

et en prenant $P_n(x)$ égal au polynome d'approximation de $q_n(x)$, on a

$$m \leq \sqrt{2} \frac{G}{n!} \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

nous avons introduit le facteur $\sqrt{2}$ car $q_n(x)$ peut être imaginaire, Cette inégalité démontre que si $\frac{f(x)}{q(x)}$ est une fonction holomorphe dans le domaine fermé D , formé par tous les points dont la distance au segment (a, b) est moindre ou égale à $\frac{b-a}{4}$ l'erreur de la méthode que nous exposons dans cette Note tend vers 0 quand n tend vers ∞ .

Je pense utiliser cette propriété pour l'obtention d'une formule de sommabilité.

Remarque n° 1 - Dès qu'on a calculé des tables pour quelques fonctions $q(x)$ (notamment pour $q(x) \equiv 1$) et pour l'intervalle $(-1, +1)$ on pourra employer nos expressions pour le calcul numériques des intégrales définies.

Remarque n° 2 - Il n'est pas indispensable pour la validité des formules antérieures que $f(x)$ soit continue et dérivable sur (a, b) ; il suffit que $f(x)$ soit intégrables (même dans le sens de Lebesgue) et prendre $q(x)$ égale à une fonction intégrable (aussi même dans le sens de Lebesgue) et telle que $\frac{f(x)}{q(x)}$ soit continue et dérivable jusqu'à l'ordre n .

Remarque n° 3 - On peut employer au lieu de l'inégalité (A) un grand nombre d'autres inégalités entre lesquelles on peut citer les deux suivantes

$$(B) \quad \left| \int_a^b (q_n(x) - P_n(x)) \frac{d^n}{dx^n} \frac{f(x)}{q(x)} dx \right| \leq M \int_a^b |q_n(x) - P_n(x)| dx$$

où $M = \max. \left| \frac{d^n}{dx^n} \frac{f(x)}{q(x)} \right|$ sur (a, b) , et

$$\left| \int_a^b (q_n(x) - P_n(x)) \frac{d^n}{dx^n} \frac{f(x)}{q(x)} dx \right|^2 \leq \left(\int_a^b |q_n(x) - P_n(x)|^2 dx \right) \left(\int_a^b \left| \frac{d^n}{dx^n} \frac{f(x)}{q(x)} \right|^2 dx \right)$$

L'inégalité (B) nous porterait en suivant les memes considérations que nous avons fait pour (A) à prendre $P_n(x)$ égal au polynome qui rend $\int_a^b |q_n(x) - P_n(x)| dx$ minimum, et l'inégalité (C) au polynome qui rend $\int_a^b |q_n(x) - P_n(x)|^2 dx$ minimum. Les formules correspondantes auraient des propriétés tout à fait semblables aux formules dérivées de l'inégalité (A).
