SOBRE UNOS RESULTADOS RELACIONADOS CON LOS TEOREMAS DE PICARD LANDAU Y SCHOTTKY Y SOBRE UN CRITERIO DE CASI-NORMALIDAD

F. Sunyer Balaguer

Son tan numerosos los resultados relacionados con los teoremas de Picard, Landau y Schottky, que forman ya una rama sumamente compleja de la teoria de funciones. A este desarrollo han contribuido poderosamente los metodos descubiertos por R. y F. Nevanlinna y la teoria de las familias normales de P. Montel. En este articulo demostraremos unos resultados, pertenecientes a esta rama, que hemos obtenido utilizando precisamente los metodos anteriormente citados y la teoria de las familias normales.

Antes de entrar en materia, me es grato expresar mi agradecimiento al Prof. José Mª Orts por las delicadezas que de el vengo recibiendo y por las facilidades que me concede en la consulta de libros y revistas, permitiendome, de este modo, seguir mis trabajos con el minimo de dificultades. Asimismo, aprovecho esta ocasion para hacer constar mi reconocimiento al Prof. J. Hadamard por las atenciones que ha tenido para conmigo y por las frases alentadoras que me ha dirigido por mediacion de mi primo F. Carbona.

1. Resumen de notaciones clasicas - Aunque las notaciones de Rolf N Nevanlinna son sumamente conocidas, no creemos sean del todo inutil re-

petir aqui las definiciones de las expresiones

y mas aun, si se tiene en cuenta que tendremos que utilizarlas continuamente.

Sea una funcion de la variable compleja , meromorfa en el circulo (donde puede tener un valor infinito, es decir, el circulo puede comprender la totalidad del plano complejo). Empezaremos definiendo (para cualquier) como el numero de polos que tiene la funcion en el dominio , contando cada polo un numero de veces igual a su orden de multiplicidad. Por lo tanto, la notacion representara el numero de raices de la ecuacion en

comprendidas en el dominio cerrado , cada raiz siendo contada tantas veces como su orden de multiplicidad indica.

Cuando no hay que temer confusiones respecto a la funcion a que se refieren estas expresiones, suele escribirse y en lugar de y respectivamente.

La expresion (que suele escribirse, cuando no puede dar lugar a confusiones,) se define mediante la siguiente igualdad

Naturalmente la definicion de la expresion (o lo que es lo mismo) se obtiene substituyendo en la igualdad precedente y por y respectivamente.

La definicion de (que igual que las anteriores puede escribirse) se obtiene por

donde es igual a si y a cero si

de modo

De modo semejante

Finalmente llegamos a la definicion mas importante, que es la de la funcion (que se escribe tambien). Esta definicion es dada por la formula

y asimismo

Las propiedades de esta funcion son sumamente interesantes, pero tendriamos que salirnos completamente del tema que nos hemos propuesto, si quisieramos tan solo enunciarlas. El lector al cual interese su estudio podra consultar la obra de R. Nevanlinna "Le theoreme de Picard-Borel et la theorie des fonctions meromorphes" donde, ademas, encontrara una extensa bibliografia.

2. Primeramente vamos a demostrar un corolario (o mejor dicho, un caso particular) de un teorema de Nevanlinna; este es el siguiente:

Teorema I - Dada una funcion meromorfa, no constante y cuatro valores distintos y es imposible encontrar un numero tal que para todo sea satisfecha la siguiente desigualdad: es

con e independiente de

En efecto, supongamos que el teorema no sea cierto, es decir, que existan cuatro valores distintos y para los cuales sea posible encontrar dos numeros positivos y tales que para todo se cumpla la desigualdad (1), entonces es facil demostrar la existencia de otros dos numeros positivos y que tienen la propiedad de que todo satisface a

y con mayor motivo, teniendo en cuenta que es siempre positiva o nula, satisface a

y por lo tanto

Como sea que segun un teorema de R. Nevanlinna () la expresion que figura en el primer miembro de la desigualdad anterior es siempre : queda demostrado ab absurdo el teorema.

3. Obtendremos a continuacion un criterio de casi-normalidad para familias de funciones meromorfas; pero antes y a fin de dar mayor generalidad a nuestro enunciado, debemos definir algunas nuevas notaciones.

Representaremos por el numero de raices de la ecuacion

pertenecientes al dominio o a su frontera, cada raiz siendo contada tantas veces como indica su orden de multiplicidad.

En segundo lugar, sea un dominio simplemente conexo: efectuando la representacion conforme (,) de este dominio sobre un circulo representaremos por el dominio que por dicha transformacion corresponde al circulo

Finalmente con indicaremos el orden de la primera derivada de la funcion que no se anula en , es decir el grado respecto a del primer termino del desarrollo Taylor de .

