Nota 1.) Tiene que decir: existe infinidad de polinomios de grado n y con el coeficiente de grado m=1 que reducen á ó el integral siguiente

---

(Nota 3) En todo el trabajo supondremos la integracion efectuada entre dos limites reales y siguiendo el segmento real comprendido entre ellos. En la mayoria de los casos puede hacerse que se cumpla este requisito mediante ~~el siguiente procedimiento~~ las tres operaciones siguientes combinadas convenientemente 1º Si la funcion a integrar es analitica cambio de segmento de integracion teniendo en cuenta el teorema de integral de Cauchy.
2º Cambio de variables que hagan corresponder al segmento dado o al segmento deducido de este mediante ~~las~~ dos las otras operaciones un segmento del eje real.

3º Division del segmento dado o del segmento derivado de este mediante de la primera operacion en segmentos parciales 1

(Nota 4) De momento y hasta nuevo aviso consideraremos la funcion f(X) como derivable tantas veces como sean necesario para nuestras formulas ademas tanto ella como sus derivadas las supondremos integrables esto no quita que pueda ~~tener puntos de desconti-~~ ~~nuidad~~ ~~que~~ ~~tenga de~~ ser discontinua ~~primera especie~~ de primera especie en un conjunto integral de puntos

---

Muchas veces en cuestiones de analisis, de fisica ó de quimica es preciso conocer ~~como~~ expresion aproximada de una funcion cualquier cuya expresion no se conoce exactamente o bien por tratarse de una funcion trascendente que tener su desarrollo en serie muy poco convergente no es conveniente usarlo.

Particularmente muchas veces interesa conocer una expresion aproximada de una integral ~~para esto para [illegible] muchos metodos. [illegible] [illegible] [illegible] caso~~ en este trabajo vengo a exponer un metodo yo creo nuevo para este ultimo caso.

Se trata pues de conocer la expresión aproximada del integral definido entre a y x (nota 3) de la funcion $f(x)$ (nota 4) cuya primitiva nos es desconocida, ~~[illegible] [illegible] a y [illegible] [illegible] [illegible]~~ a siendo una constante y x la variable en funcion de la cual

~~[illegible]~~ tenemos ~~[illegible]~~ que expresa el integral susodicho.

Empezamos por hacer n integraciones parciales dejando indeterminadas las constantes de integración tendremos.

~~$\int_a^x f(x)\,dx = [(x + [illegible]) f(x)]$~~

$$(1)\quad \int_a^x f(x)\,dx = \left[\left(x+\frac{p_0}{n}\right) f(x)\right]_a^x - \int_a^x \left(x+\frac{p_0}{n}\right) f'(x)\,dx =$$

$$= \left[\left(x+\frac{p_0}{n}\right) f(x)\right]_a^x - \left[\left(\frac{x^2}{2}+\frac{p_0}{n}x+\frac{p_1}{n(n-1)}\right) f'(x)\right]_a^x$$

$$+ \int_a^x \left(\frac{x^2}{2}+\frac{p_0}{n}x+\frac{p_1}{n(n-1)}\right) f''(x)\,dx = \cdots\cdots =$$

$$= \left[\left(x+\frac{p_0}{n}\right) f(x)\right]_a^x - \left[\left(\frac{x^2}{2}+\frac{p_0}{n}x+\frac{p_1}{n(n-1)}\right) f'(x)\right]_a^x$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{n!}\left(x^n + p_0 x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \cdots\right.\right.$$

$$\left.\left. + p_n\right) f^{(n-1)}(x)\right]_a^x + (-1)^n \int_a^x \frac{1}{n!} P(x) f^{(n)}(x)\,dx$$

Habiendo puesto en el último integral para abreviar $P(x) = x^n + p_0 x^{n-1} + \cdots + p_n$.

Si despreciamos la parte que aun queda bajo el signo integral evidentemente cometeremos un error cuyo valor absoluto e ~~[illegible]~~ satisfará a las siguientes desigualdades

$$n!\,e = \left|\int_a^x P(x) f^{(n)}(x)\,dx\right| \leqq \int_a^x |P(x)|\cdot|f^{(n)}(x)|\,dx$$

$\leq M \int_d^c |P(x)| dx$ (A)

Siendo M el máximo de la función $|f^{(n+1)}(x)|$ entre (c, d) y los límites c y d ~~son~~ siendo buscados del siguiente modo supongamos 1º x siempre mayor que a entonces tomaremos ~~para el valor~~ valor $d = a$ y c igual al máximo valor de x que nos interesa 2º $x < $ ~~a~~ entonces tomaremos ~~para~~ $c = a$ y $d =$ al menor valor de x que nos interesa, y 3º nos interesan valores de x tanto mayores como menores que a entonces tomaremos para c el mayor valor que nos interesa de x y para d el menor valor también que nos interesa de x.

