3-C

Consejo

1

VALORES ASINTOTICOS DE LAS FUNCIONES ENTERAS

Lema: AD INFINITUM

Para el Concurso a premios anuales del Consejo Superior de Investigaciónes Cientificas para el año 1954.

Fernández Sunyer Balaguer

2

25 c. 10 = 12

VALORES ASINTÓTICOS DE LAS FUNCIONES ENTERAS

Lema: AD INFINITUM

INTRODUCCIÓN

En 1907 Denjoy [2] (1) lanzó la hipótesis de que el número máximo de valores asintóticos distintos y finitos que podía tener una función entera de orden finito ρ, era de 2ρ y al mismo tiempo demostró esta hipótesis en un caso particular. Luego Carleman demostró, en el caso general, un resultado muy aproximado a la hipótesis de Denjoy. Finalmente, Ahlfors [1] demostró totalmente el resultado previsto por Denjoy, completándolo con la afirmación de que el número máximo de valores asintóticos depende asimismo del índice de rotación de las curvas en las cuales la función se aproxima a dichos valores asintóticos.

Diversos autores, entre ellos Macintyre [4] y Grunsky [5], han obtenido diferentes complementos al resultado que acabamos de señalar; pero hasta ahora, según creo, no se ha estudiado la relación entre el número máximo de valores asintóticos y las velocidades con que la función se aproxima a dichos valores. En el Capítulo I de esta memoria estudiaremos precisamente esta relación, empleando para medir la velocidad de aproximación de la función a un valor asintótico, la noción de tipo de dicho valor; noción que definimos en una memoria anterior [8], y que creo muy apropiada para este objeto (2).

Los valores asintóticos de las funciones de orden infinito han sido bastante menos estudiados, y, en general, los resultados obtenidos no son aplicables, o carecen de interes, para ciertas clases de funciónes. En el capítulo II abordaremos este tema utilizando el método que en el capítulo I nos permite obtener resultados muy precisos. No obstante, este método, para el orden infinito, como era de suponer, no nos permite obtener una precisión semejante.

Finalmente, antes de terminar la introducción daremos el enunciado de un resultado de Milloux en su forma mas precisa, que puede obtenerse siguiendo el razonamiento empleado por R. Nevanlinna [6, pag. 96-100] ; pues este resultado lo utilizaremos continuamente en el curso de las demostraciones contenidas en esta memoria. Su enunciado es el siguiente:

TEOREMA M.- La función $f(z)$ holomorfa en el círculo $|z| < R$ verifica en este mismo círculo, la desigualdad

$$\log|f(z)| \leq M,$$

y si, además, en una curva contínua que partiendo del origen llega hasta la circunferencia $|z| = R$, la función viene acòtada por

$$\log|f(z)| \leq m \qquad (m < M),$$

tendrémos en todo el círculo

$$\log|f(z)| \leq M - (M-m)\frac{2}{\pi}\, \mathrm{arc\ sen}\, \frac{R-|z|}{R+|z|}$$

CAPITULO I

Orden finito

1,1.- Una función entera $f(z)$ será llamada de orden ρ y de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$, cuando

$$\lim_{r=\infty} \rho(r)=\rho, \qquad \lim_{r=\infty} \rho'(r)\, r \log r = 0,$$

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r,f)}{U(r)} = 1 \qquad (U(r)=r^{\rho(r)}),$$

donde $M(r,f)$ es el máximo de $|f(z)|$ en la circunferencia $|z|=r$.

En un trabajo anterior definimos el tipo de un valor asintótico [8, Capítulo IV], pero en dicha memoria la definición incluía valores que no eran propiamente asintóticos; como ahora nos proponemos tratar únicamente de verdaderos valores asintóticos, debemos variar ligeramente la definición.

Diremos que z tiende al infinito siguiendo una curva continua, cuando los valores que toma z pueden representarse por $z=\varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es una función continua para todo valor real y positivo de t, que para estos valores de t puede tomar valores complejos, y que finalmente cumple la condición

$$\lim_{t=\infty}\varphi(t)=\infty.$$

Representando por Δ_a la totalidad de las curvas continuas que tienden al infinito y que verifican (puede no existir ninguna)

$$\lim_{t=\infty}|f(\varphi(t))-a|=0,$$

donde $f(z)$ es una función entera de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$, si

$$\underset{\varphi \in A_a}{\text{extremo}}\ \overline{\lim_{t=\infty}} \frac{\log|f(\varphi(t))-a|}{U(|\varphi(t)|)} = -b$$

diremos que a es un valor asintótico de tipo b de $f(z)$.

De igual modo, representando por A_a el conjunto de valores de α (puede no existir ninguno) tales que

$$\lim_{r=\infty} |f(re^{i\alpha})-a| = 0,$$

5

si

$$\min_{\alpha \in A_a} \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log|f(re^{i\alpha})-a|}{U(r)} = -b, \tag{1,1,1}$$

diremos que a es un valor asintótico radial de tipo b de $f(z)$.

En mi memoria citada [8] definía asimismo los valores asintóticos casi radiales, pero esta clase resulta totalmente innecesaria, pues según puede deducirse de los razonamientos contenidos en el n. 4,2 de [8], y en particular de las fórmulas (4,22) y (4,23) de la misma memoria, la existencia de un valor asintótico casi radial de tipo b impone la existencia de un valor asintótico radial del mismo tipo b (3)

1,2.- Empezaremos por estudiar la relación entre el número de valores asintóticos radiales y los tipos de los mismos, el resultado, en este caso, es intuitivo, pero, tal vez por este motivo, el estudio de este caso nos permitirá comprender mas fácilmente los detalles del caso general.

