CÒPIA

SOBRE UN TEOREMA DEL PROFESOR PICARD

F. Sunyer i Balaguer

El teorema del profesor Picard, del que queremos dar una demostración, que nosotros creemos nueva, es el siguiente:

Si una función $f(z)$ meromorfa en todo punto finito del plano complejo no se reduce a una constante, los valores de $f(z)$ cubrirán toda la esfer de Riemann, excepto dos puntos como máximo.

La demostración que daremos, se basa, como la demostración Montel-Juli en la teoria de las familias normales, pero nosotros no emplearemos el teorema de Liouville, que quedará demostrado conjuntamente con el teorema de Picard.

Supongamos que el teorema no fuese valido, es decir que la función $f(z$ no tome ninguno de los tres valores $a_1, a_2, a_3,$. Sea la familia de funciones $g(z)$ formada por todas las funciones holomorfas en un dominio D Entonces, la familia formada por las funciones $F(z) = f(g(z))$ admitir los tres valores excepcionales $a_1, a_2, a_3,$ y por lo tanto será una familia normal en D

Este resultado es absurdo, como puede demostrarse del siguiente modo: Tomemos como dominio D el circulo $|z| < 3$. De la familia de las $g(z)$ s puede extraer la sucesión formada por los polinomios

$$g_n(z) = c\,\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^n + (z-\sqrt{z^2-1})^n}{(2+\sqrt{4-1})^n + (2-\sqrt{4-1})^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

donde c representa un número tal, que $f(c) \neq f(0)$. Es facil demostrar que la sucesión $f(g_n(z))$, cuando z es real y se halla sobre el intervalo $(-1, +1)$, converge hacia $f(0)$, mientras que, para $z = 2$, la misma sucesión converge hacia $f(c)$. Esto indica que de la sucesión $f(g_n(z))$ es imposible extraer ninguna sucesión que converja uniformemen

Todo caràcter de la función $f(z)$ que permitira afirmar, que la familia de las funciones $F(z)$ es normal, no puede pertenecer a ninguna función meromorfa en todo punto finito del plano complejo.

En particular podrà, pues, demostrarse de la misma manera que el anterior, el siguiente teorema que no es mas que una generalización de aquel

Sean, $f(z)$ una función meromorfa en todo punto finito, del plano complejo; $m_1, m_2, \ldots m_q$, q número enteros satisfaciendo a la siguiente desgualdad

$$\left(1-\frac{1}{m_1}\right)+\left(1-\frac{1}{m_2}\right)+\cdots\cdots+\left(1-\frac{1}{m_q}\right)>2$$

Es imposible encontrar q valores $a_1, a_2, \cdots a_q$, tales, que la ecuación $f(z)=a_i$ tenga todas sus raices de un orden de multiplicidad igual o superior a m_i $(i=1,2,\ldots q)$

Aunque la demostración que hemos dado, no puede aplicarse al segundo teorema de Picard, ni pueden obtenerse, por este mismo procedimiento, los bellos resultados de los profesores Montel, Julia, Ostrovoski etc, hemos creido, no obstante, que no estaba exenta de interes.

Barcelona enero 1939