Ahora bien para cada valor de x ~~podremos hallar~~ existe un polinomio que reduzca á 0 el integral (nota 1)

$$\int_a^x P(z)\, f^{(n)}(z)\, dz$$

Pero para encontrar este polinomio sería necesario el conocimiento del valor de los ~~n~~ integrales contenidos en la expresión siguiente

$$\int_a^x z^k f^{(n)}(z)\,dz \qquad (k=1,2,\dots,n.)$$

Como el conocimiento de estos integrales para necesario la aplicacion del metodo pues ~~darian~~ ~~can~~ conocer directamente el integral que buscamos. ~~Los~~ ~~supondremos~~ ~~ahora~~ supondremos desconocido el

$$(2) \qquad \int_a^x z^n f^{(n)}(z)\,dz$$

Los otros ~~por la form~~ para que sea aplicable la formula (1) es necesario sean conocidos ~~por tanto~~ ademas por el conocimiento exacto del error cometido al despreciar la parte que queda aun debajo el signo integral en la formula (1) tambien nos es preciso el conocimiento del integral (2) todos estos razonamientos nos inducen a buscar no el polinomio que rinde minimo el error sino el polinomio que rinde minimo el maximo que nosotros podemos fijar para ese error basandonos en las desigualdades (A). buscaremos pues el polinomio P de grado n. con el coeficiente de grado n igual a 1 que renda minimo el valor del integral siguiente

$$(3) \qquad \int_{d}^{c} |P|\, dq$$

Por las 2 rayas verticales no hemos querido solamente representar el valor absoluto de cantidades negativas si no tambien el modulo de las cantidades complejas comprendidas entre estas 2 rayas (como se hace en la teoria de funciones) Hecha esta aclaracion pasemos a determinar el polinomio en cuestion evidentemente podremos poner ~~P~~ P bajo la forma siguiente

$$(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_n)$$

representando por $y_1\ y_2\ y_3 \cdots y_n$ las raices del polinomio P. Como que y en todo el intervalo de integración es real, no puede, el polinomio que rinda minimo el valor del integral ~~#~~ (3)

tener raices imaginarias como lo demuestra el siguiente razonamiento: supongamos que y_1 sea una cantidad compleja de la forma $m + i\,n$ y no hagamos ninguna hipotesis sobre las cantidades y_2 y_3 .... y_n el valor absoluto de $|P|$ sera igual a
$|y - m - i\,n| \cdot |y - y_2| \cdot \ldots |y - y_n|$.
por todo valor real de y la expresion $|y - m| \cdot |y - y_2| \ldots |y - y_n|$ sera menor que la anterior y por tanto el integral de esta segunda expresion sera menor tambien que el de la primera, repitiendo este razonamiento para todas las raices imaginarias veremos que el polinomio que buscamos debe tenerlas todas reales.
Supongamos que una de estas tambien reales por ejemplo la y_1 sea exterior al segmento $(a.c)$ entonces ~~razonando como~~

veremos
que el polinomio que tenga en
vez de esta raíz la a si es a la izquierda ~~negativa~~ y la c si es a la derecha ~~positiva~~
será menor dentro de todo el
intervalo (a, c) que el que
tenga por raíz y y por tanto
su integral será menor que
el integral del ~~el~~ primero
Así hemos demostrado que
el polinomio que buscamos
si existe debe tener todas sus
raíces reales y comprendidas
en el segmento (a, c) esto
casi podríamos considerarlo
como evidente. Ahora la existencia
de dicho polinomio resulta
del siguiente hecho el integral
es función continua de
las raíces del polinomio P(x) por
tanto al variar estas en el
intervalo finito (a, c) dicha

función alcanzara su mínimo al menos una vez por tanto existirá al menos un polinomio que satisfará las condiciones que nosotros le ~~habemos~~ hemos impuesto.

