

Sea ahora $\{p_i\}$ otro representante pertenece
a la misma clase que $\{q_i\}$, entonces
por definición podremos determinar un n'
tal que, si $i > n'$, se cumple

$$|q_i - p_i| < \frac{\eta}{2}$$

y en consecuencia, si m representa el
mayor de los números n y n' , de (12) re-
sultaría

$$p_i > q'_i + \frac{\eta}{2} \quad \text{si } i > m$$

mientras que si fuese la (13) la que
se cumpliera tendríamos

$$q'_i > p_i + \frac{\eta}{2} \quad \text{si } i > m$$

por lo tanto, con un pequeño cambio en el
valor de η , puede lograrse que sea siem-
pre la (12) o siempre la (13) la des-
igualdad que se cumpla de una mane-
ra independiente del representante de
la clase que ~~se~~ se ha elegido para re-
presentar la clase a que pertenece $\{q_i\}$.
y como lo mismo es cierto para la clase

a que pertenece $\{q'_i\}$, podemos afirmar que el hecho de que se cumpla la (12) o bien ^{de} que se cumpla (13) depende únicamente de las clases y no de los representantes elegidos para efectuar los cálculos.

~~Vea ^{que} correcta ~~manera~~ e independiente de los representantes elegidos la supuesta relación de orden entre números reales:~~

Sean r y r' dos números reales distintos representados por lo tanto ~~por~~ las clases de sucesiones de Cauchy de números racionales, aritméticos distintas, sea $\{q_i\}$ un representante de la clase que representa r y $\{q'_i\}$ un representante de la correspondiente a r' . Entonces si es posible determinar un n tal que ^{si $n > 0$}

$$(14) \quad q_i > q'_i + \eta \text{ para } i > n$$

diremos que $r > r'$. Puesto que las dos clases son distintas si no ^{es posible} verifican ~~no~~ verifican ~~se~~ ^{podría determinarse} ~~se~~ ^{determinar} η de modo que se

$$(14) \quad \text{se } \text{verifiquen}$$

$$(15) \quad q'_i > q_i + \eta \text{ para } i > n$$

según la proposición 5, y entonces diremos que
~~co-fo que es lo mismo~~ $p < r'$ ~~hemos~~ ~~demostrado~~ que con es-
 ta definición dos números reales verifica-
 ran siempre una y solo una de las tres
 relaciones

$$p = r'$$

$$p > r'$$

$$p < r'$$

En efecto, ~~según~~ según hemos visto, si no se
 verifica la primera, es decir, si los dos
 números son ~~representados por clases también distintas,~~ distintos, se verifica una
 de las dos restantes y una sola. Por otra
 parte si los números no son distintos
 serán representados por la misma clase
 de Cauchy, y entonces ~~por~~ ^{1.ª} definición
 de la clase $\{q_i - q'_i\}$ tendrá por límite 0, y
 ni las (14) ni las (15) pueden verificarse
 y por lo tanto, por definición no se cum-
 plirá ni la segunda ni la tercera
 relación entre p y r' . ~~En particular~~
 si ~~la tercera~~ ^{sabemos que} relación no se verifica
 se verificara pues la primera o la segun-

En efecto es fácil ~~averiguarse~~ ^{verificar} si
bien ~~de forma~~ laboriosa, establecer
que entre dos números reales existe
siempre dicha relación y que
esta es transitiva y antisimétrica.

da, y entonces escribiremos $r \geq r'$. Por ~~otra~~ ^{otra} ~~parte~~ ^{parte} si es la segunda la que sabemos que no se verifica entonces únicamente podremos afirmar que se verifica la primera o la tercera, y escribiremos $r \leq r'$.
 (o lo que es equivalente $r' \geq r$)
 Finalmente, si lo único que sabemos es que no se cumple la primera relación escribiremos simplemente $r \neq r'$ (que se lee r diferente de r').

~~Proposición~~ Proposición 5. - La relación $\geq$ (o $\leq$) es una relación de orden total en el conjunto de los números reales.

En efecto es total pues ~~entre~~ ^{entre} dos números reales cualquiera puede establecerse ^{siempre} la indicada relación $\geq$.