TEOREMA I.- Si la función entera $f(z)$ de orden ρ y de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$ tiene los valores asintóticos radiales a_1, a_2, ..., a_n cuyos tipos son, respectivamente, b_1, b_2, ..., b_n, se cumplirá

$$n+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arc\ sen}\,b_k\leq 2\rho.$$

Demostración.- Sea α_k el argumento correspondiente (4) al valor asintótico a_k y supongamos que estos hayan sido numerados de manera que

$$0\leq\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<2\pi.$$

6

Sea

$$h_k(\alpha)=\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{\log|f(re^{i\alpha})-a_k|}{U(r)}.$$

puesto que $h_k(\alpha)\leq 1$, para cualquier valor de α, según resulta del hecho de que $f(z)$ es de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$, las propiedades conocidas de $h_k(\alpha)$ nos permiten afirmar que para

$$|\alpha-\alpha_k|<\frac{1}{\rho}\,\mathrm{arc\ sen}\,b_k \qquad (5),$$

tendremos $h_k(\alpha)<0$ .Sea pues α_k' el valor mínimo tal que

$$h_k(\alpha_k')=0,\qquad \alpha_k'\geq\alpha_k;$$

mientras que α_k'' representará el máximo valor que verifica

$$h_k(\alpha_k'')=0,\qquad \alpha_k''\leq\alpha_k.$$

Evidentemente, según lo que acabamos de establecer, se verificarán

$$\alpha_k'-\alpha_k\geq\frac{1}{\rho}\,\mathrm{arc\ sen}\,b_k,$$

$$\alpha_k-\alpha_k''\geq\frac{1}{\rho}\,\mathrm{arc\ sen}\,b_k.$$

Por otra parte, aplicando el procedimiento habitual, puesto que $a_k\neq a_{k+1}$, y pasando al límite si es necesario, resulta

$$\alpha_{k+1}''-\alpha_k'\geq\frac{\pi}{\rho},$$

y por consiguiente, tendremos

$$\alpha_{k+1}-\alpha_k \geq \frac{1}{\rho}(\pi+\text{arc sen } b_k+\text{arc sen } b_{k+1}),$$

cuando $K=n$ esta desigualdad debe escribirse

$$\alpha_1+2\pi-\alpha_n \geq \frac{1}{\rho}(\pi+\text{arc sen } b_n+\text{arc sen } b_1).$$

Sumando estas desigualdades para los diferentes valores de K resulta finalmente

$$2\pi \geq \frac{1}{\rho}\sum_{K=1}^{n}(\pi+\text{arc sen } b_k+\text{arc sen } b_{k+1}), \quad 7$$

donde $b_{n+1}=b_1$; esta desigualdad transformada debidamente es la afirmación del teorema.

1,3.- En el caso general, o sea cuando los valores asintóticos no son radiales, o mejor dicho, pueden no ser radiales, la precisión del teorema de Denjoy-Carleman-Ahlfors resulta mas complicada. Su enunciado es el siguiente:

TEOREMA II.- Si la función entera $f(z)$ de orden ρ y de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$, tiene los valores asintóticos a_1, a_2, ..., a_n cuyos tipos son, respectivamente, b_1, b_2, ..., b_n, y cuyo índice de rotación es λ, se cumplirá

$$n(1+\lambda^2)+2\sum_{K=1}^{n}\psi(b_k)\leq 2\rho,$$

donde $\psi(b)$ es una función que definiremos y que verifica $c\, b^2<\psi(b)$, donde c es una constante numérica >0.

Demostración.- Según la definición de Ahlfors [1, pag. 27] el índice de rotación de una curva viene expresado por

$$\lambda = \overline{\lim_{t=\infty}} \frac{|\arg \varphi(t)|}{\log|\varphi(t)|};$$

por lo tanto, como quiera que en nuestro caso los valores asintóticos y sus tipos vienen definidos como el extremo inferior de un funcional en un conjunto de curvas, podría suceder que los índices de rotación de las diferentes curvas de Δ_a no tuviesen relación entre sí, y no permitiesen, pues, la definición de un ~~único~~ índice de rotación del valor asintótico. Por consiguiente, antes de empezar la demostración propiamente dicha del teorema, debemos demostrar que el índice de rotación de las diferentes curvas de Δ_a es siempre el mismo, y puede, por consiguiente, tomarse como índice de rotación del valor asintótico correspondiente.

Sea a un valor asintótico de tipo b_1 y sean $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ dos curvas de Δ_a; si

$$\lambda_m = \overline{\lim_{t=\infty}} \frac{|\arg \varphi_m(t)|}{\log|\varphi_m(t)|} \qquad (m=1,2)$$

y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, será posible hallar dos sucesiones $\{t'_k\}$ y $\{t''_k\}$ tales que

$$\lim_{k=\infty} t'_k = \infty, \qquad \lim_{k=\infty} t''_k = \infty, \qquad \varphi_1(t'_k) = \varphi_2(t''_k);$$

y que

$$|\arg[\varphi_2(t''_{2k+1})/\varphi_1(t'_{2k+1})] - \arg[\varphi_2(t''_{2k})/\varphi_1(t'_{2k})]| = 2\pi$$

A partir del punto

$$z_{2k} = \varphi_1(t'_{2k}) = \varphi_2(t''_{2k})$$

sigamos la curva $z = \varphi_1(t)$ hasta el punto

$$z_{2k+1} = \varphi_1(t'_{2k+1}) = \varphi_2(t''_{2k+1}),$$

regresando a z_{2k} siguiendo la curva $z = \varphi_2(t)$. Evidentemente esta curva rodea el origen y, puesto que a partir de un valor de K es exterior a cualquier círculo fijo, queda demostrado que, con las condiciones supuestas, contendrá en su interior cualquier dominio acotado (asimismo a partir de un valor de K). Además, como

$$\lim_{t=\infty} |f(\varphi_m(t))-a|=0 \qquad (m=1,2),$$

la función $f(z)$ sería acotada en todo el plano complejo. Por consiguiente, como suponemos que $f(z)$ no es idéntica a una constante, debe verificarse $\lambda_1=\lambda_2$.

9

Como el anterior razonamiento es válido asimismo cuando el valor de a correspondiente a la curva $\varphi_1(t)$ es distinto del que corresponde $\varphi_2(t)$, podemos afirmar que el índice de rotación es igual para todos los valores asintóticos de una misma función. Este último extremo fué demostrado ya por Ahlfors [1] mediante un procedimiento mucho mas simple. En realidad si se supone la existencia de dos, o mas, valores asintóticos distintos, el mismo procedimiento de Ahlfors permite ya demostrar que el índice de rotación de las curvas que intervienen en la definición de sus tipos, es igual para todas ellas.