El polinomio que rinde mínimo el integral (3) debe satisfacer a la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dy_1}\left(\int_d^c |P|\,dy\right)\Delta y_1 + \frac{d}{dy_2}\left(\int_d^c |P|\,dy\right)\Delta y_2 + \dots + \frac{d}{dy_n}\left(\int_d^c |P|\,dy\right)\Delta y_n = 0$$

~~Cualquiera~~ Cualesquiera que sean los valores de Δy_1 $\Delta y_2 \dots \Delta y_n$ por tanto debemos tener las n igualdades

$$\frac{d}{dy_1}\left(\int_d^c |P|\,dy\right) = 0$$

(4) $$\frac{d}{dy_2}\left(\int_d^c |P|\,dy\right) = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dy_n}\left(\int_d^c |P| \, dy\right) = 0$$

Ademas la siguiente igualdad es evidente cuando $d \leqq y_1 \leqq \cdots \leqq y_n \leqq c$

$$\int_d^c |P| \, dy = (-1)^n \left(\int_d^{y_1} P \, dy - \int_{y_1}^{y_2} P \, dy + \cdots + (-1)^{k+1} \int_{y_{k-1}}^{y_k} P \, dy + \cdots + (-1)^n \int_{y_n}^{c} P \, dy \right)$$

Teniendo en cuenta esta igualdad las cinco se transforman en estas otras teniendo en cuenta que los limites de integracion excepcion hecha de d y c son ~~iguales a los~~ por definicion raices de Q (Por ahora ~~podem~~ debemos suponer pues no hemos demostrado lo contrario que ~~y~~ las raices y_n pueden coincidir ~~~~ ~~~~ con d y c)

$$\int_d^{y_1} (y - y_2)(y - y_3) \cdots\cdots (y - y_n) \, dy$$

$$-\int_{y_1}^{y_2}(y-y_2)(y-y_3)\cdots(y-y_n)\,dy+\cdots=0$$

$$5)\int_{d}^{y_1}(y-y_1)(y-y_3)\cdots(y-y_n)\,dy-\cdots=0$$

....

....

$$\int_{d}^{y_1}(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_{n-1})\,dy-\cdots=0$$

estas ~~ecuaciones~~ equaciones son de grado n ~~pero como el termino de grado n~~ y por tanto segun el teorema de Besout la ecoacion final de que dependen las raices es de grado n^{n}; pero cuando n es par entonces el integral que tiene por limites y_1 y d y el integral que tiene por limites c y y_n tienen el mismo signo entonces sumando todas las ecoaciones 5 esta suma se reducira a (6) $P(C)-P(d)=0$

7) Esta ecoacion es de grado $n-1$ ademas los valores de $y_1\ y_2 \cdots y_n$

que satisfagan a esta y a $n-1$ de las 5 satisfarán evidentemente a la otra ecuación 5 y viceversa los valores que satisfagan a las n ecuaciones 5 satisfarán a esta por tanto podremos tomar como ecuaciones determinantes de $y_1, y_2 \ldots$ $\ldots y_{n-1}$ ecuaciones 5 y la ecuación 6 y la ecuación final resultante será de grado $(n-1)n^{n-1}$

~~todo y se~~ A pesar de esta pequeña simplificación la busca del polinomio o de los polinomios en cuestión se hace prácticamente imposible a partir del 3= grado inclusive, pues además del trabajo improbo que representa de resolver ecuaciones de grado 27, 192 y de grado una vez resueltas estas ecuaciones hay que empezar un análisis para separar las soluciones interesantes de la

Soluciones parasitas ~~...~~ (maximos minimos mayores que el que nos interesa, polinomios estacionarios). Ahora bien volvamos a fijar nuestra atención en las desigualdades ~~A~~ a las cuales transformaremos ~~...~~ quedando de la siguiente ~~...~~ forma

$$e = \frac{1}{n!} \left| \int_a^x P(z) f^{(n)}(z)\, dz \right| \leq \frac{1}{n!} k \int_d^c |f^{(n)}| dz$$

(B)

$$\leq \frac{1}{n!} m k (c - d)$$

teniendo m, c y d el mismo significado que anteriormente y k el maximo valor que alcanza $|P|$ en el intervalo (c, d) por las razones ~~expuestas~~ anteriormente y por las dificultades barajadas pero ahora en B) que hemos encontrado en la busca del polinomio que rinde minimo $\int_d^c |P| dz$ podemos ahora intentar la busca del polinomio de grado n con el coeficiente del grado maximo que tiene menor su máximo ente (C d), como veremos esta busca es mas sencilla que la anterior debido principalmente a que ya conocemos desde un principio una de las incognitas que buscamos y esto nos permite aplicar una gran simplificación al metodo para encontrar dicho polinomio como veremos mas adelante ~~todo~~ a pesar de que el máximo que nosotros fijamos ahora es mayor que el que nos permitian fijar los primeros polinomios esto no quiere decir que siempre el error cometido usando los primeros polinomios sea menor que el cometido usando los segundos pues por alguna funcion ~~[illegible]~~ es evidente que puede darse el caso inverso.

