SUR LE CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DÉFINIES

1: Soit $f(x)$ une fonction continue sur le segment (a,b) et possédant sur cet même segment des dérivées continues jusqu'à l'ordre p (voir Remarque nº 2).
Je me propose obtenir des formules nouvelles applicables au calcul ~~numérique~~ approché de l'intégrale définie:

Soit $g(x)$ une fonction qui ne s'annule pas sur (a,b) et possédant aussi des dérivées continues au moins jusqu'à l'ordre p (voir Remarque nº 2).
Alors pour $n \leq p$ on pourra écrire, moyennant l'intégration par parties, ~~xxx~~ répetée n fois,

où $g_n(x)$ est une fonction donnée telle que $g_n^{(n)}(x) = g(x)$, et $P_n(x)$ un polynome arbitraire de degré $n-1$ [1].

[1] On pourrait considérer cet polynome contenu implicitement dans $g_n(x)$ mais il resulte plus avantageux, dans la suite de le mettre explicitement en évidence.

2

On sait qu'en prenant $g(x)=1$, divisant convenablement l'intervalle d'intégration en parties et choisissant pour chaque partie un polynome $P_n(x)$ approprié, on obtient les formules que M. G. Giraud a exposées dans une Note des Comptes rendus (¹); mais je me propose de particulariser tout autrement les polynomes $P_n(x)$, en laissant à $g(x)$ toute sa généralité seulement conditionnée par les propriétés que nous lui avons attribuées au commencement.

Pour obtenir un borne supérieur de l'intégrale du troisième membre de la formule (1) nous écrirons l'inégalité suivante (voir Remarque nº 3)

où $m = \max |g(x)-P_n(x)|$ sur (a,b). On voit que afin de rendre minimum cet borne supérieur on est conduit à choisir $P_n(x)$ égal au polynome d'approximation (dans le sens de Tchebyscheff) de degré $n-1$ de $g_n(x)$ sur (a,b).

Ceci posé nous définirons notre méthode de calcul approché de la maniere suivante: Prendre dans la formule (1) $P_n(x)$ égal au polynome d'approximation (dans le sens de Tchebyscheff) de degré $n-1$ de $g_n(x)$ et négliger l'intégrale du troisième membre, alors la partie restante de cet membre sera notre expression approchée de l'intégrale du premier membre. Nous avons donc une formule d'approximation pour chaque $g(x)$ et chaque $n \leq p$.

2. Maintenant nous demontrerons une propriété du méthode de calcul approché que nous venons d'exposer et nous verrons un des rôles que peut

(¹) Sur deux formules applicables au calcul numérique des integrales. (C.R. Paris tom.178 pag. 2227 (1924)).

jouer $g(x)$.

Selon une formule bien connue(¹), étant C le maximum de $|g(x)|$ sur (a,b) et en prenant $P_n(x)$ égal au polynome d'approximation de $g_n(x)$, on a

nous avons introduit le facteur $\sqrt{2}$ car $g_n(x)$ peut être imaginaire. Cette inégalité démontre que si $\frac{f(x)}{g(x)}$ est une fonction holomorphe dans le domaine fermé D formé par tous les points dont la distance au segment (a,b) est moindre ou égale à $\frac{1}{4}(b-a)$ l'erreur dela méthode que nous exposons dans cette note tend vers 0 quand n tend vers ∞.

Je pense utiliser cette propriété pour l'obtention d'une formule de sommabilité.

Remarque nº 1- Dès qu'on a calculé des tables pour quelques fonctions $g(x)$ (notamment pour $g(x)\equiv 1$) et pour l'intervalle $(-1,+1)$ on pourra employer nos expressions pour le calcul numérique des intégrales définies..

Remarque nº 2- Il n'est pas indispensable pour la validité des formules anterieures que $f(x)$ soit continue et dérivable sur (a,b); il suffit que $f(x)$ soit intégrable (même dans le sens de Lebesgue) et prendre $g(x)$ égale ~~ann~~ à une fonction intégrable (aussi même dans le sens de Lebesgue) et telle que $\frac{f(x)}{g(x)}$ soit continue et dérivable jusqu'à lórdre n.

Remarque nº 3- Onpeut employer au lieu de l'inégalité (A) un grand nombre d'autres inégalités entre lesquelles on peut citer les deux suivantes

---

(¹)Voir Bernstein - Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle (chap. I pag. 10 ~~form~~ formule 16) où $M = \max.\left|\frac{d^n}{dx^n}\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ sur (a, b) ,et

L'inégalité (B) nous porterait en suivant les mêmes considérations que nous avons fait pour (A) à prendre $P_n(x)$ égal au polynome qui rend $\int |g_n(x) - P_n(x)|\, dx$ minimum, et l'inégalité (C) au polymome qui rend $\int |g_n(x) - P_n(x)|^2 dx$ minimum. Les formules correspondantes auraient des propriétés tout à fait semblables aux formules dérivées del'inégalité (A).