Después de estas consideraciones sobre el índice de rotación, es posible entrar de lleno en la demostración propiamente dicha del teorema II. Sea

$$F(s)=f(e^s);$$

a fin de coincidir dentro lo posible con las notaciones de Ahlfors, representaremos, contrariamente a la costumbre, la parte real de s por x y su parte imaginaria por y, es decir

$$s=x+iy.$$

Ahora bién, cualquiera que sea el valor de $\varepsilon>0$, dadas las hipótesis del teorema, existirán al menos n curvas representadas por

$$s=s_k(t)=x_k(t)+i\,y_k(t) \qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

tales que

$$\lim_{t=\infty} x_K(t) = +\infty \qquad (K=1,2,\dots,n)$$

y que para t suficientemente grandes se cumpla

$$(1,3,1) \qquad \frac{\log|F(s_K(t)) - a_K|}{V(x_K(t))} < -b_K(1-\varepsilon),$$

donde $V(x) = U(e^x)$. Sea t_0 un valor cualquiera de t tal que si $t > t_0$ se cumplan las desigualdades (1,3,1), y efectuemos la transformación de variables definida por (6)

$$(1,3,2) \qquad s = q(\sigma) = \frac{2i\beta}{\pi} \log\frac{1+\sigma}{1-\sigma} + x_K(t_0) + i\, y_K(t_0);$$

esta transformación efectúa la representación conforme de la faja

$$|x - x_K(t_0)| \leq \beta$$

sobre el círculo $|\sigma| \leq 1$, con correspondencia del punto $\sigma = 0$ y del

$$s = x_K(t_0) + i\, y_K(t_0).$$

10

Por lo tanto, dada la elección de t_0 existirá una curva que desde el origen llega hasta la circunferencia $|\sigma| = 1$ en la cual se cumple

$$(1,3,3) \qquad \log|F(q(\sigma)) - a_K| < -b_K(1-\varepsilon)V(x_K(t_0) - \beta)$$

Además, puesto que $f(z)$ es de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$, teniendo en cuenta las dos transformaciones de variables, y si t_0, y por consiguiente $x_K(t_0)$, es suficientemente grande, en el círculo $|\sigma| < 1$ tendremos

$$(1,3,4) \qquad \log|F(q(\sigma)) - a_K| < (1+\varepsilon)V(x_K(t_0) + \beta).$$

Las desigualdades (1,3,3) y (1,3,4) son de la forma de las hipótesis que intervienen en el teorema M, por lo tanto, aplicando este teorema veremos finalmente que, en el círculo

$$\frac{1-|\sigma|}{1+|\sigma|} > \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{(1+\varepsilon)^2 V(x_k(t_0)+\beta)}{(1-\varepsilon)\, b_k V(x_k(t_0)-\beta)+(1+\varepsilon)^2 V(x_k(t_0)+\beta)}\right),$$

se cumplirá la desigualdad

(1,5,5) $$\log|F(q(\sigma))-a_k| < -b_k(1-\varepsilon)\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\,V(x_k(t_0)-\beta).$$

Por otra parte, las propiedades de los órdenes precisados permiten demostrar fácilmente que

$$\lim_{x=\infty}\frac{V(x+\beta)}{V(x-\beta)} = e^{2\rho\beta};$$

por consiguiente, si t_0 es suficientemente grande la desigualdad (1,5,5 se cumplirá evidentemente en el círculo

(1,5,6) $$\frac{1-|\sigma|}{1+|\sigma|} \ge \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{2\rho\beta}}{(1-\varepsilon)^3 b_k + e^{2\rho\beta}}\right).$$

Sea

(1,5,7) $$\pi\psi(b) = \max_{0<\beta<\infty}\left(\frac{2\beta}{\pi}\log\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{2\beta}}{b+e^{2\beta}}\right)\right)^{-1}\right).$$

de (1,5,2), (1,5,5), (1,5,6) y (1,5,7) deduciremos fácilmente que, eligiendo convenientemente el valor de β, y si t_0 es suficientemente grande, en el segmento σ rectilíneo

(1,5,8) $$x = x_k(t_0), \qquad |y-y_k(t_0)| \le \frac{(1-\varepsilon)\pi\psi(b_k(1-\varepsilon)^3)}{\rho},$$

se cumplirá la desigualdad

$$\log|F(s)-a_k| < -b_k(1-\varepsilon)\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\,V(x_k(t_0)-\beta);$$

lo cual demuestra que si $b_k>0$ el máximo de $|F(s)-a_k|$ en el segmento (1,5,8) tiende a 0 cuando $t_0\to\infty$. Si $b_k=0$, como $\psi(0)=0$, el resultado continúa siendo válido.

Ahora bien, sea Ω_K la faja comprendida entre las curvas $s_K(t)$ y $s_{K+1}(t)$ ($s_{n+1}(t)$ debe interpretarse como $s_1(t)+2\pi i$). Nosotros suponemos que la numeración de las $s_K(t)$ ha sido establecida de forma que las $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ no tengan ningún ~~pun-~~ punto que sea interior a dos de ellas, lo cual es posible, según puede demostrarse fácilmente. Sea d_K el conjunto formado por la suma de los segmentos (1,5,3) cuando t_0 toma la totalidad de los valores reales positivos; si de Ω_K se suprimen los puntos que pertenecen a d_K o a d_{K+1} obtendremos ~~un~~ faja que llamaremos Ω_K^* para la cual, y del mismo modo que Ahlfors define $\theta(u)$ para Ω_K [1] , podremos definir la función $\theta^*(u)$.