Para encontrar estos segundos polinomios debemos antes de entrar en la busca propiamente dicha algunas consideraciones sobre las propiedades de los polinomios de aproximación de Tchebicheff para esta traduciremos la parte que nos interesa de la bella exposición que hace sobre estos polinomios E. Borel en su libro Leçons sur le fonctions des variables reelles et les developpements en series de polynomes.

Dice ~~M~~ Borel refiriéndose al método de Tchebicheff:

"Su objeto es el siguiente: dada una función $f(x)$ continua en el intervalo $a\,b$ buscar si existe un polinomio aproximado $\Pi(x)$, ~~tal de una aproximación~~ que dé una aproximación superior a todos los polinomios ~~[illegible]~~ del mismo grado n."

"Para precisar esta cuestión consideremos un polinomio de grado n: $P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ y pongamos

$$y = f(x) - P(x)$$

La función $|y|$ es continua en el

intervalo (a b); esta función pues alcanzará dentro este intervalo al menos una vez su máximo m.

Cuando el polinomio varía conservando el mismo grado, m varie igualmente; ~~[illegible]~~ m es pues función de ~~las~~ A_0 A_1 .... A_n : $m(A_0$ $A_1, \dots, A_n)$. esta función es al mismo tiempo continua ya que se puede hacer variarla, ~~las cantidades~~ ~~a~~ A_0 $A_1, \dots, A_n$ de cantidades suficientemente pequeñas para que $|y|$ varie de ~~[illegible]~~ una cantidad menor que ε en todo el intervalo limitado (a b) y por consiguiente para que m varie igualmente de una cantidad menor que ε. ~~δ~~

~~[illegible]~~ Además, m es positivo ó nulo; si al mismo tiempo, como ~~[illegible]~~ usaremos a continuación, suponemos que $f(x)$ no coincide entre ~~a, b~~ a y b con ningún polinomio de grado n, m será seguramente positivo. Por lo tanto, el conjunto de valores de m, cuando se hacen variar $A_0, \ldots, A_n$ de un modo cualquier, tiene ~~[illegible]~~ ciertamente un limite inferior μ. Se trata de saber si este limite inferior es alcanzado por un polinomio determinado de grado n:

$$\Pi(X) = \alpha_0 X^n + \cdots + \alpha_n$$

que ~~[illegible]~~ denominaremos polinomio de aproximación de grado n

~~La~~ La función ~~[illegible]~~

$m(A_0, \ldots, A_n)$ siendo continua alcanza sin duda su limite inferior μ' cuando $A_0, \ldots, A_n$ varian en ~~un~~ dominio acotado y cerrado ~~[illegible]~~ ($\mathcal{E}$) es decir, en particular cuando las ~~[illegible]~~ A_i permanecen entre limites finitos dados). Pero en general μ' sera superior a μ.

Para escapar a esta dificultad vamos a demostrar que se pueden determinar unos limites para las ~~[illegible]~~ A tales que designando por μ' el limite inferior de menos las A permanecen entre estos límites se tiene sin duda $\mu' = \mu$

Observemos primeramente que μ es a lo mas = al maximo M de $|f(x)|$ en el intervalo (a, b) La que se tiene

$$\mu \leqq m(0, 0, \cdots, 0) = \text{máximo de}$$

$$|f(x) - 0| \text{ en } (a\ b) = M$$

Por consiguiente, no cambiaremos el problema si lo ~~aproximamos~~ limitamos a los polinomios de grado n por los cuales $m \leqq M$. Estos polinomios son tales que las variaciones de sus coeficientes son acotados. En efecto, sea $P(x)$ uno de ellos se tiene entre a y b ~~las siguientes desigualdades~~

$$|P(x)| \leqq |f(x)| + |P(x) - f(x)| \leqq M + m$$

y como para los polinomios que nosotros hemos tomado: $m \leqq M$; se sigue que

$$|P(x)| \leqq 2M.$$

entre a y b.

