CÒPIA

SOBRE EL CALCULO APROXIMADO DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

F. Sunyer i Balaguer

1 - Como es sabido, el desarrollo de una integral definida, según el método de Euler-MacLaurin, es en general divergente, de tal modo que, siend $(a,a+h)$ el intervalo de integración, no es posible encontrar un dominio finito D , tal, que la integral definida en el intervalo $(a, a+h)$ de toda función holomorfa dentro de D , pueda ser aproximada a voluntad por el método de Euler-MacLaurin con un número fijo de intervalos parciales. Mas aun existen funciones enteras cuya integral definida tampoco puede ser aproximada a voluntad por este procedimiento. De esta clase de funciones daremos dos ejemplos es esta breve nota.

Por otra parte, existen funciones cuyas integrales definidas pueden ser calculadas, por el procedimiento anterior, con un error menor que cua quier número dado, a pesar de tener su desarrollo de Euler-MacLaurin divergente. De esta clase de funciones tambien daremos un ejemplo.

2 - Como sea que todo lo dicho referente al método de Euler-MacLaurin, pu de tambien aplicarse a las fomulas que el profesor G. Giraud expone en un Nota ( ), fórmulas que contienen como caso particular la de Euler-MacLauri nosotros discutiremos directamente las expresiones del profesor Giraud, puesto que los resultados obtenidos, seran naturalmente válidos para el m tódo de Euler-MacLaurin.

3 - La primera fórmula del profesor Giraud (que es de la única que nos ocupa remos, pues todos los resultados pueden tambien aplicarse a la segunda

( ) Giraud.- Sur deux formules applicables au calcul numérique des intégra les (C.R. Paris 1924 Tom 178 pag. 2.227) fórmula) da como expresión aproximada de la integral.

$$I = \int_a^{a+h} f(x)\, dx$$

la siguiente:

$$S_p = h \sum_{K=0}^{K=m} \gamma_K f\left(a + \frac{1+x_K}{2} h\right) + \sum_{n=m}^{n=p} (-1)^{n-m+1} h^{2n} \frac{B_{m,n}}{(2n)!} \left(f^{(2n-1)}(a+h) - f^{(2n-1)}(a) \right)$$

El error de esta expresión viene dado por

$$I - S_p = \left(\frac{h}{2}\right)^{2P+3} \int_{-1}^{+1} f^{(2P+2)} \left(a + \frac{1+\alpha}{2} h\right) \psi_{m,2P+1}(\alpha)\, d\alpha .$$

Para la definicióm de las funciones ψ y de las constantes γ_K, x_K, $B_{m,n}$ consúltese la nota del profesor Giraud. Nosotros nos limitaremos a observar, que la fórmula (1) se reduce para $m = 1$, a la fórmula de Euler-Mac-Laurin, que las constantes $B_{m,n}$, cuando m permanece constante mientras n aumenta indefinidamente, son equivalentes a $\frac{c\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$, donde c es una constante que depende del valor de m, y finalmente, que las propiedades de las funciones ψ, análogas a las propiedades de los polinomi de Bernoulli, permiten escribir la siguiente igualdad.

$$\left(\frac{h}{2}\right)^{2P+3} \int_{-1}^{+1} f^{(2P+2)}\left(a + \frac{1+\alpha}{2} h\right) \psi_{m,2P+1}(\alpha)\, d\alpha = (-1)^{P-m} \frac{B_{m,P+1}}{(2P+2)!} h^{2P+3} f^{(2P+2)}(a + \theta h)$$

Se trata pues, de averiguar el comportamiento, para distintas funcion $f(x)$, de la expresión:

$$\left| \frac{B_{m,P+1}}{(2P+2)!} h^{2P+3} f^{(2P+2)}(a + \theta h) \right|$$

cuando $P \to \infty$

Supondremos en todo lo que sigue, que el intervalo $(a, a+h)$ es u segmento del eje real.

4 - La funcióndefinida por la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{2Kn}}{(2n)!} x^{2n} \qquad (K < 1)$$

es una función entera, Tomando $f(x)$ igual a esta función, digo que: Si $K>0$, el valor de la expresión (2) tiende el infinito, cuando $P \to \infty$ siguiendo una sucesión creciente cualquiera de números enteros, m permaneciendo constante, En efecto, recordando el valor asintótico de $B_{m,n}$ y siendo en este caso, para todo valor real de x ,

$$f^{(2P+2)}(x) \geq (2P+2)^{K(2P+2)}$$

tendremos

$$\left| \frac{B_{m,P+1}}{(2P+2)!} h^{2P+3} f^{(2P+2)}(a+\theta h) \right| > 2c \frac{(2P+2)^{K(2P+2)}}{\pi^{2P+2}} \left(\frac{h}{2}\right)^{2P+3}$$

lo que demuestra nuestra afirmación.

