x^x se tiene,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p x^{p-1}}{a^x \ln a} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{a^x (\ln a)^n x^{n-p}} = 0 = 0$$

queda así demostrado $x^p = O(a^x)$ por grande que sea p . Igual ocurre con,

$$\frac{(\log_b x)^m}{x^p} = \frac{(\log_b x)^m}{(b^p) \log_b x} \rightarrow 0 \Rightarrow (\log_b x)^m = o(x^p)$$

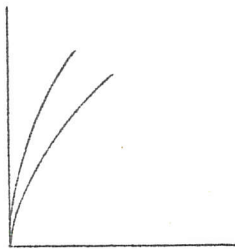
$\forall \varepsilon > 0$ va a ocurrir que para $x \rightarrow +\infty$ sea

$$\frac{x \cdot \ln x}{x} \rightarrow +\infty \wedge \frac{x \ln x}{x^{1+\varepsilon}} = \frac{\ln x}{x^\varepsilon} \rightarrow 0$$

Esto se puede ver haciendo que $x \rightarrow 0^+ \wedge \forall p > 0$ (por pequeño que sea),

$$> x^p = o(\ln^{-1} x) \Leftrightarrow \frac{x^p}{\ln^{-1} x} = - \frac{\ln \left(\frac{1}{x} \right)}{\left(\frac{1}{x} \right)^p} \rightarrow 0$$

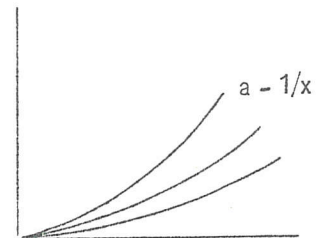
Ocorre que para todo p por pequeño que sea las curvas van siendo infinitésimas. Dando un punto cualquiera por encima de $\ln^{-1} x$ podemos dar una curva x^p que pase por el punto. Sin embargo el cociente de ordenadas



$$\frac{x^p}{\ln^{-1} x} \rightarrow 0$$

Igualmente pasa con $a^{-1/x} = o(x^p)$ para $x \rightarrow 0^+$ Por grande que sea p tenemos infinitésimos de orden potencial tan pequeño como queramos. Sin embargo el exponencial más pequeño. Finalmente es fácil demostrar

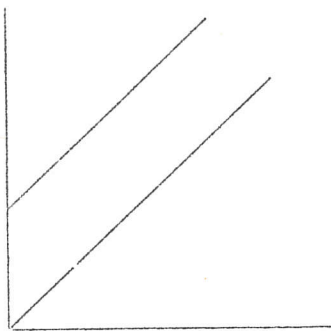
$$\frac{x^{kx}}{a^x} = \left(\frac{x^k}{a} \right)^x \rightarrow \infty > 2$$



INFINITOS NO COMPARABLES.

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= x^2 \cdot \text{sen}^2 x + x + 1 \\ &= x^2 \cos^2 x + x \end{aligned} \right\}$$

El cociente de uno y otro no se puede decir que tienda a cero o a infinito.



$$x = n\pi \Rightarrow \frac{\Phi}{\Psi} = \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{1}{x} \rightarrow +0$$

$$x = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \Rightarrow \frac{\Phi}{\Psi} = \frac{x^2+x+1}{x} = x+1 + \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$

Es muy práctico hallar límites por sustitución de infinitésimos equivalentes.

Por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{3x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{tg } x - x \sim \frac{1}{3} x^3$$

$$-x \sim \frac{1}{3} x^3. \text{ En cambio: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x - x}{\frac{1}{3} x^3} \neq \frac{x-x}{\frac{1}{3} x^3} = 0 \text{ aunque } \text{tg } x \sim x,$$

porque tg x no es factor, sino minuendo.

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \sim \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{para } x \rightarrow 0$$

Para $x \rightarrow 0$ es $\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x} \sim \ln e = 1 \Rightarrow \ln(1+x) \sim$

$$\Rightarrow \frac{a^x - 1}{x} \sim \frac{\ln a^x}{x} = \ln a$$

Para $x = \frac{1}{m}$ resulta como corolario:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} m (\sqrt[m]{a} - 1) = \ln a$$

Es $[(1+x)^m - 1] \sim \ln(1+x)^m = m \cdot \ln(1+x) \sim m$

También
$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos x)} = \frac{x - x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)}{x \frac{x^2}{2} - o(x^3)} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\frac{x^3}{2} + o(x^4)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

para $x \rightarrow 0$.