« Según esto, se podrán escribir todos estos polinomios bajo la forma

$$P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} y_i \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},$$

donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ ~~abscisas~~ abscisas fijas comprendidas entre a y b y donde las y_i quedan en valor absoluto inferiores a 2 M."

« Emplearemos la notación (debida a Poincaré)

$$B_0 x^n + \cdots + B_n \ll B_0' x^n + \cdots + B_n'$$

(suponiendo $B_0', \ldots, B_n'$ todas positivas) para indicar que se tiene

$$|B_p| \leqq B_p' \quad (P = 0, 1, \ldots, n).$$

"Tendremos entonces

$$P(x) \ll 2M \sum \frac{(x+|x_0|)\cdots(x+|x_{i-1}|)(x+|x_{i+1}|)\cdots}{|(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)|}$$

« El segundo miembro es un polinomio donde los coeficientes son fijos, $M_0 x^n + \cdots + M_n$ por consiguiente, se tiene, por todo los polinomios considerados

(7) $|A_0| \leq M_0, \ldots, |A_n| \leq M_n$.

Por consiguiente, $m(A_0\, A_1, \ldots, A_n)$ alcanza su limite inferior μ por al menos un punto $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)$ del dominio D (?) definido por las desigualdades 7?

"Así es que existe al menos un polinomio de aproximacion de grado n: $\Pi(X) = \alpha_0 X^n + \ldots + \alpha_n$. Esto demuestra al mismo tiempo que μ es positivo: de lo contrario, si μ fuese nulo, $f(X)$ sería identica entre a y b a un polinomio $\Pi(X)$ de grado n, lo que es contrario á la hipotesis.

"Vamos ahora á demostrar una propiedad esencial de los polinomios de aproximación: solamente existe un polinomio de aproximación ~~de grado~~ de grado n (n dado cualquiera) para la funcion continua $f(X)$ en el intervalo $(a\ b)$.

---

(1) Este razonamiento no excluye la hipotesis $\alpha_0 = 0$. es decir ~~[illegible]~~ donde el grado del polinomio $\Pi(X)$ sera inferior a n. Nosotros (1) lo consideraremos aun como de grado n con el primer coeficiente nulo.

«Sabemos ya que existe al menos uno: $\Pi(X)$. Pongamos $y = f(X) - \Pi(X)$. La función continua $|y|$ alcanza su máximo μ para al menos un valor ~~de X en un intervalo de (a b)~~ de X dentro el intervalo $(a\ b)$. Sea α este valor y β el valor correspondiente de y; se tiene $\beta = \pm\mu$. Denominemos A' el conjunto de puntos α' por los cuales $\beta' = \mu$ y A'' el conjunto de puntos α'' por los cuales se tiene $\beta'' = -\mu$; al menos uno de los conjuntos A' A'' no es nulo. Estos dos conjuntos son evidentemente cerrados ya que y es continua. Por otra parte se puede encontrar un número 2δ tal que la oscilación de y sea inferior a un número positivo $\varepsilon < \mu$ en todo intervalo de longitud inferior o igual a 2δ comprendido dentro el intervalo $(a\ b)$.»

«Por consiguiente, en todo intervalo de longitud δ teniendo por punto medio un punto α' no contendrá ningún punto α''. Igualmente

en todo intervalo J de longitud
δ teniendo por punto medio (un
punto x'' no contendrá ningún
punto x'. Finalmente, se puede
en torno de todo punto
x que no forma parte ni de A'
ni de A'', formar un
intervalo K teniendo este punto
por punto medio y que no conten-
ga en sentido extricto(1) ningún
punto de A' ~~ningún~~ ni de A''. Por
otra parte todos los puntos de
(a b) son ~~exteriores~~, en sentido ex-
tricto al menos a un intervalo
J K. Por consiguiente, se puede
formar un número finito
k de estos intervalos tal
que cada punto de (a b) sea con-
tenido en sentido amplio(2) dentro uno
~~al menos de entre estos~~ de ellos
al menos y lo mismo será de los
intervalos contiguos que se obtienen
suprimiendo en los k precedentes