Otro ejemplo de esta clase de funciones, puede obtenerse del siguiente modo.

Sea

$$Log_K(x) = Log(Log_{K-1}(x))$$

donde K es un entero positivo y siendo $Log_1(x) = Log\, x$. Si $[u]$ es igual a u, cuando u es finita e igual a una cantidad finita cualquiera cuando u es infinita, entonces, la función definida por la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[Log_K(n)]^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

es entera, y tomada en lugar de $f(x)$, hará que la expresión (2) tienda al infinito cuando $P \to \infty$ siguiendo una sucesión creciente cualquiera de números enteros, m permaneciendo constante.

Por lo tanto, en el caso de la función representada por la serie (3) asi como en el caso de la representada por la serie (4), es posible encontrar un número $\varepsilon_m > 0$, dependiente solo de m , que satisfaga a la siguiente desigualdad

$$|I - s_P| > \varepsilon_m$$

para cualquier valor de p ,

Es mas, dividiendo el intervalo de integración $(a, a+h)$, en j intervalos parciales de longitud $\frac{h}{j}$, representando cada integral parcial por la expresión (1) correspondiente, y sumando, el valor absoluto del error podrà representarse por la expresión (2) dividida por j^{2p+2} . Por lo tanto, para las funciones (3) y (4), podrá encontrarse un número $\varepsilon_{m,j} > 0$ dependiente solamente de m y de j , que satisfaga a

$$\left| I - \sum s_p \right| > \varepsilon_{mj}$$

para cualquier valor de p

5 - Es evidente que, aun cuando el error no tienda a cero al tender p al infinito de un modo cualquiera, puede suceder que al tomar p una determinada sucesión creciente de números enteros, el error tienda a cero, contrariamente a lo que sucedia en las funciones (3) y (4), para las cuales ninguna sucesión de valores de p , hacia tender la expresión (2) a cero.

Un ejemplo de este comportamiento, distinto como acabamos de decir de de las funciones (3) y (4), lo da la siguiente función

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n_i}$$

donde n_i es una sucesión de números enteros, los cuales, satisfacen a la siguiente igualdad

$$n_{i+1} = (n_i + 1)^2$$

Digo que, para $p = n_i - 1$ la expresión (2) tenderá al infinito, cuando crezca indefinidamente, mientras que para $p = n_i$ la misma expresión (2) tenderá a cero cuando $i \to \infty$

Claro está, que hay que suponer el intervalo de integración, interior al circulo de convergencia de la serie (5), pues, este circulo es la frontera natural de la función definida por dicha serie (~~como puede demostrar~~ según un teorema de J. Hadamard)

La primera parte de nuestra af irmación, se demuestra fácilmente de l
siguiente manera: Sea $f(x)$ la función (5); la derivada $2P+2$ de $f(x)$ es en este caso, sobre el intervalo $(a, a+h)$, mayor que $\frac{(2n_i)!}{r^{2n_i}}$, y recordando la expresión asintótica de $B_{m,n}$, el error será mayor qu

$$C \frac{(2n_i)!}{(2\pi r)^{2n_i}} h^{2n_i+1}$$

Para la demostración de la segunda parte se procederá del modo siguiente:

Es facil deducir primeramente las siguientes desigualdades, cuando X se halla sobre el segmento $(a, a+h)$

$$\left|f^{(2n_i+2)}(x)\right| < \frac{d^{2n_i+2}}{d|x|^{2n_i+2}} \frac{\left(\frac{|x|}{r}\right)^{2n_{i+1}}}{1-\frac{|x|}{r}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2n_i+2} \binom{2n_i+2}{j} \frac{j!}{\left(1-\frac{|x|}{r}\right)^{j+1}} \frac{2n_{i+1}(2n_{i+1}-1)\cdots(2n_{i+1}-2n_i-1+j)}{r^{2n_i+2}} \left(\frac{|x|}{r}\right)^{2n_{i+1}-2n_i-2+j} <$$

$$< \frac{(2n_i+2)!}{r^{2n_i+2}} \frac{\left(\frac{|x|}{r}\right)^{2n_{i+1}-2n_i-2}}{\left(1-\frac{|x|}{r}\right)} \left(2n_{i+1} + \frac{\frac{|x|}{r}}{1-\frac{|x|}{r}}\right)^{2n_i+2}$$

Si $K<1$ es el máximo valor de $\left|\frac{x}{r}\right|$ sobre el intervalo de integració entonces resulta que la expresión (2) debe ser menor que la expresión siguiente

$$C_1 \left(C_2 (2n_i+2)\, 2n_{i+1}\right)^{2n_i+2} K^{2n_{i+1}-2n_i-2}$$

y como esta tiende a cero cuando $i \to \infty$, en virtud de la igualdad a que satisface la sucesión de los n_i, la segunda parte de nuestra afirmación queda tambien demostrada.

Barcelona enero 193