34 - France

Sur des cas où l'inégalité fondamentale de M. S. Mandelbrojt peut être précisée

Note de Ferran Sunyer i Balaguer

Dans la Note ci-dessous on démontre sommairem ment que, lorsque la série des inverses des exposants est rapidement convergente, l'inégalite fondamentale de Mandelbrojt peut être précisée.

Dans cette Note nous verrons que, lorsque la série $\sum(1/\lambda_n)$ converge rapidement et régulièrement, l'inégalité fondamentale de Mandelbrojt (¹) peut être précisée. D'ailleurs, lorsque nous emploierons une notation sans la définir, sa définition sera celle de S. Mandelbrojt (¹)

1.- Si $\{\lambda_n\}$ est une suite de nombres positifs croissants telle que $\sum(1/\lambda_n)<\infty$, nous écrirons

$$q_K(z)=\prod_{n\neq K}\left(1+\frac{z}{\lambda_n}\right)=\sum c_n^{(K)}z^n \qquad q_K^*=\prod_{n\neq K}\frac{\lambda_n}{|\lambda_K-\lambda_n|}$$

et

$$Q_K(R)=\int_0^\infty e^{-Rt}q_K(t)dt \qquad (R>0)$$

Alors on peut donner la définition suivante

(¹) Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications (Chapitre III, p. 51-97) Paris 1952.

HYPOTHÈSE $A_c^{(K)}(g(\sigma), p(\sigma), \{\lambda_n\})$.- Soit $\lim_{\sigma=\infty} g(\sigma)=g$, s'il existe une fonction continue non croissante $h(\sigma)$, avec $\lim_{\sigma=\infty} h(\sigma)=h$, telle que

$$0\leq h < g, \quad \log Q_K(\pi h(\sigma)) < p(\sigma)+M \quad (M<\infty, \sigma>\sigma_0)$$

$$\int^{\infty} |p(\sigma) - \log Q_K(\pi h(\sigma))| \exp\left(-\frac{1}{2}\int^{\sigma}\frac{dx}{g(x)-h(x)}\right) d\sigma = \infty$$

on dira que les fonctions $g(\sigma)$, $p(\sigma)$ et la suite $\{\lambda_n\}$ satisfont à l'hypothèse $A_c^{(K)}(g(\sigma), p(\sigma).\{\lambda_n\})$

Avec cette définition on peut énnoncer le théorème suivant.

THÉORÈME.- 1º.- $\{\lambda_n\}$ est une suite telle que $0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n<\ldots$ et $\sum(1/\lambda_n)<\infty$; Δ est unedomaine du plan $s=\sigma+it$ donné par $\sigma>a$, $|t|<\pi g(\sigma)$, où $g(\sigma)$ est une fonction continue, à variation bornée et telle queg $g(\sigma)>0$, $\lim g(\sigma)>0$.

2º.- $F(s)$ est une fonction holomorphe dans Δ et peut être prolongée analytiquement de Δ à travers un canal de largeur quelconque $\delta>0$ jusqu'au cercle $\overline{C(s_0, \pi R)}$.

3º.- La suite $\{d_n\}$ et l'èntier positif k sont tels que les sommes $\sum_1^m d_m e^{-\lambda_n s}$ avec $m>k$ représentent $F(s)$ dans Δ avec une précision logarithmique $p_K(\sigma)$.

Si les fonctions $g(\sigma)$, $p_K(\sigma)$ et la suite $\{\lambda_n\}$ satisfont à l'hypothèse $A_c^{(K)}(g(\sigma), p_K(\sigma), \{\lambda_n\})$ on a:

Conclusion α .-

$$|d_k| \leq \pi R Q_K(\pi R) q_K^* M(s_0, R) e^{\lambda_n \sigma_0}$$

où $M(s_0,R)=\max |F(s)| \, (s\in \overline{C(s_0, \pi R)})$

Conclusion β .- Il existe une suite de polynômes $\{\Psi_m(s)=\sum_1^m a_n^{(m)} e^{-\lambda_n s}\}$ qui converge uniformément vers $F(s)$ dans tout domaine fermé intérieur au domaine d'holomorphie de $F(s)$, et ces polynômes vérifient

$$|\Psi_m(s_0)| \leq \pi R Q_k(\pi R) M(s_0, R)$$

et $a_k^{(m)} = b_k^{(m)} d_k$, avec $\lim\limits_{m=\infty} b_k^{(m)} = 1$.

La condition 1º de ce théorème est plus restrictive que la condition 1º du théorème 3,7.I de Mandelbrojt ([1]) car nous supposons que $\sum(1/\lambda_n)<\infty$ tandis que Mandelbrojt suppose seulement que $\{\lambda_n\}$ est de densité moyenne supérieure finie. Par contre lorsque la série $\sum(1/\lambda_n)$ converge très rapidement et régulierement, c'est-à-dire [redacted] si on peut vérifier la condition:

(1) Il existe une fonction $V(\lambda)$ telle que $\lim\limits_{\lambda=\infty} (N(\lambda)/V(\lambda))=1$ et que pour un $\rho< 2/3$ la $V(\lambda)/\lambda^{\rho}$ est une fonction non croissante de λ, pour λ suffisamment grand,

l'hypothèse $A_c^{(K)}$ est moins restrictive que l'hýpothèse $A^{(K)}$ de Mandelbrojt, et la conclusion α est plus précise que la conclusion de Mandelbrojt. De même, la conclusion β est plus précise que la conclusion β du théorème I d'un de mes travaux ([2]), Tout cela est très facile à voir car avec las condition (1) on peut démontrer que

$$\lim_{k=\infty} \frac{\Lambda_k(t)}{q_k(t)} = \infty$$

et par suite que

$$\lim_{R=0} \frac{L_k(\pi R)}{Q_k(\pi R)} = \infty$$

La démonstration de la conclusion α du théorème est presque identique à celle de la conclusion de Mandelbrojt en utilisant, au lieu du

---

() Collectanea Math. 5, 1952 p. 240-267. Les principaux résultats de ce Mémoire furent enoncés aussi dans deux Notes: Comptes Rendus 231,1950, p.18-20 et 232, 1951, p.669-671.

lemme 3.3.VII de cet auteur (1) le suivant

LEMME.- Soit $\Phi(\underline{s})$ une fonction holomorphe dans le cercle $\overline{C(\underline{s}',\pi R)}$, et soit dans ce cercle $|\Phi(\underline{s})| < M$. Si $\sum(1/\lambda_n) < \infty$ la série

$$\sum \underline{c}_n^{(k)} \Phi^{(n)}(\underline{s})$$

converge uniformement dans chaque cercle $\overline{C(\underline{s}',\pi \underline{r})}$, avec $0 < \underline{r} < R$, et elle y représente une fonction holomorphe $\Phi_k(\underline{s})$ satisfaisant à l'inégalite

$$|\Phi_k(\underline{s}')| < \pi R Q_k(\pi R) M.$$

La démonstration de la conclusion β est très semblable à la démonstration de la conclusion β du théorème I de mon travail cité (2)

2.- On peut introduire dans le théorème du nº 1 les mêmes généralisations de la notion de précision logarithmique que nous avons introduites (2) dans le théorème de Mandelbrojt. On voit facilement les petites modifications qu'il faut introduire dans les conclusions et dans $\underline{g}_k(\underline{z})$, $\underline{g}_k^*$ et $Q_k(R)$.