El hecho de que el máximo de $|F(s)-a_K|$ tienda a 0 en d_K cuando $t_0 \to \infty$, permite repetir para $\Omega_1^*, \Omega_2^*, \ldots, \Omega_n^*$ el razonamiento de Ahlfors [1 pag. 21-27], y puesto que evidentemente

$$\sum_{K=1}^{n} \int_{u_1}^{u_2} \theta_K^*(u)\, du \leq \left[2\pi - 2\sum_{K=1}^{n} \frac{(1-\varepsilon)\pi\psi(b_K(1-\varepsilon)^3)}{\rho}\right](x_2-x_1),$$

llegaremos a la desigualdad

$$\rho = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log\log M(r,g)}{\log r} \geq \frac{\pi n(1+\lambda^2)}{2\pi - 2\sum\limits_{K=1}^{n} \frac{(1-\varepsilon)\pi\psi(b_K(1-\varepsilon)^3)}{\rho}},$$

o sea

$$2\rho \geq n(1+\lambda^2) + 2\sum_{K=1}^{n} (1-\varepsilon)\psi(b_K(1-\varepsilon)^3).$$

Como quiera que $\psi(b)$ es una función continua, y puesto que ε es arbitraria, resulta finalmente

$$2\rho \geq n(1+\lambda^2) + 2\sum_{K=1}^{n} \psi(b_K).$$

que es la afirmación del teorema. Además, la desigualdad $c\, b^2 < \Psi(b)$ resulta fácilmente de la definición de $\Psi(b)$.

Del teorema II se sigue

COROLARIO.- Una función entera de orden ρ y de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$, puede tener exactamente 2ρ valores asintóticos finitos distintos, únicamente cuando el índice de rotación y los tipos de estos valores son nulos.

1,4.- Grunsky [5] complementó el teorema de Denjoy-Carleman-Ahlfors introduciendo, en lugar del orden ρ, el orden inferior

$$\rho_1 = \lim_{r=\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}$$

13

y, en lugar del índice de rotación, la cantidad

$$\mu = \lim_{r=\infty} \frac{|\arg \varphi(t)|}{\log|\varphi(t)|}.$$

Después de lo expuesto al principio del número anterior resulta fácil demostrar que esta cantidad μ es igual para todas las curvas de Δ_a, y además, que también es igual para todos los valores asintóticos de una misma función entera.

Aplicando, pues, los métodos de Grunsky y los razonamientos contenidos en el nº anterior es fácil demostrar el teorema siguiente:

TEOREMA III.- Si la función entera $f(z)$ de orden ρ, de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$ y de orden inferior ρ_1, tiene los valores asintóticos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, cuyos tipos respectivos son $b_1, b_2, \ldots, b_n$, resulta

$$n(1+\mu^2) + 2\frac{\rho_1}{\rho}\sum_{K=1}^{n}\Psi(b_k) \leq 2\rho_1,$$

donde μ es la cantidad definida anteriormente, utilizando las curvas que intervienen en la definición de los tipos de los valores asintóticos de $f(z)$.

De este teorema se sigue inmediatamente el siguiente

COROLARIO.- Una función entera de orden ρ, de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$ y de orden inferior ρ_1, puede tener exactamente $2\rho_1$ valores asintóticos finitos distintos únicamente cuando $\mu = 0$ y $b_K = 0$ para $K = 1, 2, \ldots, n$.

Además, puesto que $\rho \geq \rho_1$, cuando $n = 2\rho$ resulta que $\rho = \rho_1$; pero este resultado es ya clásico y se deduce inmediatamente de los procedimientos de Ahlfors.

1,5.- También en los interesantes resultados de Macintyre [4] pueden introducirse los tipos de los valores asintóticos. En efecto, sea L_K una de las curvas que intervienen en la definición del tipo del valor asintótico a_K, es decir, una de las curvas de Δ_{a_K}. Representemos por $L(r)$ el extremo inferior de la longitud en el plano de $\log z$ de las curvas que unen cualquier punto de $|z|=1$ con cualquier punto de $|z|=r$ sin tener puntos comunes con ninguna de las L_K ($K=1, 2, \ldots, n$) y sea

$$L = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{L(r)}{\log r}, \qquad l = \lim_{r=\infty} \frac{L(r)}{\log r}.$$

Por otra parte, representando por $-b'_K$ el

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log|f(z)-a_K|}{U(|z|)}$$

cuando z tiende al infinito siguiendo la curva L_K podremos definir los

$$L^* = \overline{\lim}\, L, \qquad l^* = \overline{\lim}\, l,$$

donde estos límites se refieren a cuando las curvas L_K ($K=1, 2, \ldots, n$)

varian de cualquier modo, con la sola condición de que t'_K tienda a t_K para $K=1,2,\dots,n$

Con estas notaciones, y aplicando los métodos de Macintyre junto con los nuestros contenidos en el nº 1,3, podemos demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA IV.- Si la función entera $f(z)$ de orden ρ, de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$ y de orden inferior ρ_1, tiene los valores asintóticos $a_1, a_2, \dots, a_n$, cuyos tipos respectivos son $t_1, t_2, \dots, t_n$ tendremos

$$n\, t^{*2} + 2\sum_{K=1}^{n} \Psi(t_K) \leq 2\rho$$

15

y

$$n\, t^{*2} + 2\frac{\rho_1}{\rho}\sum_{K=1}^{n} \Psi(t_K) \leq 2\rho_1 .$$

De este teorema tampoco daremos la demostración limitándonos al esquema indicado antes del enunciado.

1,6.- Observación I.- La definición que damos de $\Psi(t)$ permite demostrar que $t^2 = O(\Psi(t))$ cuando $t \to 0$; pero creo probable que mediante otro método de demostración pueda afirmarse que los teoremas anteriores continuan siendo válidos si la definición de $\Psi(t)$ se sustituye por otra que verifique $t = O(\Psi(t))$ cuando $t \to 0$.

Observación II.- Si en los teoremas II, III y IV sabemos que algunos de los valores asintóticos son radiales, para los valores de K correspondientes puede ponerse

$$\varphi(t_K) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,sen} t_K .$$

1,7.- Del teorema II, y asimismo del teorema de Ahlfors, se deduce que el índice de rotación de los valores asintóticos de una función entera de orden ρ viene acotado, independientemente del valor de $n \geq 1$ por $(2\rho - 1)^{1/2}$.

En realidad el teorema II nos da la acotación mas precisa

$$\lambda \leq \left(2\rho - 1 - 2\sum_{k=1}^{n} \psi(\ell_k)\right)^{1/2}.$$

En el capítulo II emplearemos el teorema M para acotar la rotación de las curvas en las que una función de orden infinito permanece acotada.

1,8.- R. Nevanlinna [7, pag. 95] afirma «Bien qu'il soit vraisemblable que toute valeur de défaut positif soit une valeur asymptotique, la réciproque n'est pas vraie» y añade mas abajo «Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la convergence ait lieu dans des domaines assez larges et qu'elle soit d'une intensite qui corresponde a la croissance de la fonction caracteristique $T(r)$».