()Vease R. Nevanlinna - Zur Theorie der meromorphen Funktionen (Acta Mat. T. 46, 1925).

Una vez definida estas nuevas notaciones puede ya enunciarse el criterio de casi-normalidad de que hemos hablado al principio de este numero.

TeoremaII - La familia de funciones meromorfas en un dominio simplemente conexo, sera casi-normal en este mismo dominio si es posible en contrar un punto interior a y cuatro valores y tales que las funciones de la familia satisfagan a las tres condiciones siguientes:

1ª es un punto regular para todas estas funciones.

2ª las cantidades

son menores que una cantidad igual para cualquier funcion de la familia

3ª para todo

donde e independiente de

Con estas condiciones la familia sera normal en ()

Demostracion - Pongamos entonces si logramos demostrar que la familia de funciones es casi-normal en el circulo habremos demostrado que tambien lo es la familia en

De la correspondencia entre estas dos familias resultan facilmente las

---

() Cuando una de las hay que substituir en el enunciado la expresion

por

Ademas la primera condicion de este teorema podria suprimirse, pero hemos supuesto que es un punto de holomorfia debido a que sin esta condicion hubiesemos tenido que complicar el enunciado ~~y~~ las notaciones.

igualdades

Siguiendo el metodo empleado por F. Nevanlinna () y teniendo en cuenta las tres primeras igualdades (2) y la segunda condicion de nuestro teorema, puede demostrarse que para (con constante)

donde es una constante finita que depende unicamente de y ; y a fortiori

Determinemos mediante

de donde se deduce

y de aqui

Ademas siendo definida de esta forma y segun un resultado clasico de la teoria de las funciones crecientes

excepto en una serie de intervalos . Estos intervalos poseen la propiedad

---

() vease F. Nevanlinna - Uber die Anwendung einer Klasse uniformisierender Tranzendenten zur Untersuchung der Wertwerteilung analytischer Funktionen (Acta.Mat.T. 50,1927 pag.159-188). Tambien podria llegarse a una formula p parecida mediante la aplicacion del segundo teorema fundamental de F. Nevanlinna (Vease la obra citada "Le theoreme de Picard-Borel etc. capitulo IV) pero su demostracion resultaria menos natural.

siguiente: la variacion total de en los intervalos en los cuales es menor que

Estas ultimas relaciones permiten transformar la desigualdad (3) en

valida para excepto en los intervalos

Es facil a partir de las definiciones que hemos dado, deducir que

y teniendo en cuenta la tercera condicion del teorema que tratamos de demostrar, puede escribirse la desigualdad (3) en la forma

valida como (3) para excepto en los intervalos repetidamente señalados

Representemos ahora por la mayor raiz real de la ecuacion en

resulta facil convencerse de que es una funcion no decreciente de En efecto, la expresion es no decreciente; sea pues entonces sera satisfecha la desigualdad

y por lo tanto

Como sea que es una funcion creciente de digo que para sera satisfecha

donde sera definida por

En efecto, dos circunstancias pueden presentarse: 1ª y 2ª En el primer caso la (4) sera satisfecha puesto que

En el 2º caso, evidentemente tiene que pertenecer a uno de los intervalos , pero siendo ,en el intervalo existiran necesariamente valores de exteriores a los puesto que la variacion de en es mayor mayor que la variacion total de esta misma expresion en los intervalos cuyos puntos son superiores a .Sea uno de estos valores en los cuales es satisfecha la (3): segun la definicion de se tiene

y recordando que queda demostrado que tambien en este caso vale la (4).

Como que la funcion es independiente de la funcion particular que se considere, mientras esta pertenezca a la familia que estamos considerando, la desigualdad (4) demuestra que las son para fija y menor que acotadas en conjunto, y, por lo tanto, tambien lo seran las y asimismo las y la familia de las sera, pues, casi-normal en el circulo y segun hemos dicho tambien lo sera la familia de las en

Ademas, partiendo de que las son acotadas en conjunto, se demuestra facilmente mediante las definiciones dadas en el numero 1,existencia de un valor igual para todas las funciones y tal que y,por lo tanto,

y de aqui se deduce immediatamente, que la familia de las es nomal en un entorno del origen, y esto demuestra la existencia de un en el cual la familia de las funciones es normal.

En la demostracion de este teorema hemos supuesto que es finita, es facil darse cuenta de que en caso contrario bastara razonar sobre en lugar de sobre para que tambien quede demostrado el teorema.

4. Pasemos a la demostracion de una extension del teorema de Landau

en el cual entra como condicion determinante la misma relacion entre las

que ha intervenido en los dos teoremas anteriores.

Teorema III - Sea

una funcion meromorfa en el circulo y tal que para

donde y . Entonces no puede sobrepasar una cierta cantidad finita que depende solamente de y :

En otros terminos, el teorema afirma la existencia de un numero

tal que toda funcion cuyo desarrollo Taylor en el origen

empieza por el binomio ; o bien no es meromorfa en el dominio

o bien existe para esta misma funcion un valor de que no satisface a la

face a la (1).

