

Los números reales

Los griegos reconocieron la necesidad de ampliar el campo racional al comprobar que la diagonal de un cuadrado no ~~era~~ es comparable con el lado. Este hecho es equivalente al resultado que demostraremos más adelante, y que afirma que el número ~~2~~ $\sqrt{2}$ no es encajado de ningún número racional.

Para efectuar esta ampliación del campo racional y definir ~~los~~ números reales existen varios métodos rigurosos, por ejemplo: Las sucesiones de Cauchy, las sucesiones de intervalos encajados [], ~~#~~ el método de las cotas inferiores de Dedekind [] ~~etc. etc.~~ De todos ellos ^{escogeremos} ~~escogeremos~~ el primero.

1. - Sucesiones de números racionales.
 Límite. - Sea A un conjunto cualquiera y N el conjunto de los números naturales. Toda aplicación $f: N \rightarrow A$ se llama una sucesión de elementos de A . Todo elemento de A que sea imagen en f de un número natural se

Hamana elemento o termino de la sucesion, y será representada afectándole de un subíndice igual al entero a que corresponde:

$$(1) \quad f(n) = a_n$$

Por lo tanto, ordenando los elementos de la sucesion en el mismo orden de los numeros naturales que les corresponden, podremos representarla por

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

o en forma abreviada

$$\{a_n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

o más abreviada aun simplemente por

$$\{a_n\}$$

que es como se representa comunmente en los tratados de analisis superior.

Es necesario senalar que los elementos de una sucesion no necesitan ser distintos; e incluso pueden presentarse como caso particular pueden

per factor uguale.

Ahora supondremos que $A = \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales. De nuevo, se trata de números

tes. Una sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números racionales tiene por definición un límite $q \in \mathbb{Q}$ si para cualquier número racional $\varepsilon > 0$ puede determinarse un número natural $n = n(\varepsilon)$ tal que si $i > n$

(2) Las sucesiones que ~~tienen~~ ^{se llaman} ~~se llaman~~ ^{sucesiones con} ~~establecidas~~ ^{reglas} ya las no-
ciones de orden y módulo en el campo
racional. Además sin repetir utilizare-
mos las propiedades que necesitamos
de los números racionales, cuyo enuncia-
do y demostración el lector puede
consultar en la sección correspondien-
te).

Puede demostrarse fácilmente

Proposición 1: El límite de una sucesión $\{q_n\}$ si existe, es único.

~~Handwritten scribbles and crossed-out text.~~

~~Existe dos números q y q' , $q \neq q'$, tales que~~

(3) $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} |q - q'|$

~~según la definición de límite existían dos números naturales n y n' tales que~~

~~$|q - q_i| < \varepsilon$ si $i > n$~~

~~$|q' - q_i| < \varepsilon$ si $i > n'$~~

~~y por lo tanto, si m es el mayor de los números n y n' ^{de} ~~entonces~~ ~~se sigue~~ $q - q' = (q - q_i) + (q_i - q')$~~

~~$|q - q'| \leq |q - q_i| + |q_i - q'| < 2\varepsilon$ si $i > m$~~

~~en contradicción con (3). Esta contradicción demuestra la imposibilidad de la existencia de dos límites distintos.~~

2. - Sucesiones de Cauchy: - Una sucesión ~~de números racionales~~ $\{q_n\}$ de números racionales se llama sucesión de Cauchy, si para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n = n(\varepsilon)$ tal que

~~$|q_i - q_j| < \varepsilon$~~ en cualquiera que se en $i, j > n$

Proposición 2: Toda sucesión $\{q_n\}$ ~~es~~ ~~una~~ sucesión de Cauchy de n.º

meros racionales ^{que sea convergente} es una sucesión de Cauchy.