Los métodos anteriores permiten afirmar que es suficiente que la intensidad sea grande para que los dominios sean suficientemente extensos, es decir, podemos afirmar que

TEOREMA V.- Todo valor asintótico de tipo positivo de una función entera de orden ρ y de orden precisado $\rho(r)$ es asimismo un valor de defecto positivo.

CAPITULO II

Orden infinito

2,1.- Como sabemos, en el caso del orden infinito pueden existir infinidad de valores asintóticos y, según hace observar ya Milloux [5], ello impone que en el estudio de los mismos habrá necesidad de acotar superiormente el módulo de las a_K e inferiormente los valores $|a_K - a_j|$ mediante cantidades variables que dependen de r. Además, igual que Milloux, consideraremos, en lugar de verdaderos valores asintóticos, el número de curvas interiores a una corona circular en las cuales la función se aproxima suficientemente a los a_K, sin necesidad de que estas curvas puedan extenderse hasta el infinito de modo que la función tienda hacia a_K. En esta dirección Milloux [5] obtuvo el resultado siguiente

TEOREMA .- Sea $f(z)$ una funcion entera de orden infinito. En general es imposible que en la corona circular

$$r = O(1)\, R^{\eta/(1+\eta)} \leq |z| \leq R \qquad (\eta = \text{cantidad positiva})$$

existan un número mayor que

$$2(1+\eta)\,\frac{\log \log M(R,f)}{\log R}$$

de curvas L_K en cada una de las cuales $|f(z)|$ es inferior a $M(r,f)$, y tales que sobre L_K sea satisfecha la desigualdad

$$\log|f(z) - a_K| < q_1 \log M(r,f),$$

con

$$\log|a_K - a_j| > -q_2\, q_1 \log M(r,f).$$

donde la constante q_1 depende del valor que se tome para la q_2.

Desgraciadamente cuando

$$(2,1,1) \qquad 8\left[M\left(O(1)R^{\eta/(1+\eta)}, f\right)\right]^{2(1+\frac{1}{2}q_1)} < 2(1+\eta)\frac{\log\log M(R,f)}{\log R},$$

la acotación dada por el teorema anterior pierde su valor, puesto que, en este caso, la acotación no proviene del hecho de la proximidad del valor de la función a determinados valores constantes, sino de que el número máximo ~~[illegible]~~ posible de valores a_k que verifican

$$|a_k| \leq M(r,f), \qquad |a_k - a_j| > [M(r,f)]^{-\frac{1}{2}q_1};$$

es inferior al primer miembro de la desigualdad (2,1,1). Por otra parte, según demostraremos en una nota al final del presente trabajo, existe una clase de funciones enteras de orden infinito para las cuales los valores de R que cumplen (2,1,1) no son excepcionales, sino todo lo contrario, puesto que la desigualdad se cumple a partir de un valor de R. Estas consideraciones demuestran la necesidad de considerar de nuevo el problema del número de valores asintóticos para el caso del orden infinito.

18

2,2.- Los resultados que obtenemos a continuación se siguen del teorema M mediante un procedimiento semejante a la primera parte de la demostración del teorema II, es decir, la parte en que se demuestra la existencia de los a_k. Me parece probable que con otro método de demostración los resultados que obtendremos podrían precisarse; asimismo parece posible que si en lugar de considerar los caminos únicamente en el interior de una corona circular, considerasemos caminos extendiéndose hasta el infinito, la acotación del número de valores asintóticos disminuiría, tal vez notablemente. Sin embargo, hasta el presente no conozco método alguno que permita hacerlo.

En primer lugar demostraremos el resultado siguiente.

TEOREMA VI.- Sea $f(z)$ una función entera de orden infinito. Si existen n curvas L_k que atraviesan la corona

$$r \le |z| \le R = r(1+\tau(r)),$$

tales que sobre L_k se cumple

$$\log|f(z)-a_k| < -\theta \log M(r,f),$$

donde las a_k son constantes que verifican

$$\log|a_k - a_j| > -\theta_1 \log M(r,f) \qquad (\theta_1 < \theta),$$

entonces tendremos

$$n \le C \frac{(\log M(R,f))^2}{(\log M(r,f))^2} \frac{1}{\log(1+\tau(r))},$$

donde C depende de θ y θ_1.

Demostración.- Efectuemos de nuevo la transformación

$$F(s) = f(e^s)$$

y pongamos

$$x' = \log r, \qquad x'' = \log R.$$

Sea además s_k el punto en que la transformada Λ_k de L_k corta la recta $s = x'$. Pongamos, igual que en el nº 1,3 (5),

(2,2,1) $$s = g(\sigma) = 2\,\frac{x''-x'}{\pi}\, i \log \frac{1+\sigma}{1-\sigma} + s_k$$

y apliquemos el teorema M a $F(g(\sigma))$ en el círculo $|\sigma| \le 1$, entonces resulta que, para

(2,2,2) $$\frac{1-|\sigma|}{1+|\sigma|} > \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}\, \frac{\log M(R,f) + \theta_2 \log M(r,f)}{\log M(R,f) + \theta \log M(r,f)}\right], \qquad (\theta_2 < \theta)$$

se cumple

20

$$\log |F(g(\sigma)) - a_k| \leq -\theta_2 \log M(r, f). \tag{2,2,3}$$

Por otra parte, es fácil demostrar que

$$\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{\log M(R,f) + \theta_2 \log M(r,f)}{\log M(R,f) + \theta \log M(r,f)}\right] <$$

$$< 1 - q\left(\frac{\log M(r,f)}{\log M(R,f)}\right)^2 \quad (q \text{ depende de } \theta \text{ y } \theta_2).$$

Por lo tanto, si escribimos como en el capítulo anterior

$$s = x + i\,y, \qquad s_k = x_k + i\,y_k,$$

de (2,2,1), (2,2,2) y (2,2,3), resultará que, para

$$|y - y_k| < q_1\left(\frac{\log M(r,f)}{\log M(R,f)}\right)^2 \log(1 + \tau(r)), \tag{2,2,4}$$

se cumple

$$\log |F(s) - a_k| < -\theta_2 \log M(r,f),$$

si suponemos, como es posible, $\theta_2 > \theta_1$, y r y, por lo tanto, $M(r,f)$, suficientemente grande, la última desigualdad para dos valores de k será incompatible con la condición que según el teorema cumplen las a_k por lo tanto, los segmentos definidos por (2,2,4) no tendrán puntos en común, lo cual demuestra que

$$n \leq \frac{\pi}{q_1}\left(\frac{\log M(R,f)}{\log M(r,f)}\right)^2 \frac{1}{\log(1 + \tau(r))},$$

lo cual demuestra el teorema.