Si el teorema fuese falso, podria formarse una sucesion infinita de

funciones

de modo que la funcion satisfaciere a las condiciones del teorema en el circulo de radio . Sea un numero arbitrario; entonces el teorema II demuestra que la sucesion (5) es casi-normal en el circulo . Asi es que, podra extraerse de la sucesion (5) una nueva sucesion uniformemente convergente en el circulo excepto en las proximidades de un numero finito de puntos. Ademas segun hemos dicho en el transcurso de la demostracion del mismo teorema II las expresiones

son menores que un numero independiente y de aqui se deduce segun un resultado conocido de la teoria de las familias casi-normales, que el limite de la ultima sucesion es una funcion meromorfa en el mismo circulo

Ahora bien, segun el teorema II, la sucesion (5) sera normal en el origen, y por consiguiente

esto indica que no es constante.

Finalmente, resulta de la arbitrariedad de que la funcion es meromorfa en cualquier dominio finito del plano complejo: y aplicando algunos nos resultados conocidos puede verse que esta misma funcion satisface para cualquier finito a

lo que segun el teorema I es imposible. Queda pues demostrado el teorema

5. Despues de todo lo que antecede, se sigue casi inmediatamente una generalizacion del teorema de Schottky en el mismo sentido que la generalizacion anterior del teorema de Landau, a saber:

Teorema IV - Sea

una funcion meromorfa en el circulo y tal que para

donde y Entonces dados dos numeros positivos y existe otro numero que solo depende de y tal que en los puntos interiores al circulo y exteriores a los circulos de radio centrados en los polos de sera satisfecha la desigualdad

En efecto, las funciones cuyo desarrollo Taylor empieza por y que satisfacen ademas a la (1) en forman, segun el teorema II, una familia casi-normal en el circulo . al mismo tiempo, el citado teorema II nos indica que esta misma familia es normal en un circulo suficientemente pequeño centrado en el origen. Por lo tanto, siendo las funciomes iguales a para esta familia no puede admitir la constante infinita como funcion limite; queda pues demostrado nuestro teorema con solo aplicar el resultado siguiente debido a Montel ()

Teorema - Sea una familia casi-normal en no admitiendo la constante infinita como funcion limite, a todo dominio acotado completamente interior a y a todo positivo corresponde un numero que limita el modulo de cualquier funcion de la familia en todo punto de exterior a los circulos de radio que tienen por centro los polos de esta funcion.

6. Utilizando un procedimiento semejante al empleado hasta aqui, demostraremos un resultado relacionado con los anteriores. El procedimiento seguido para su demostracion, con pequeñas variaciones, es el mismo que ha empleado P. Montel para demostrar varios teoremas relacionados con el tema que nos interesa.

El resultado que vamos a demostrar es un teorema que pertenece a la esfera del teorema de Landau.

Teorema V - Sea una funcion meromorfa en y que posee las siguientes propiedades:

1ª es holomorfa y no se anula en el circulo

2ª

3ª

4ª Existe un valor tal que

Con estas cuatro condiciones no puede sobrepasar un limite que solo-

---

() Vease P. Montel - Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques (Bull. Soc. Mat. de France T. 52 - 1924 pag. 105

mente depende de y

En efecte, si este limite no existiese podriamos encontrar una funcion que tuviese las propiedades requeridas por el teorema para

Es evidente entonces, que la sucesion es casi-normal en cualquier dominio finito del plano complejo y ademas es normal en

Se puede extraer, pues, de la sucesion anterior otra que sea uniformemente convergente en cualquier dominio acotado, exceptuando un numero finito de puntos. Segun los teoremas clasicos de la teoria de las familias casi-normales, la funcion limite de esta sucesion sera meromorfa en todo dominio finito del,plano complejo y poseera solamente ceros, polos y unos (con) sera pues, segun el teorema de Picard, una fraccion racional. Esta fraccion no sera constante, puesto que en el circulo toma al menos una vez el valor 1 mientras que para es diferente de este valor.

Ademas, segun la condicon (4),

y como sea que es igual al cociente de un polinomio de grado dividido por otro de grado , el valor de sera igual al mayor de los numeros y ; y las dos desigualdades anteriores no podran ser satisfechas a la vez. Asi es que, suponiendo que el teorema no se cumpla, se llega a un absurdo.

