

lores de n infinitamente crecientes, obtenemos una sucesión de números racionales, que representaremos por $\{q_n\}$, tal que la sucesión $\{q_n^2\}$ de sus cuadrados tiene límite 2. La proposición 2 permite afirmar que $\{q_n^2\}$ es una sucesión de Cauchy, y puesto que se puede determinar un valor n tal que para $i > n$ se cumplan

$$(6) \quad 1 < q_i < 2$$

resulta que

$$|q_i - q_f| = \frac{|q_i^2 - q_f^2|}{|q_i + q_f|} < \frac{1}{2} |q_i^2 - q_f^2| \text{ si } i, f > n$$

y por consiguiente como quiera que $\{q_n^2\}$ es una sucesión de Cauchy, también lo será $\{q_n\}$.

Ahora vamos a demostrar finalmente que esta sucesión de Cauchy que $\{q_n\}$ que acabamos de definir no puede tener límite racional, lo cual significa

tra que el recíproco de la proposición 2 no es cierto en el campo racional. Supongamos contrariamente que $\{q_n\}$ tiene límite $q \in \mathbb{Q}$, entonces de (6) se sigue

$$\underline{1 \leq q \leq 2}$$

y si $i > n$,

$$(7) \quad |q^2 - q_i^2| = |q + q_i| |q - q_i| < 4 |q - q_i|$$

y puesto que suponemos que $\{q_n\}$ tiene límite $q \in \mathbb{Q}$, para cualquier $\varepsilon > 0$ positivo, podemos determinar un n' tal que

$$|q - q_i| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{si } i > n'$$

y en consecuencia, de (7) resulta que, si m es el mayor de los números

n y n' ,

$$|q^2 - q_i^2| < \varepsilon \quad \text{si } i > m$$

lo cual demuestra que $\{q_n^2\}$ tiene por límite q^2 , pero como también se ha demostrado que $\{q_n^2\}$ tiene límite

la propiedad de no permitir un
con $q^2 = 2$, lo cual según hemos vi-
to es imposible si $q \in \mathbb{Q}$. Esta contra-
dicción demuestra que $\{q_n\}$ no tiene límite racional.
Hemos probado pues la existen-
cia de sucesiones de Cauchy de nú-
meros racionales que no tienen lí-
mite racional. Igual que ~~antes~~
~~antes~~ anteriormente decimos que do-
mos de Cauchy ~~de~~
~~de~~ ~~una~~ ~~sucesión~~ ~~de~~ ~~los~~ ~~que~~ ~~se~~ ~~construye~~
~~de~~ ~~esta~~ ~~manera~~ ~~que~~ ~~si~~ ~~se~~ ~~tiene~~ ~~una~~ ~~sucesión~~ ~~de~~ ~~los~~ ~~que~~ ~~se~~ ~~construye~~
 $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ pertenecen a una misma
clase y la $\{q_n - q'_n\}$ tiene por límite
0, sin ~~que~~ ~~se~~ ~~construya~~ ~~una~~ ~~sucesión~~ ~~de~~ ~~los~~ ~~que~~ ~~se~~ ~~construye~~ tener en
cuenta si las sucesiones $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ tienen
límite racional según hemos ~~antes~~
~~antes~~ si un representante de la
clase (y por consiguiente todos) ~~antes~~
tiene límite racional (y decimos que

representa o ~~es equivalente~~ ^{corresponde} a este número
q; pero incluso cuando ninguno de
~~representantes~~ de la clase tiene límite
racional diremos que la clase repre-
senta o ~~es equivalente~~ ^{corresponde} a un número
p; que ~~es~~ a estos números se
les llama números racionales.
El conjunto formado por los nú-
meros racionales y los irraciona-
les se llama conjunto de ^{los} núme-
ros reales. En ~~este conjunto~~ ^{en este conjunto} vamos
a establecer un orden y dos ope-
raciones de modo que ~~sea~~
sea un cuerpo. ~~Las dos operaciones,~~
~~suma y producto, verifican que en~~
~~siguran cumpliendo las mismas~~
~~leyes formales que cumplen en~~
~~el campo racional, y que además~~
~~cuando se aplican a números ra-~~
~~cionales son las mismas opera-~~