Toda elección determinada de la función $\tau(r)$ dará lugar a un corolario del teorema anterior; nosotros nos limitaremos a enunciar y demostrar el siguiente

COROLARIO.- Con las mismas hipótesis que en el teorema VI y tomando

$$\tau(r) = \frac{1}{r(\log\log M(r,f))^{1+\eta}} \qquad (\eta > 0),$$

se verificará

$$n \leq C\, r(\log\log M(r,f))^{1+\eta};$$

excepto en una sucesión de intervalos donde la variación de r es finita. La constante C es distinta de la del teorema VI pero depende también de θ y θ_1.

21

Demostración.- Según un conocido teorema de Borel, los valores de r para los cuales

$$\log M\left(r + \frac{1}{(\log\log M(r,f))^{1+\eta}}, f\right) > 2\log M(r,f),$$

están contenidos en una sucesión de intervalos cuya suma es finita; aplicando este resultado al teorema VI en el cual $\tau(r)$ se determine como en el corolario, resulta éste demostrado.

2,3.- Si se utiliza la noción de orden para regularizar y acotar el crecimiento de una función de orden infinito, puede enunciarse un teorema semejante al teorema VI para cada clase de ordenes. Indicaremos el procedimiento para un solo caso, que nos parece el más interesante.

Si $\omega(x)$ es una función decreciente tal que

$$\int^{\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx < \infty,$$

existe siempre, para toda función entera $f(z)$ de orden infinito, una función $\rho(r)$ no decreciente tal que escribiendo

$$W(r) = r^{\rho(r)},$$

se verifican las

$$W(r+\omega(W(r)))<2W(r),$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{W(r)}=1.$$

La función $\rho(r)$ se llama generalmente orden de $f(z)$; aquí seguiremos esta costumbre, no obstante en trabajos anteriores llamábamos orden a $W(r)$. Daremos a continuación el esquema de la demostración de la existencia de la función $\rho(r)$. A pesar de que esta demostración puede hallarse en varios libros y memorias (por ejemplo Valiron [10, pag. 27-28]) daremos la demostración puesto que queremos que $\rho(r)$ tenga, además de las señaladas, otra propiedad que nos será necesaria en el teorema VII.

22

Sea

$$\delta(t)=\omega(e^t)$$

y construyamos la función $h(x)$ lineal para

$$x_{n-1}\le x\le x_n \qquad (n=1,2,\dots.)$$

y definida por las condiciones

$$x_0=0, \qquad x_1=\delta(1), \qquad h(x_0)=1,$$

$$x_n=x_{n-1}+\delta(h(x_{n-2})), \qquad h(x_n)=h(x_{n-1})+\frac{q}{2},$$

donde q es un número positivo dado. Evidentemente la $h(x)$ es creciente y convexa en cierto intervalo $(0,X)$, tiende al infinito cuando x tiende a X y verifica

$$h(x+\delta(h(x)))<h(x)+q.$$

Definimos $\mu(r)$ por

$$\mu(r)=(\log r)\max_{2<x\le r}\left(\frac{\log\log M(x,f)}{\log x}\right)$$

y sea $V(r)$ el máximo de

$$h(r-x+\lambda(\mu(x)))$$

para los valores de x que cumplen

$$x \geq r \geq x-\lambda(\mu(x)),$$

donde $\lambda(\mu)$ es la función inversa de $h(x)$.

De la definición de $\mu(r)$ y de $h(x)$ resulta fácilmente que $V(r)$ tiene las propiedades siguientes

$$\log \log M(r,f) \leq V(r),$$

$$V(r+\delta(V(r))) < V(r)+q,$$

existe una sucesión $\{r_n\}$ que tiende al infinito tal que

$$\log \log M(r_n,f) = V(r_n)$$

y además la función

$$\rho(r) = V(r)/\log r$$

es no decreciente.

Escribiendo pues

$$W(r) = r^{\rho(r)} = e^{V(r)},$$

tendremos, puesto que $\delta(V(r)) = \omega(W(r))$,

$$W(r+\omega(W(r))) < \Omega W(r) \qquad \text{con } \Omega = e^{q},$$

$$\log M(r,f) \leq W(r), \qquad \log M(r_n,f) = W(r_n),$$

o sea algo mas de lo que habiamos exsigido a $W(r)$.

Con estos ordenes podemos enunciar un teorema semejante al VI, a saber

TEOREMA VII.- Sea $f(z)$ una función entera de orden infinito $\rho(r)$ si existen n curvas L_k que atrviesan la corona

$$r \leq |z| \leq r + \omega(W(r)),$$

tales que sobre L_k se cumple

$$\log |f(z) - a_k| < -\theta W(r),$$

donde las a_k son constantes que verifican

$$\log |a_k - a_j| > -\theta_1 W(r) \qquad (\theta_1 < \theta),$$

entonces tendremos

$$n \leq \frac{c\,\Omega^2 r}{\omega(W(r))},$$

24

donde C depende únicamente de θ y θ_1.

Demostración.- La demostración de este teorema, teniendo en cuenta la desigualdad

$$\log M(r,f) \leq W(r),$$

sigue el mismo curso que la demostración del teorema VI llegándose a la desigualdad

$$n \leq C\left(\frac{W(r+\omega(W(r)))}{W(r)}\right)^2 \frac{1}{\log(1+\omega(W(r))/r)},$$

de la cual, teniendo en cuenta que

$$W(r+\omega(W(r))) < \Omega W(r)$$

y que $\omega(W(r))$ tiende a 0 cuando $r \to \infty$, resulta finalmente el teorema.

