

## VAIORES ASINTOTICOS DE LAS FUNCIONES ENTERAS

Lema: AD INFINITUM

### INTRODUCCION

En 1907 Denjoy <sup>2</sup> ( ) lanzo la hipotesis de que el numero maximo de valores asintoticos distintos y finitos que podia tener una función entera de orden finito era de  $\rho$  y al mismo tiempo demostro esta hipotesis en un caso particular. Luego Carleman demostro en el caso general un resultado muy aproximado a la hipotesis de Denjoy. Finalmente Ahlfors <sup>1</sup> demostro totalmente el resultado previsto por Denjoy, completandolo con la afirmación de que el numero maximo de valores asintoticos depende asimismo del indice de rotacion de las curvas en las cuales la función se aproxima a dichos valores asintoticos.

Diversos autores, entre ellos Macintyre <sup>4</sup> y Grunsky <sup>3</sup>, han obtenido diferentes complementos al resultado que acabamos de señalar; pero hasta ahora, segun creo, no se ha estudiado la relación entre el numero maximo de valores asintoticos y las velocidades con que la función se aproxima a dichos valores. En el Capitulo I de esta memoria estudiaremos precisamente esta relación, empleando para medir la velocidad de aproximación de la función aun valor asintotico, la noción de tipo de dicho valor; noción que definimos en una memoria anterior <sup>8</sup> y que creo muy apropiada para este objeto ( ).

Los valores asintoticos de las funciones de orden infinito han sido bastante menos estudiadas y en general los resultados obtenidos

no son aplicables, o carecen de interes, para ciertas clases de funciones. En el capitulo II abordaremos este tema utilizando el metodo que en el capitulo I nos permite obtener resultados muy precisos. No obstante este metodo para el orden infinito, como era de suponer, no nos permite obtener una precision semejante.

Finalmente antes de terminar la introduccion daremos un enunciado de un resultado de Milloux en su forma mas precisa, que puede obtenerse siguiendo el razonamiento empleado por R. Nevanlinna 6, pag. 96-100 ; pues este resultado lo utilizaremos continuamente en el curso de las demostraciones contenidas en esta memoria. Su enunciado es el siguiente:

TEOREMA M.- La función holomorfa en el círculo verifica en este mismo círculo, la desigualdad

y si, ademas, en una curva continua que partiendo del origen llega hasta la circunferencia, la función viene acotada por

tendremos en todo el círculo

## CAPITULO I

## Orden finito

1.1.- Una función entera  $f(z)$  será llamada de orden  $\rho$  y de tipo  $\lambda$  del orden precisado  $\rho, \lambda$ , cuando

donde  $M(r, f)$  es el máximo de  $|f(z)|$  en la circunferencia  $|z|=r$

En un trabajo anterior definimos el tipo de un valor asintótico  $\lambda$ , Capítulo IV, pero en dicha memoria la definición incluía valores que no eran propiamente asintóticos; como ahora nos proponemos tratar únicamente de verdaderos valores asintóticos, debemos variar ligeramente la definición.

Diremos que  $f(z)$  tiende al infinito siguiendo una curva continua, cuando los valores que toma  $f(z)$  pueden representarse por  $f(z) = \phi(z) e^{\psi(z)}$ , donde  $\phi(z)$  es una función continua para todo valor real y positivo de  $r$ , que para estos valores de  $r$  puede tomar valores complejos y que finalmente cumple la condición

Representando por  $\mathcal{C}$  la totalidad de las curvas continuas que tienden al infinito y que verifican (pueden no existir ninguna)

donde  $f(z)$  es una función entera de tipo  $\lambda$  del orden precisado  $\rho, \lambda$ , si

diremos que es un valor asintotico de tipo de .

De igual modo, representando por el conjunto de valores de (puede no existir ninguno) tales que

si

(1.1.1.)

diremos que es un valor asintotico radial de tipo de .

En mi memoria citada 8 definia asimismo los valores asintoticos casi radiales, pero esta clase resulta totalmente innecesaria, pues segun puede deducirse de los razonamientos contenidos en el n. 4,2 de 8 y en particular de las formulas (4,22) y (4,23) de la misma memoria, la existencia de un valor asintotico casi radial de tipo impone la existencia de un valor asintotico radial del mismo tipo ( )

1,2.- Empezaremos por estudiar la relación entre el numero de valores asintoticos radiales y los tipos de los mismos, el resultado en este caso es intuitivo, pero tal vez por este motivo, el estudio de este caso nos permitira comprender mas facilmente los detalles del caso general.