Evidentemente esta ~~relación~~ ^{relación} es reflexiva pues ~~si se toma~~ ^{si se toma} ~~un número cualquiera~~ ^{un número cualquiera} siempre es igual ~~a sí mismo~~ ^{por corresponder a la misma clase de números de Cantor} a sí mismo. En segundo lugar

la relación tiene la propiedad transitiva. en efecto, supuesto que $r \geq r'$ y $r' \geq r''$, pueden presentarse en otro caso

$$r = r'$$

$$r = r'$$

$$r > r'$$

$$r > r'$$

$$r' = r''$$

$$r' > r''$$

$$r' = r''$$

$$r' > r''$$

en cada uno de estos casos demostraremos que se puede llegar a la conclusión de que $r \geq r''$, o sea que ~~la~~ la relación tiene la propiedad transitiva. Sea $\{q_i\}$, $\{q'_i\}$ y $\{q''_i\}$ un representante de cada una de las clases de sucesiones de Cauchy que corresponden a r , r' y r'' respectivamente. En el primer caso $\{q_i\}$ y $\{q'_i\}$ ~~que~~ pertenecerían a la misma clase, y lo mismo sucedería ~~con~~ $\{q'_i\}$ y $\{q''_i\}$, por lo tanto $\{q_i\}$ y $\{q''_i\}$ también pertenecen a la misma clase, ~~y por consiguiente~~ y por consiguiente $r = r''$ y con mayor motivo $r \geq r''$.

En el segundo caso la clase a que pertenecen $\{q_i\}$ y $\{q'_i\}$ es la misma, en cuanto

a las sucesiones $\{q_i'\}$ y $\{q_i''\}$ por definición podemos determinar un número racional η y un número natural n tales que

$$q_i' > q_i'' + \eta \quad \text{para } i > n$$

y por consiguiente, igual que anteriormente, será posible demostrar la existencia de un m tal que

$$q_i > q_i' + \frac{\eta}{2} \quad \text{para } i > m$$

o sea $r > r''$, y con mayor motivo $r \geq r''$. Una demostración casi idéntica nos permite demostrar que en el tercer caso también se cumple la relación $r \geq r''$.

Finalmente, en el cuarto caso por definición tenemos que existe un $\eta > 0$ y un número natural n tales que

$$q_i > q_i' + \eta \quad \text{para } i > n$$

e igualmente existe un $\eta' > 0$ y un n' que verifican

$$q_i' > q_i'' + \eta' \quad \text{para } i > n'$$

~~Si m es el mayor de los números natura-
les n y n' , tenemos~~

~~$$q_i > q_i'' + \eta + \eta' \text{ para } i > m$$~~

~~lo que equivale a $r > r''$ y con mayor motivo~~
 ~~$r \geq r''$ En realidad hemos demostrado algo más, a saber que en los tres últimos casos
podemos afirmar $r > r''$.~~
~~Por último vamos a probar que la rela-
ción $\geq$ tiene la propiedad antisimétrica. En
efecto si~~

~~(15) $r \geq r'$ y $r' \geq r$~~

~~puesto que de las ~~tres~~ relaciones ~~se deducen~~
~~que se verifica que sea $r = r'$, $r > r'$ y $r < r'$ solamen-~~
~~te se puede verificar una, las dos re-~~
~~laciones, (15) permiten afirmar~~~~

~~$$r = r'$$~~

~~La relación $\geq$ tiene, ^{según acabamos de ver,} las propiedades
reflexiva, transitiva y antisimétrica es
pues una relación de orden, y como he-
mos demostrado que es total, queda de-
~~mostrada la proposición~~~~

Proposición 7.- La restricción a $\mathcal{L}$
de la relación $\geq$ definida en el conjunto

85

de los números reales R coincide con la ordenación del campo racional que hemos utilizado, y que el lector puede encontrar en el artículo correspondiente.

En efecto, sea $r = q$ y $r' = q'$ dos números racionales, como representantes de las clases correspondientes a r y a r' podemos utilizar dos sucesiones que tengan todos sus elementos iguales a q y a q' respectivamente. Entonces por las definiciones establecidas tendremos

$$r = r' \text{ si } q = q'$$

$$r > r' \text{ si } q > q'$$

$$r < r' \text{ si } q < q'$$

Lo cual demuestra la proposición.

~~Pr. - Suma de números. Ahora vamos a demostrar la proposición sobre el campo racional y el campo real R . Para ello definiremos una operación en R que cuando los números son racionales coincide con la suma definida en el campo racional.~~

subcampo $\mathbb{Q}$ del producto que acabamos de de-
finir en el cuerpo real $\mathbb{R}$ es simplemente pro-
ducto habitual para los números racionales.
~~La demostración es casi idéntica~~
~~a la de la proposición 8 para la suma.~~

Finalmente introduciendo el orden
es fácil demostrar que ~~si $r \geq r' \text{ y } r'' > 0$~~
~~entonces tendremos $r + r'' \geq r' + r''$ y del mis-~~
~~mo modo si $r \geq r' \text{ y } r'' < 0$ resulta $r + r'' \leq r' + r''$.~~

4.- Módulo.- Para cualquier número
real vamos a definir un módulo que sea
la extensión a $\mathbb{R}$ del módulo definido
en $\mathbb{Q}$. Sea r un número real en alguna
y sea $\{q_i\}$ ~~un~~ representante de la cla-
se de sucesiones de Cauchy que correspon-
de a r . Entonces el módulo de r que re-
presentaremos por $|r|$ será el número
que corresponde a la clase de sucesiones
de Cauchy uno de cuyos representantes es
 $\{|q_i|\}$, donde $|q_i|$ es el módulo definido en la

sección correspondiente al número racional.