P,4.- Sea $f(z)$ una función entera de orden infinito $\rho(r)$ (2), y sea $z = \varphi(t)$ la representación paramétrica de una curva continua que tiende al infinito y en la cual $|f(z)|$ permanece acotada; en particular supondremos que $|f(z)| < 1$. Vamos a acotar el crecimiento de

$$\frac{|\arg \varphi(t)|}{-\log|\varphi(t)|}$$

por medio de una función cuyo crecimiento depende únicamente del de $W(r)$.

Como a partir de un valor de t la curva no puede contener curvas cerradas que rodeen el origen, puesto que, si así fuese, la función $\varphi($ sería una constante; podemos suponer sin perdida de generalidad que dicha curva no se corta a si misma. Tampoco disminuyen la generalidad las siguientes hipótesis que, por otra parte, nos permitirán simplificar la demostración

25

$$|\varphi(0)|=1, \qquad \arg \varphi(0)=0,$$

$$|\varphi(t)|>1 \text{ para } t>0.$$

Supongamos que t_1 cumple $|\varphi(t_1)|=r_1$ y

(2,4,1) $$4n<\frac{|\arg \varphi(t_1)|}{2\pi} \qquad (n = \text{entero positivo}),$$

entonces puden presentarse dos casos: 1º: Representando por $t(r)$ el menor valor de t que verifica $|\varphi(t)|=r$, tendremos

$$|\arg \varphi(t(r_1))|>4\pi n$$

2º: Con la misma notación se cumple

$$|\arg \varphi(t_1)-\arg \varphi(t(r_1))|>4\pi n$$

En el primer caso evidentemente es posible hallar una sucesión de $2n$ puntos $\{z_k\}$ situados sobre la curva, cuyos argumentos forman una sucesión monótona y verifican

$$|\arg z_k|=2\pi k,$$

por lo tanto, existirán sobre la curva al menos dos puntos cuyos argumentos difieren de una cantidad superior a 2π y cuya distancia es in ferior a

$$\frac{r_1}{2n-1}.$$

En el segundo caso existirá una sucesión de n puntos $\{z_k\}$ situados sobre la curva, cuyos argumentos forman asimismo una sucesión monótona, y que verifican

$$|z_k| = r_1, \qquad 2\pi \leq |\arg z_{k+1} - \arg z_k| \leq 4\pi,$$

esto se deduce fácilmente de la suposición que la curva no se corta a sí misma. En consecuencia, en este caso existen asimismo dos puntos situados sobre la curva cuyos argumentos difieren de una cantidad superior a 2π y cuya distancia en este caso es inferior a

26

$$\frac{2\pi r_1}{n-1}.$$

En resumen, siempre será posible hallar dos puntos z' y z'' situados sobre la curva, cuyos argumentos difieren de una cantidad superior a 2π y que verifiquen

$$|z'| = r' \leq r_1, \qquad |z''| = r'' \leq r_1, \qquad |z' - z''| \leq \frac{2\pi r_1}{n-1}.$$

Consideremos ahora el círculo de centro z' y de radio $\omega(W(r_1))$, como, según la propiedad de los ordenes, se verifica

$$\omega(W(r_1)) \leq \omega(W(r')),$$

en dicho círculo tendremos

$$\log|f(z)| < \Omega W(r_1),$$

y puesto que la curva $z = \varphi(t)$ pasa por el punto z' y se aleja hasta el infinito, y además sobre esta curva, según las hipótesis, se cumple

$$\log|f(z)| \leq 0$$

podremos aplicar el teorema M, resultando finalmente la existencia de un círculo de centro z' y de radio $\rho(r_1)$ que depende únicamente de Ω, $W(r_1)$ y $\omega(W(r_1))$, en el cual

(2,4,2) $$\log|f(z)| \leq 1.$$

Del mismo modo se puede demostrar la existencia de otro círculo de centro z'' y de radio $\beta(r_1)$ en el cual se cumple asimismo la (2,4,2).

Por lo tanto, si

(2,4,3) $$2\beta(r_1) > 2\pi r_1/(n-1),$$

el trozo de curva $z=\varphi(t)$ que une los puntos z' y z'', unido a la recta que une asimismo estos dos puntos, formará un circuito cerrado que rodeará el origen y sobre el cual se verificará la (2,4,2).

Ahora bien, si

$$|\arg \varphi(t_1)| > 8\pi^2 \frac{r_1}{\beta(r_1)} + 16\pi,$$

27

existe evidentemente un entero n que verifica al mismo tiempo (2,4,1) y (2,4,3). Por lo tanto, puesto que

$$\lim_{r=\infty} \beta(r) = 0,$$

si existiera una sucesión de valores $\{t_k\}$ con $\lim_{k=\infty} t_k = \infty$ y para los cuales se cumpliera

$$|\arg \varphi(t_k)| > 8\pi^2 \frac{r_k}{\beta(r_k)} + 16\pi,$$

donde $r_k = |\varphi(t_k)|$, existiría una sucesión de circuitos cerrados $\{C_k\}$ tales que cualquier dominio acotado del plano complejo sería interior a todos ellos a partir de un valor de K que depende únicamente del dominio elegido, y además, sobre estos circuitos la función cumpliría la (2,4,2), lo cual demostraría que $f(z)$ es una constante, contrariamente a lo que hemos supuesto. En consecuencia, hemos demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA VIII.- Si $f(z)$ es una función entera no constante de orden infinito $\rho(r)$, que permanece acotada sobre la curva continua $z = \varphi(t)$ que tiende al infinito, entonces a partir de un valor t_0 de t se cumple

$$\frac{|\arg \varphi(t)|}{\log|\varphi(t)|} < \Lambda(|\varphi(t)|),$$

donde la expresión de $\Lambda(r)$ depende únicamente del orden $\rho(r)$ y de sus propiedades.

28

sigue Nota

25c.8=10

NOTA

En el n.º 2,1 hemos afirmado la existencia de una clase de funciones enteras que a partir de un valor de R verifican la desigualdad (2,1,1). A continuación demostraremos la existencia de tales funciones, o mejor dicho, de funciones que verifican desigualdades mucho mas restrictivas; a saber, demostraremos el resultado siguiente

TEOREMA.- Dada una función positiva no decreciente, $\psi(x)$, tal que

$$\lim_{x=\infty} \psi(x) = \infty,$$

existe siempre una función entera $f(z)$ tal que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, se cumple la desigualdad

$$M(r, f) < \psi\big(M(r(1+\varepsilon), f)\big)$$

29

para $r > r_0(\varepsilon, f)$.