En efecto, si la sucesión $\{q_n\}$ tiene límite $q \in \mathbb{Q}$, según la condición (2) de la definición de límite, resulta que si $n = n(\eta)$ con $\eta = \varepsilon/2$ y $i, j > n$, tendremos

$$|q - q_i| < \eta$$

$$|q - q_j| < \eta$$

y por lo tanto,

$$|q_i - q_j| \leq |q - q_i| + |q - q_j| < 2\eta = \varepsilon$$

y como podemos suponer que ε es un número racional > 0 cualquiera, la proposición queda demostrada.

~~La proposición recíproca no es cierta en el campo racional.~~

Proposición 3: Sean $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ dos sucesiones de números racionales tales que la sucesión $\{q_n - q'_n\}$ tiene por límite 0, entonces si una de las dos sucesiones es convergente también lo será la otra y el límite será el mismo.

~~Siempre que dos~~
~~dos~~ sucesiones $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ ~~siempre que~~
de Cauchy de números racionales ~~siempre~~
~~que~~ pertenecen a una misma clase si
y solo si la sucesión $\{q_n - q'_n\}$ tiene por
límite 0. Es fácil demostrar que esta pro-
piedad es reflexiva, simétrica y transitiva
y por lo tanto, es una relación de equiva-
lencia. Una sucesión cualquiera ^{que} ~~pertenec~~
~~ce~~ a una clase determinada será
llamada un representante de la clase.

Proposición 3: Si dos sucesiones $\{q_n\}$ y
 $\{q'_n\}$ pertenecen a la misma clase y una
de ellas tiene límite $q \in \mathbb{Q}$, la otra tam-
bien tendrá el mismo límite, o dicho
de otro modo, si un representante de
una clase determinada tiene límite
 $q \in \mathbb{Q}$ todos los representantes de la
misma clase tendrán el mismo
límite.

Esta proposición se demuestra
del siguiente modo: Supongamos
que la $\{q_n\}$ tiene límite $q \in \mathbb{Q}$; enton-

de una clase (y por lo tanto todo)
~~esta~~ tiene límite $q \in \mathbb{Q}$, esta clase
representa o ~~corresponde~~ al nú-
mero racional q .

Si el recíproco de la proposición
fuese cierto en el campo racional
este método de las sucesiones de
Cauchy no nos permitiría ampliar
el campo racional; pero como, según
demostraremos a continuación, existen
sucesiones de Cauchy de números ra-
cionales que no tienen límite racio-
nal, ello nos permitirá ampliar
el campo racional obteniendo el
cuerpo de los números reales.

Para demostrar la existencia
de sucesiones de Cauchy de números
rationales que no tienen límite
racional procederemos del siguiente
modo: En primer lugar demostraremos que
el entero 2 no es encajado de ningún número

⑧ Luego definimos una sucesión ^{$\{q_i\}$} de
cuadrados de números racionales que tie-
ne límite 2 y finalmente veremos que ~~es~~
~~esta~~ la sucesión $\{q_i\}$ es de Cauchy y no puede
tener límite racional.

^{a lo que} Supongamos en primer lugar que con-
trariamente, hemos dicho hace poco

racional. ~~Supongamos contrariamente que existe~~⁹
una fracción medietable m/n con $m, n \in \mathbb{N}$
tal que

$$(m/n)^2 = 2$$

de esto se deduce $m^2 = 2n^2$ y como suponemos
que la fracción m/n es medietable y que
por consiguiente m es primo con n , ten-
dremos que m debe dividir a 2, y por lo
tanto, $m=1$ o bien $m=2$. En el primer
caso resultaría ~~$n^2=1$~~ ^{$n^2=1$} y en el segundo
 $n^2=2$, ambos resultados son absurdos y en
consecuencia según hemos afirmado no
existe ningún número racional cuyo
cuadrado sea igual a 2.

Por otra parte, si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m < 2n$,
es fácil por la fórmula del cuadrado del
binomio demostrar que

~~Demostremos~~
$$\frac{(m+1)^2}{n^2} - \frac{m^2}{n^2} < 5/n$$

y por consiguiente para todo valor de n
será posible hallar un valor m tal que

$$2 - \frac{5}{n} < \frac{m^2}{n^2} < 2$$

por lo tanto, considerando una sucesión de va-