7. Evidentemente en la mayor parte de los teoremas anteriores podrian variarse algunas de las condicones sin que el teorema perdiese su caracter, (como veremos en las notas al final de este articulo) ya que la condicion determinante del caracter y que establece una relacion entre estos teoremas es la desigualdad (1) en los teoremas I, III y IV; la condicion 3ª en el teorema II y la condicon 4ª en el teorema V. Tambien en las notas introduciremos modificaciones a esta condicion determinante, pero

conservando el caracter de desigualdad entre las expresiones para diferentes valores de

Sin predender agotar, ni mucho menos, estas dos clases de modificaciones, señalaremos las mas immediatas; pero antes, en las dos primeras notas haremos una observacion de caracter distinto. En la primera, daremos una demostracion directa del teorema III: mientras que en la segunda indicaremos las relaciones de algunos de nuestros teoremas con los de Picard, Landau y Schottky.

Nota I Sea

una funcion que satisface a todas las condicones impuestas en el teorema III. Pongamos entonces siguiendo el mismo procedimiento de F. Nevanlinna citado en el numero 3 se demuestra para la desigualdad

donde no dependemmas que de y . De esta desigualdad, recordando la (1) y poniendo, por ejemplo, y se deduce la

Ademas, por el mismo procedimiento utilizado en el numero 3 puede demostrarse que cuando es mayor que un numero fijo, en particular cuando

donde depende solamente de y . Por lo tanto, al menos una de las dos desigualdades siguientes sera satisfecha

que es el resultado que queriamos obtener.

A pesar de que ésta demostracion es mas directa y mas simple que la q que hemos dado en el numero 4, hemos ~~creido~~ no obstante,que debiamos dar primeramente la que esta basada en el teorema II, pues, hace sobresalir mas aun la relacion existente entre los teoremas III, IV, y V.

Nota II El teorema I contiene como caso particular el primer teorema de Picard; ya que si

la desigualdad (1) sera evidentemente satisfecha para cualquier valor de

El teorema afirma pues en particular, que para los grandes valores de las (6) no pueden ser satisfechas; lo cual es el teorema de Picard.

Del mismo modo, los teoremas III y IV contienen como caso particular, respectivamente, el teorema de Landau y una conocida generalizacion del teorema de Schottky.

Nota III En el teorema I puede substituirse la desigualdad (1) por la siguiente

donde es numero fijo culquiera; es necesario pero substituir al mismo tiempo la expresion no constante por no racional.

El teorema asi transformado, contiene como caso particular el segundo teorema de Picard para funciones con un solo punto singular esencial ya que si se supone que para todo son satisfechas las

y se toma la desigualdad (1) queda evidentemente satisfecha.

Nota IV Si en el teorema III en lugar de suponer y fijas se supone solamente

entonces

Nota V Representemos, siguiendo a Nevanlinna, por el numero de raices de pertenecientes al circulo cada raiz siendo contada una sola vez independientemente de su orden de mutiplicidad.

Em el teorema I puede substituirse entonces la desigualdad (1) por la

sin que el teorema pierda su validez.

La misma substitucion puede efetuarse en los teoremas II y IV, puesto que el procedimiento de R. Nevanlinna permite obtener en lugar de la (3) la

donde se deduce de de la misma forma que se calcula a partir de

Utilizando la demostracion expuesta en la nota I, partiendo pero de la desigualdad

se demuestra facilmente que en el teorema III puede tambien substituirse sin que deje de ser valida, la desigualdad (1) por la (1).

Nota VI Utilizando la demostracion empleada en el numero 4, si bien con alguna modificaciones, pueden suprimirse en los teoremas III y IV las condiciones pero al mismo tiempo tiene que substituirse la desigualdad (1) por la

Mejorando ligeramente las formulas de R. y F. Nevanlinna hemos podido obtener este ultimo resultado mediante una demostracion directa, casi igual a la que figura en la nota I.

Nota VII En los teoremas I, II, III y IV pueden emplearse en lugar de la desigualdad (1) la siguiente

con entero cualquiera.

Nota VIII En la demostracion de los teoremas I, II, III, y IV hemos deducido de la desigualdad (1) la

y a partir de ella hemos obtenido los resultados deseados; por lo tanto, si en dichos teoremas se substituye la (1) por la desigualdad ultimamente escrita, se obtendran unas generalizaciones que comprenderan los teoremas del texto como casos particulares; si bien algunas de las generalizaciones dadas en las notas no estaran comprendidas en ellas.

Por diversas razones hemos creido que debiamos dar primeramnete los teoremas en la forma que lo hemos hecho; no ignorando sin embargo el interes que tiene señalaresta generali-acion.

Para el teorema I hubiese sido innecesaria esta observacion, pues, la generalizacion obtenida por este procedimiento es el resultado de R. Nevanlinna del cual hemos dicho que el teorema I no es mas que un corolario.

Barcelona 17 de marzo de 1942.

....

....

....

..

Nota: Las palabras subrayadas en negro deben estar escritas en negreta y las subrayadas en rojo en cursiva.

Las letras escritas en rojo son del alfabeto griego