(1) decir que un punto u está contenido en sentido extricto en el intervalo (C D) quiere decir que está contenido en este intervalo sin coincidir con C ni con D
(2) Sentido amplio después de esta explicación anterior no necesita

sus partes contiguas). Hecho esto, si dos intervalos consecutivos no encierran ni uno ni otro ningún punto de A' (ó ningún punto de A'') reuniremos estos dos intervalos en uno solo; después de haber efectuado esta operación tantas veces como sea posible, nos encontraremos que habremos reunido el segmento (a b) en un número finito de intervalos consecutivos $L_1, L_2, \dots, L_p$, que ~~no contendrán~~ cada uno ~~en sentido amplio que puntos de uno solo de los conjuntos A' y A'' que cada uno contendrán solamente puntos de uno~~ que cada uno contendrá en sentido amplio ~~solamente~~ algunos puntos ~~de uno de los~~ solamente de uno de los conjuntos A' y A'', y tales que dos intervalos consecutivos contienen puntos el uno de A' y el otro de A''.

« Además si L_q contiene puntos de A', L_{q+1} puntos de A'' la distancia del último punto de A' contenido dentro de L_q

al primer punto de A'' contenido en L_{q+1} es superior a ~~...~~ 2δ. Por consiguiente podemos suponer que la extremidad común de los dos intervalos L_q y L_{q+1} no pertenece ni a A', ni a A'' y que su distancia a los puntos de $(A'+A'')$ sea superior a δ. Por otra parte puede suceder que no ~~exista~~ haya más que un[1] intervalo L que será $(a\ b)$".

« El razonamiento precedente se aplica ~~...~~ cualquier que sea el polinomio $\pi(X)$. Cuando $\Pi(X)$ es un polinomio de aproximación digo que el número p de intervalos L es superior a $n+1$"

« En efecto, sean $a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}, b$ las extremidades de estos intervalos, y consideremos el polinomio[1]

$$\mathcal{L}(x) = \eta(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_{p-1}).$$

---

(1) En el caso en que no haya más que un ~~...~~ solo intervalo L tomaremos $\mathcal{L}(x) = \eta$

Digo que si $p-1 \leqq n$, se puede encontrar un polinomio $R(X)$ de grado n para el cual el máximo m de $|f(X)-R(X)|$ sea inferior al máximo μ de $|\gamma| = |f(X)-\Pi(X)|$. En efecto, si $p-1 \leqq n$, $Q(X)$ es de grado n todo lo más y por consiguiente también el polinomio: $R(X) = \Pi(X) + \mathcal{Q}(X)$. ~~Además~~ ~~Además~~ $\mathcal{Q}(X)$ ~~no~~ cambia ~~de signo~~ solamente de signo al pasar de un intervalo $\mathcal{L}_q$ al intervalo consecutivo $\mathcal{L}_{q+1}$. Por consiguiente podremos ~~tomar~~ determinar el signo de η de manera que $\mathcal{Q}(X)$ sea positivo en todo intervalo $\mathcal{L}_q$ que ~~no~~ ~~est~~ solamente contiene puntos x' y negativo en los ~~otros~~ demás.

~~Por~~ otra parte en todo intervalo $\mathcal{I}_1$ se tiene

$$\mu - \epsilon < f(X) - \Pi(X) \leqq \mu$$

y como ninguno intervalo $\mathcal{I}$ no contiene punto ξ_i, se tiene dentro de estos intervalos

$|\eta|\delta^{p-1} < |Q(x)| < |\eta|(b-a)^{p-1}$.

Finalmente, $Q(x)$ es positivo en todo intervalo I (ya que todo intervalo I está contenido en uno de los intervalos J que contienen ~~que contienen~~ los puntos α'). Entonces, si hemos tomado $|\eta| < \frac{\mu-\varepsilon}{(b-a)^{p-1}}$, se tendrá, en todos los intervalos I,

$$0 < f(x) - \Pi(x) - Q(x) < \mu - |\eta|\delta^{p-1}$$

Del mismo modo, se tendrá, en los intervalos J,

$$-(\mu - |\eta|\delta^{p-1}) < f(x) - R(x) < 0$$

~~Total~~ Enfin, llamemos E el conjunto de puntos de (a, b) que no son ~~de puntos~~ interiores en sentido estricto a ninguno intervalo I ó J. Los valores de $|y| = |f(x) - \pi(x)|$, por los puntos de este conjunto, son limitados superiormente y el límite superior μ' es ~~ciertamente~~ inferior a μ: ya que este límite superior μ' es alcanzado, ya sea en un punto exterior á los inter-

