

SUR LE CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES  
DÉFINIES

F. Sunyer i Balaguer

1: Soit  $f(x)$  une fonction continue sur le segment  $(a, b)$  et possédant sur cet même segment des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $p$  (voir Remarque n° 2). Je me propose obtenir des formules nouvelles applicables au calcul approché de l'intégrale définie:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Soit  $g(x)$  une fonction qui ne s'annule pas sur  $(a, b)$  et possédant aussi des dérivées continues au moins jusqu'à l'ordre  $p$  (voir Remarque n° 2).

Alors pour  $n \leq p$  on pourra écrire, moyennant l'intégration par parties, répétée  $n$  fois,

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) \frac{f(x)}{g(x)} dx = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left[ \left( g_n^{(n-i)}(x) - P_n^{(n-i)}(x) \right) \frac{d^{i-1} f(x)}{dx^{i-1} g(x)} \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b \left( g_n^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x) \right) \frac{d^n f(x)}{dx^n g(x)} dx$$

où  $g_n^{(n)}(x)$  est une fonction donnée telle que  $g_n^{(n)}(x) = g(x)$ , et  $P_n(x)$  un polynome arbitraire de degré  $n-1$  (1).

On sait qu'en prenant  $g(x) \equiv 1$ , divisant convenablement l'intervalle d'intégration en parties et choisissant pour chaque partie un polynome

(1) On pourrait considérer cet polynome contenu implicitement dans  $g_n(x)$  mais il resulte plus avantageux, dans la suite de le mettre explicitement en évidence.

$P_n(x)$  approprié, on obtient les formules que M. G. Giraud a exposées dans une Note des Comptes rendus <sup>(2)</sup>; mais je me propose de particulariser tout autrement les polynomes  $P_n(x)$ , en laissant à  $g(x)$  toute sa généralité seulement conditionnée par les propriétés que nous lui avons attribuées au commencement.

Pour obtenir un borne supérieur de l'intégrale du troisième membre de la formule (1) nous écrirons l'inégalité suivante (voir Remarque n° 3)

$$(A) \quad \left| \int_a^b (g_n(x) - P_n(x)) \frac{d^n}{dx^n} \frac{f(x)}{g(x)} dx \right| \leq m \int_a^b \left| \frac{d^n}{dx^n} \frac{f(x)}{g(x)} \right| dx$$

où  $m = \max. |g_n(x) - P_n(x)|$  sur  $(a, b)$ . On voit que afin de rendre minimum cet borne supérieur on est conduit à choisir  $P_n(x)$  égal au polynome d'approximation (dans le sens de Tchebyscheff) de degré  $n-1$  de  $g_n(x)$  sur  $(a, b)$ .

Ceci posé nous définirons notre méthode de calcul approché de la manière suivante: Prendre dans la formule (1)  $P_n(x)$  égal au polynome d'approximation (dans le sens de Tchebyscheff) de degré  $n-1$  de  $g_n(x)$  et négliger l'intégrale du troisième membre, alors la partie restante de cet membre sera notre expression approchée de l'intégrale du premier membre. Nous avons donc une formule d'approximation pour chaque  $g(x)$  et chaque  $n \leq p$ .

2: Maintenant nous démontrerons une propriété de la méthode de calcul approché que nous venons d'exposer et nous verrons un des rôles que peut jouer  $g(x)$ .

Selon une formule bien connue <sup>(3)</sup>, étant  $G$  le maximum de  $|g(x)|$  sur  $(a, b)$

<sup>(2)</sup> Sur deux formules applicables au calcul numérique des intégrales (C.R. Paris tom. 178 pag. 2227 (1924))

<sup>(3)</sup> Voir Bernstein - Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle (chap. 1 pag. 10 formule 16)