Es fácil demostrar que esta definición del módulo es ^{correcta e} independiente del representante elegido. En efecto para los números racionales es conocida la siguiente desigualdad $\|q_i - q_j\| \leq |q_i - q_j|$ y por lo tanto si $\{q_i\}$ es una sucesión de Cauchy también lo es $\{1q_i\}$. Por otra parte si $\{p_i\}$ es otro representante de la misma clase de $\{q_i\}$ ~~se muestra que~~ ~~se muestra que~~ la desigualdad

$$\|q_i - p_i\| \leq |q_i - p_i|$$

permite afirmar que $\{1q_i\}$ y $\{1p_i\}$ serán de la misma clase, y por lo tanto la definición del módulo es independiente del representante elegido.

~~Para probar que la definición del módulo es independiente del representante elegido se muestra que si $\{q_i\}$ y $\{p_i\}$ son dos representantes de la misma clase de equivalencia, entonces $\|q_i - p_i\| \leq |q_i - p_i|$. Se muestra esto en tres casos:~~
~~1º Si $r > 0$ entonces $\|q_i - p_i\| = r$.~~
~~2º Si $r = 0$ entonces $\|q_i - p_i\| = 0$.~~
~~3º Si $r < 0$ entonces $\|q_i - p_i\| = -r$.~~
~~4º Igual que para el caso anterior.~~

28

Por otra parte, si r es un número real cualquiera correspondiente a una clase uno de cuyos representantes es $\{q_i\}$, representaremos por $-r$ al número ~~que~~ que corresponde a la clase que contiene el representante $\{-q_i\}$. Esta definición es correcta, pues si $\{q_i\}$ es una sucesión de Cauchy también lo será la $\{-q_i\}$, y además, la clase que corresponde a $-r$ es independiente del representante $\{q_i\}$ elegido en la clase que representa r .

Con estas definiciones son evidentes

1.ª Si $r \geq 0$ entonces $|r| = r$ ~~propiamente~~

2.ª Si $r \leq 0$ entonces $|r| = -r$ ~~propiamente~~

3.ª Si $|r| = 0$ entonces $r = 0$ 4.ª Si $r > 0$ entonces $-r < 0$ 5.ª Si $r < 0$ entonces $-r > 0$

6.ª Si $r < r'$, $-r > -r'$ Igual que para los números racionales los números reales > 0 se llaman positivos, mientras que los < 0 se llaman negativos.

5.ª Suma de números reales. - Ahora vamos a extender la operación suma del campo racional $\mathbb{Q}$ al campo real $\mathbb{R}$. Para ello definiremos una operación que cuando los números son racionales coincide con la suma definida en el campo racional, y además, que en $\mathbb{R}$ cumple las mismas leyes formales que la suma utilizada en el campo racional (véase el artículo correspondiente).

Sean r y r' dos números reales, y sean $\{q_i\}$ un representante de cada una de las clases que corresponden a r y r' respectivamente. Entonces la suma de r y r' , que representaremos por $r+r'$, será el número correspondiente a la clase de sucesiones de Cauchy que contiene el representante $\{q_i + q'_i\}$, donde $q_i + q'_i$ tiene el significado habitual en el campo racional. ~~Para~~

Para probar que esta definición es correcta basta demostrar que $\{q_i + q'_i\}$ es una sucesión de Cauchy y que el número $r+r'$ es independiente de los representantes particulares elegidos en su definición. Para probar lo primero se procede casi igual que al principio de la demostración de la proposición 5. y para probar la independencia respecto a los representantes elegidos se procede como sigue: Sea $\{p_i\}$ otro representante de la clase que corresponde a r y $\{p'_i\}$ otro representante correspondiente a r' . Por definición las sucesiones $\{q_i - p_i\}$ y $\{q'_i - p'_i\}$ tienen límites 0. Por consiguiente es fácil demostrar que también tendrá límite 0 la sucesión

$$\{(q_i + q'_i) - (p_i + p'_i)\}$$

lo que equivale a decir que las sucesiones

$$\{q_i + q'_i\} \quad \text{y} \quad \{p_i + p'_i\}$$