~~y~~ $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$, ya sea en una extremidad de este intervalo pero jamas en un punto interior en sentido extricto a un intervalo $\mathcal{I}$ ó $\mathcal{J}$, como ~~lo son~~ lo son todos los puntos en que $|y| = \mu$. Por consiguiente, en todo punto del intervalo (a, b), la función $|f(x) - R(x)|$ es inferior a una de las cantidades $\mu - |\eta| \varepsilon^{p-1}$ ó $\mu' < \mu$, ~~[illegible]~~

De donde $\Pi(x)$ no es un polinomio de aproximación de grado n."

"Reciprocamente sea un polinomio $P(x)$ de grado n y m el máximo de $|y|$ poniendo $y = f(x) - P(x)$. Formemos los intervalos $\mathcal{L}$ correspondientes si son en número superior a $n+1$, no existe ningun polinomio $P_1(x)$ de orden n, distinto de $P(x)$, por el cual el máximo m_1 de ~~[illegible]~~ $|f(x) - P_1(x)|$ sea inferior ó aun simplemente igual a m. En efecto, en ~~todo~~ cada ~~el~~ intervalo $\mathcal{L}$, $|y|$ alcanza al menos una vez su máximo.

sean, pues, por ejemplo,

$$\alpha_1' < \alpha_1'' < \alpha_2' < \alpha_2'' < \cdots$$

~~las~~ unas abrizas en numero supe-
rior a $n+1$ por las cuales y tome
los valores $m, -m, m, -m, \ldots$
Si se tiene ~~...~~ $m_1 \leqq m$, el polino-
mio de grado n el cual no es
identicamente nulo

$$\psi(x) = [f(x) - P(x)] - [f(x) - P_1(x)]$$

tomara $\alpha_1', \alpha_1'', \ldots$ los valores

$$\psi(\alpha_1') \geqq 0, \quad \psi(\alpha_1'') \leqq 0, \quad \psi(\alpha_2') \geqq 0 \cdots$$

Estas Condiciones, en numero supe-
rior a $n+1$, implican siempre
~~implican siempre~~ la existencia
de $n+1$ raices desiguales o iguales
para $\psi(x)$, lo que es imposible. De
donde $\psi(x)$ es identicamente nulo es
decir que $P_1(x)$ es identico a $P x$."
~~De~~ " De lo que precede resulta
~~inmediatamente~~ ~~...~~ inmediatamente
que no existe ~~...~~ mas que un ~~mas de un~~
solo polinomio de aproximacion
de grado n. Resulta tambien

que la condición necesaria y suficiente para que un polinomio de grado n sea un polinomio de aproximación es que el número de los intervalos L sea superior a n + 1." ~~Aquí termina~~

Aquí terminamos la traducción de la exposición de Emil Borel pues lo que sigue aun siendo sumamente interesante no nos sería útil para nuestro objeto. El que desea documentarse más extensamente sobre el método de aproximación de Tchevicheff puede consultar el libro de ~~[illegible]~~ Borel citado anteriormente o bien la memoria en que se basa ~~esta~~ la exposición de Borel debida a P. Kirchberger ~~[illegible]~~ (inaugural - dissertation: Ueber Tchevychefsche Annäherungs-methoden, ~~[illegible]~~ Gottingen, 1902

Vayamos ahora a la busca de nuestro polinomio ~~por~~ empleando las mismas notaciones que anteriormente el planteamiento del problema es el siguiente: Encontrar el polinomio de grado n cuyo ~~máximo en el intervalo $(c\ d)$ sea menor que el de cualquier otro polinomio~~ coeficiente de grado n es igual a uno para el cual el maximo K entre $(c\ d)$ sea menor que el de cualquier otro polinomio de grado n con su primer coeficiente tambien de grado uno.

Evidentemente este problema puede plantearse del siguiente modo: Encontrar el polinomio ~~de~~ aproximación $\pi(X)$ de Tchevicheff de grado $n-1$ en el intervalo $(c\ d)$ para la función $Y(X) = X^n$.