Demostración.- En primer lugar definiremos las sucesiones $\{n_k\}$ y $\{R_k\}$, pongamos $n_1 = 0$ y $R_0 = 1/2$ y supongamos definidas las n_k para $1 \leq k \leq m$ y las R_k para $0 \leq k \leq n_m$, y definamos n_{m+1} y las R_k para $n_m < k \leq n_{m+1}$ del siguiente modo: n_{m+1} es el menor de los enteros $n \geq n_m + 1$ que verifican

$$\left(\frac{m^{n_m}}{R_0 \cdot R_1 \cdots R_{n_m}}\right)^2 < \psi\left[\left(\frac{(m+1)^{n_m}}{R_0 \cdot R_1 \cdots R_{n_m}}\right)\left(\frac{m+1}{m+1/2}\right)^{n-n_m}\right],$$

y

$$R_k = m + \frac{1}{2} \qquad \text{para} \qquad n_m < k \leq n_{m+1},$$

dada, pues, la función $\psi(x)$, las sucesiones $\{n_k\}$ y $\{R_k\}$ quedan por este procedimiento completamente determinadas.

Sea

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{R_0\cdot R_1\cdots R_k},$$

evidentemente, puesto que $\lim_{k=\infty} R_k=\infty$, la función $f(z)$ es una función entera.

Escribamos

$$m(r)=\max_{k\geq 0}\left[\frac{r^k}{R_0\cdot R_1\cdots R_k}\right],$$

según la definición de $\{R_k\}$ para cualquier valor de k se cumplirá

$$(m(k))^2<\psi(m(k+1)),$$

por otra parte, si $r>6/\varepsilon$, existe siempre por lo menos un entero k tal que

$$r\leq k<k+1<r\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right),$$

30

de lo cual se deduce inmediatamente que, para $r>6/\varepsilon$,

(1) $$(m(r))^2<\psi\left(m\left[r\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)\right]\right).$$

Además, según un resultado muy conocido de Valiron [11, IX, pag.240] se verifica

(2) $$M(r,f)<(m(r))^2,$$

excepto en una sucesión de intervalos en los cuales la variación de $\log r$ es finita. Por lo tanto, si r es mayor que una cierta constante $r_1(\varepsilon,f)$, existirá siempre un valor r' que verifica (2) y tal que

$$r<r'<r\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

En consecuencia, de (1) y (2) se sigue, para $r>r_0(\varepsilon,f)=\frac{6}{\varepsilon}+r_1(\varepsilon,f)$,

$$M(r,f)<M(r',f)<(m(r'))^2<\left(m\left[r\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)\right]\right)^2<$$

$$<\psi\left(m\left[r\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)^2\right]\right)\leq\psi\left(M[r(1+\varepsilon),f]\right).$$

lo cual es el teorema que tratamos de demostrar, En realidad en la última desigualdad hemos supuesto

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \leq 1+\varepsilon,$$

pero esta suposición no restringe en absoluto la generalidad de la demostración .

sigue bibliografía

21

c, 10=10

32

BIBLIOGRAFIA

Ahlfors (L) - Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen. (Acta Soc Scientiarum Fennicae N.S.A.II:9 1930)

Denjoy (A) - Sur les fonctions entieres de genre fini (C.R. de l'Acad. des Sci. de Paris T.145 pp. 106-108, 1907)

Grunsky (H) - (Math. Z., 42, pp. 674-679, 1937)

Macintyre (A.J.) - On the asymptotic paths of integral functions of finite order (J. London math. soc., t.10 pp. 34-39 1935)

Milloux (H) - Sur les valeurs asymptotiques des fonctions entieres d'ordre infini (Compositio Math. Vol. 1 pp.305-313 1935)

Nevanlinna (R) - Eindeutige analytische Funktionen, (Berlin 1936)

Nevanlinna (R) - Le theoreme de Picard-Borel et la theorie des fonctions méromorphes (Paris 1929)

Sunyer Balaguer (F) Propiedades de las funciones enteras representadas por series de Taylor lagunares (orden finito) (Collectanea Math. Vol. 2, 1949)

Sunyer Balaguer (F) - Sur le théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors (C.R.Acad. SCi. Paris t. 237, p. 548-550, 1953))

Valiron (G) - Directions de Borel des fonctions méromorphes (Mem. des Sci. Math. fas. LXXXIX Paris 1938)

Valiron (G) - Les théoremes generaux de M. Borel dans la theorie des fonctions entieres (Ann. Sci, de l'Ec. Norm. Sup. t.37, pag. 219, 1920)

22 Octubre de 1954.

siguen Notas para colocar a pie de página

25 c. 8=10

Notas que deben figurar al pie de pagina

(1).- Los números entre parentesis angulares remiten à la bibliografia del final del trabajo.

....

(2).- Los principales resultados de este capítulo fueron comunicados a la Academie des Sciences de Paris y aparecieron en sus C.R. [9].

32

....

(3).- Esto únicamente es cierto cuando $b>0$, y no cuando $b=0$; pero a nosotros nos interesa particularmente el caso en que $b>0$.

....

(4).- Cuando el valor asintótico es radial, el extremo inferior es alcanzado para un valor determinado de α; por eso em (1,1,1) hemos escrito *min*, en lugar de extremo.

....

(5).- Aqui suponemos $b_k>0$, pero el caso en que $b_k=0$ se trata asimismo sin dificultad.

....

(6).- Esta transformación no es absolutamente necesaria, únicamente aumenta los valores de la función $\varphi(b)$ que definiremos próximamente.

....

(7).- Tambien aqui podriamos prescindir de esta transformación; asi lo haremos en el número 2,4

....

(8).- Los razonamientos siguientes pueden aplicarse asimismo cuando

$f(z)$ es de orden finito, pero el resultado obtenido sería muy inferior al que, para el índice de rotación, deducimos del teorema II, y que hemos indicado en el número 1,7.

....

324