Por lo tanto puesto que (8) se verifica para una
infinidad de valores de i y se verificará para valores
de $i > n$ de lo cual resulta

de valores de i para los cuales

$$|q_i| > 2\eta$$

y por lo tanto para una infinidad de estos valores tendremos, o bien

$$(8) \quad q_i > 2\eta$$

o bien

$$(9) \quad q_i < -2\eta$$

Supongamos que sea (8) la que sea satisfecha para una infinidad de valores de i , entonces, puesto que $\{q_i\}$ es una sucesión de Cauchy, podremos determinar un n tal que

$$|q_i - q_f| < \frac{\eta}{2} \quad \text{si } i, f > n$$

~~por lo tanto de (8) resulta~~

$$(10) \quad q_f > \frac{\eta}{2} \quad \text{si } f > n$$

Si en lugar de (8) fuere (9) la que se cumple para una infinidad de valo-

res de i hubiésemos encontrado que

$$(11) \quad q_i < -\frac{\eta}{2} \text{ para } i > n$$

y como es ~~de~~ evidente que solo una de las (10) y (11) es satisfecha ~~entonces~~ ~~entonces~~ ~~en su lugar de~~ queda demostrar la proposición.

Proposición 5. - Si $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ son dos sucesiones de Cauchy de números racionales que no pertenecen a la misma clase, ~~o~~ ^{$\exists m, n > 0$} existe un n tal que ~~para~~ ^{se cumple} para $i > n$ una y solo una de las dos desigualdades

$$(12) \quad q_i > q'_i + \eta$$

$$(13) \quad q'_i > q_i + \eta$$

en primer lugar

En efecto es fácil demostrar que la sucesión $\{q_n - q'_n\}$ es de Cauchy, puesto que por hipótesis y para un ϵ cualquiera es posible determinar dos números naturales n y n' tales que

$$|q_i - q_j| < \varepsilon/2 \quad \text{para } i, j > n$$

$$|q'_i - q'_j| < \varepsilon/2 \quad \text{para } i, j > n'$$

y si m es el ~~mayor~~ mayor de los números n y n' tendremos

$$|(q_i - q'_i) - (q_j - q'_j)| < \varepsilon \quad \text{para } i, j > m$$

y por lo tanto, $\{q_n - q'_n\}$ ~~es~~ es una sucesión de Cauchy.

Por consiguiente, aplicando a $\{q_n - q'_n\}$ la proposición 4, lo cual es posible por ~~no~~ no tener límite ~~no~~ o ~~lo~~ puesto que hemos supuesto $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ de diferente clase, tendremos que existe un $\eta > 0$ y un n tales que se cumple una y solo una de las

$$q_i - q'_i > \eta \quad \text{si } i > n$$

$$q_i - q'_i \leq -\eta \quad \text{si } i > n$$

lo cual termina la demostración

Además el hecho de que se verifique ~~la (12) o bien la (13)~~ no depende de los ~~elementos~~ una desigualdad de la forma (12) o bien de ~~la~~ la forma (13) no depende de los elementos $\{u, v, w\}$ y $\{q_i\}$ particulares elegidos sino de las clases a que pertenecen cada uno de ellos, según puede demostrarse fácilmente.

Además la elección ^{representante} de los ~~elementos~~ $\{q_i\}$ y $\{q'_i\}$ no influye en que se verifique la (12) o bien la (13) pues puede demostrarse fácilmente ~~del~~ que el hecho que se verifique la una o la otra depende únicamente de las clases ^a que pertenecen dichos representantes. Será pues correcta la siguiente definición del orden entre números reales: