

pertenece a la misma clase, es decir, la de-
finición del número suma es independiente
de los representantes elegidos para su defi-
nición. Que es lo que queríamos demo-
strar. ~~Q.E.D.~~

La suma que acabamos de definir
es asociativa y conmutativa por serlo la
de los números racionales que interve-
nen al sumar los términos de los di-
ferentes representantes. Por otra parte
el número cero es neutro respecto a
ella, como puede comprobarse fácilmente.
Además ~~todo~~ ~~número~~ ~~que~~ cada número r
~~que~~ ~~supondremos~~ corresponde a
una clase que contiene el representante
 $\{q_i\}$ tiene un opuesto $-r$ que correspon-
de a una clase que contiene el repre-
sentante ~~que~~ $\{q_i\}$ ^{y el cual verifica $r + (-r) = 0$.} Por lo tanto los números
reales con la suma que acabamos
de definir forman un grupo abeliano.

La demostración se efectúa de mane-
ra semejante a la de la proporción 4

Proposición 8.- La restricción al campo racional $\mathbb{Q}$ de la suma ~~de números~~ que acabamos de definir para ~~el~~ el campo real $\mathbb{R}$ es la suma empleada en el artículo correspondiente de los números racionales.

~~En efecto, si $p = q + q'$ y $p' = q'' + q'''$ son dos números racionales, podemos elegir como representantes de las clases de sucesiones de Cauchy correspondientes las sucesiones que para cualquier valor de i verifican~~

$$q_i = q \quad \text{y} \quad q'_i = q'$$

~~Por lo tanto, la suma de los dos números será el que corresponde a la ~~la~~ ~~clase~~ clase de sucesiones de Cauchy ~~de~~ ~~un~~ uno de cuyos representantes ^{est.} verificara para todo valor de i~~

$$p_i = q_i + q'_i = q + q'$$

~~es decir el número suma será el mismo que corresponde según el método habitual en el campo racional, como hemos dicho.~~

Unicamente de las definiciones de orden y de suma se sigue inmediatamente que de $r > r'$ se deduce $r + r'' > r' + r''$, donde r'' es un numero real arbitrario, y de ello podemos deducir tambien que si $r \geq r'$ entonces $r + r'' \geq r' + r''$. Asimismo facilmente se deduce $|r + r'| \leq |r| + |r'|$.

6. - Producto de los numeros reales. - Antes de dar la definicion del producto debemos dar dos proposiciones, que nos permitan demostrar que la definicion que ~~nos~~ daremos es correcta, o mejor dicho que el producto de dos numeros reales es siempre otro numero real completamente determinado.

Proposicion I. - Los terminos de una sucesion de Cauchy son acotados superior e inferiormente.

En efecto, sea $\{q_i\}$ la sucesion de Cauchy dada. Por definicion, puede determinarse un numero n tal que
 para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$|q_i - q_j| < \varepsilon \quad \text{para} \quad i, j > n$$

por lo tanto ~~maximamente~~ de la identidad

33

$$q_j = q_{n+1} + (q_j - q_{n+1})$$

~~se sigue~~ se sigue

$$|q_j| \leq |q_{n+1}| + \varepsilon \quad \text{para } j > n$$

y si suponemos que M es una cantidad superior al mayor de los números $|q_1|, |q_2|, \dots, |q_n|$.

$|q_{n+1}| + \varepsilon$, para todo valor de i se verificara

$$|q_i| \leq M$$

o lo que es equivalente

$$-M < q_i < M \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Proposición 10. - Sean $\{q_i\}$ y $\{q'_i\}$ dos sucesiones de Cauchy, entonces la sucesión $\{q_i, q'_i\}$ ~~es~~ es también de Cauchy.

En efecto, sean M y M' las cotas que según la proposición 9 corresponden respectivamente a las sucesiones $\{q_i\}$ y $\{q'_i\}$. Además por hipótesis y para cualquier $\varepsilon > 0$ sea posible determinar dos números naturales n y n' tales que

$$(17) \quad |q_i - q_j| < \varepsilon / (2M') \quad \text{para } i, j > n$$

$$(18) \quad |q'_i - q'_f| < \varepsilon / (2M) \quad \text{para } i, f > n'$$

por otra parte de la identidad

$$q_i q'_i - q_f q'_f = (q_i - q_f) q'_i + (q'_i - q'_f) q_f$$

se deduce

$$|q_i q'_i - q_f q'_f| \leq |q_i - q_f| |q'_i| + |q'_i - q'_f| |q_f|$$

y de (17), (18) y el significado de n y n' se sigue

$$|q_i q'_i - q_f q'_f| < \varepsilon \quad \text{si } i, f > m$$

donde m es el mayor de los números naturales n y n'

Definición del producto ~~de~~ de dos números. - Sean r y r' dos números reales cualesquiera, y sean $\{q_i\}$ y $\{q'_i\}$ un representante respectivo de cada una de las clases de sucesiones de Cauchy que representan r y r' , entonces el producto rr' sea el número representado por la clase de sucesiones de Cauchy uno de cuyos representantes es el $\{q_i q'_i\}$.

En primer lugar la proposición demuestra que $\{q_i q'_i\}$ es una sucesión de Can

35

chy que podemos tomar como representante de
 una clase que por lo tanto correspondiera a
 un numero real determinado. Para probar
 que esta definicion ~~determina~~ efectivamente
 el numero producto basta demostrar que este
 es independiente de los representantes elegidos
 sea pues $\{p_i\}$ otro representante de la misma clase
 que $\{q_i\}$ Por definicion pues la sucesion $\{q_i - p_i\}$
 tiene limite 0 y por consiguiente, ~~existe una~~
~~manera natural~~ para todo $\varepsilon > 0$ es po-
 sible determinar un numero natural
 n tal que

$$|q_i - p_i| < \varepsilon / N' \text{ para } i > n$$

donde N' es la cota que por la proposicion 9
 puede determinarse para los modulos de
 los terminos de la sucesion $\{q'_i\}$. Por lo
 tanto de esta desigualdad se deduce

$$|q_i q'_i - p_i q'_i| < \varepsilon \text{ para } i > n$$

como ε es arbitrario, esto demuestra que
 $\{q_i q'_i\}$ y $\{p_i q'_i\}$ pertenecen a la misma clase
 y ~~que~~ ^{pues} que lo mismo puede demostrarse.

37

el podemos enumerar y demostrar uno de los principales resultados de esta sección, a saber:

Proposición 11. - Los números reales con la definición de suma y producto que hemos dado forman un cuerpo. ~~anterior~~

~~Anterior~~ Para probar que es un cuerpo numérico se ~~debe~~ debe demostrar que todo número ~~real~~ diferente del ~~zero~~ tiene un inverso respecto al producto, pues ^{según} ~~esto~~ ~~hemos dicho anteriormente~~ ~~estas propiedades~~ ~~demuestran~~ ~~anterior~~ ~~ya queda clara que~~ es un anillo con la propiedad conmutativa en el producto.

Según la proposición 4 para todo representante $\{q_i\}$ de una clase de sucesiones de Cauchy que corresponden a un número diferente de ~~zero~~ es posible determinar un $\eta > 0$ y un número natural n tales que

$$|q_i| > \eta \quad \text{para } i > n$$