Hemos visto que la función $f(X) - \pi(X) = X^n - \pi(X)$ debe ~~satisfacer~~ tener la ~~siguiente~~ propiedad de que se pueden encontrar $n+1$ valores de x comprendidos entre c y d tales que pasando de uno al inmediato superior la función pase de ~~valor positivo~~ K a $-K$ o viceversa (siendo K el máximo de esta función) ~~a otro de negativo o vice versa~~. Esto implica que el polinomio de grado n: $x^n - \Pi(x)$ tenga todas sus raíces reales y comprendidas entre c y d. Pongamos $x^n - \Pi(x) = P(x)$. Como $P(x)$ es un polinomio de grado n en el intervalo $(c\ d)$ no podrá tener más de $n+1$ máximos (relativos a los valores que toma entre c y d) dos en los extremos y $n-1$ en los puntos en que $P'(x)$ sea nula. Ahora bien estos máximos en valor absoluto deben ser iguales á K por lo tanto podremos escribir

$$P(c) = K$$

$$P(d) = \pm K$$

En la segunda igualdad tomaremos el signo superior si n es un número par y el signo inferior en caso

Contrario.

Dividimos P^2 por P'; obtendremos el cociente Q y el resto R como que cuando $P' = 0$ $P = K$ por estos mismos valores $R = K^2$. Como que P' se anula por $n-1$ valores de X R tomará también $n-1$ veces el valor K^2 y siendo un polinomio de grado $n-2$ deberá ser idénticamente $= K^2$. Esto nos proporciona $n-1$ ecuaciones entre los coeficientes de P que unidas a las dos anteriores (a estas $n+1$ ecuaciones las llamaremos ecuaciones α) nos permite encontrar estos coeficientes y el valor de K ~~coefic~~

Hemos demostrado que ~~los polinomios de~~ los coeficientes de los polinomios que buscamos deben satisfacer a estas $n+1$ ecuaciones, pero, además de los polinomios que buscamos otros polinomios ~~de~~ pueden satisfacer y de hecho satisfacen a estas mismas $n+1$ ecuaciones. Cada polinomio de estos dará lugar a un sistema de raíces de estas repetida $n+1$ ecuaciones. ~~Vamos ahora a determinar las ecuaciones~~

Sean $x_1\, x_2\, x_3 \dots x_n$ ~~las~~ las n raices del polinomio que buscamos. Supongamos que las hemos tomado segun el orden de magnitudes crecientes es decir que satisfagan á las siguientes desigualdades.

$$x_1 < x_2 < \dots < x_3.$$

Con estas convenciones deberán además satisfacer a

$$x_1 + x_n = c+d, \quad x_2 + x_{n-1} = c+d \dots\dots$$

pues de no existir estas relaciones el polinomio que tuviese por raices

~~αxβ~~ $c+d-x_1, \quad c+b-x_2 \dots c+d-x_n$

tendría el mismo máximo en valor absoluto que el anterior y siendo distinto existirian dos polinomios de aproximación de grado $n-1$ en el intervalo cd para la función x^n cosa imposible según los razonamientos que hemos traducido. Ahora bien ~~las~~ ~~condiciones~~ ~~las~~ ~~igualdades~~ estas igualdades entre las raices dan para ~~el valor de~~ p el valor $(c+d)\frac{n}{2}$ entonces puede procederse para encontrar los otros coeficientes del polinomio del siguiente modo, se forma la ecuación, mediante por ejemplo el método de Liouville,

~~la ecuación~~ á que satisfacen los valores de K referente á las raíces[1] en que p tiene el valor $(c+d)\frac{n}{2}$ buscando á continuación ~~la raiz positiva cada valor~~ [illegible] la menor raiz positiva de esta ecuación seguidamente se forman ~~formar~~ las ecuaciones ~~, á que satisfacen siempre por ejemplo segun el metodo Liouville, los otros coeficientes para el valor antes dicho de p y tambien~~ [illegible] siempre, por ejemplo, segun el método de Liouville, á que satisfacen los otros ~~[illegible]~~ coeficientes para el valor encontrado anteriormente para ~~[illegible]~~ k el polinomio que encontraremos dando a los coeficientes los valores que satisfacen ~~simultáneamente~~ á estas ~~dos series de~~ ecuaciones sera único ~~pues accidentalmente podria presentarse que algunos coeficientes satisfaciera para dos ó mas valores distintos simultaneamente a estas dos series de ecuaciones~~ segun los razonamientos sobre los polinomios de aproximación.

---

(1) Por raiz entendemos como generalmente se hace, ~~todo~~ grupo de valores de las n-1 incognitas que satisfacen a las ~~[illegible]~~ x