TEOREMA I.- Si la función entera de orden y de tipo 1 del orden precisado tiene los valores asintoticos radiales , , ..., cuyos tipos son, respectivamente, , , ..., , se cumplira

Demostración.- Sea  $\epsilon$  el argumento correspondiente  $(\epsilon)$  al valor asintótico y supongamos que estos hayan sido numerados de manera que

Sea

puesto que  $f(x)$  para cualquier valor de  $x$ , según resulta del hecho de que  $f(x)$  es de tipo 1 del orden precisado  $\epsilon$ , las propiedades conocidas de  $f(x)$  nos permiten afirmar que para

tendremos  $f(x) > \epsilon$ . Sea pues  $\delta$  el valor mínimo tal que

mientras que  $f(x)$  representara el máximo valor que verifica

Evidentemente, según lo que acabamos de establecer, se verificaran

Por otra parte, aplicando el procedimiento habitual, puesto que  $f(x)$  y pasando al límite si es necesario, resulta

y por consiguiente, tendremos

cuando esta desigualdad debe escribirse

Sumando estas desigualdades para los diferentes valores de resulta finalmente

donde ; esta desigualdad transformada debidamente es la afirmación del teorema.

1,3.- En el caso general, o sea cuando los valores asintóticos no son radiales, o mejor dicho, pueden no ser radiales, la precisión del teorema de Denjoy-Carleman-Ahlfors resulta mas complicado. Su enunciado es el siguiente:

TEOREMA II.- Si la función entera de orden  $\lambda$  y de tipo  $\tau$  del orden precisado  $\lambda$  tiene los valores asintóticos  $a_1, a_2, \dots$ , cuyos tipos son, respectivamente,  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , y cuyo índice de rotación es  $\rho$ , se cumplirá

donde  $\phi(z)$  es una función que definiremos y que verifica  $\phi(z) = O(e^{-\lambda|z|})$  donde  $\lambda$  es una constante numerica.

Demostración.- Segun la definición de Ahlfors 1, pag. 27 el índice de rotación de una curva viene expresado por

por lo tanto, como quiera que en nuestro caso los valores asintoticos y sus tipos vienen definidos como el extremo inferior de un funcional en un conjunto de curvas, podria suceder que los indices de rotación de las diferentes curvas de  $\alpha$  no tuviesen relación entre si y no permitiesen, pues, la definición de un ~~único~~ índice de rotación del valor asintotico. Por consiguiente antes de empezar la demostración propiamente dicha del teorema, debemos demostrar que el índice de rotación de las diferentes curvas de  $\alpha$  es siempre el mismo y puede, por consiguiente tomarse como índice de rotación del valor asintotico correspondiente.

Sea  $\alpha$  un valor asintotico de tipo  $\alpha$  y sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas de  $\alpha$ ; si

y  $\alpha$ , sera posible hallar dos sucesiones  $\alpha_n$  y  $\beta_n$  tales que

y que

A partir del punto

sigamos la curva  $C_1$  hasta el punto

regresando a  $\alpha$  si guiendo la curva  $C_2$ . Evidentemente esta

curva rodea el origen y, puesto que a partir de un valor de  $\epsilon$  es exterior a cualquier círculo fijo, queda demostrado que, con las condiciones supuestas, contendrá en su interior cualquier dominio acotado (asimismo a partir de un valor de  $\delta$ ). Además, como

la función  $f(z)$  sería acotada en todo el plano complejo. Por consiguiente, como suponemos que  $f(z)$  no es idéntica a una constante, debe verificarse  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ .

Como el anterior razonamiento es válido asimismo cuando el valor de  $\epsilon$  correspondiente a la curva  $C_\epsilon$  es distinto del que corresponde a  $C_\delta$ , podemos afirmar que el índice de rotación es igual para todos los valores asintóticos de una misma función. Este último extremo fue demostrado ya por Ahlfors [1] mediante un procedimiento mucho más simple. En realidad si se supone la existencia de dos o más valores asintóticos distintos, el mismo procedimiento de Ahlfors permite ya demostrar que el índice de rotación de las curvas que intervienen en la definición de sus tipos, es igual para todas ellas.

Después de estas consideraciones sobre el índice de rotación, es posible entrar de lleno en la demostración propiamente dicha del teorema II. Sea

a fin de coincidir dentro lo posible con las notaciones de Ahlfors, representaremos, contrariamente a la costumbre, la parte real de  $z$  por  $x$  y su parte imaginaria por  $y$ , es decir

Ahora bien, cualquiera que sea el valor de  $\epsilon$  dadas las hipótesis del teorema, existiran al menos  $n$  curvas representadas por

tales que

y que para suficientemente grandes se cumpla

(1,3,1)

donde . Sea un valor cualquiera de talque si se cumplan las desigualdades (1,3,1), y efectuemos la transformación de variables definida por ( )

(1,3,2)

esta transformación efectua la representación conforme de la faja

sobre el círculo con correspondencia del punto y del

Por lo tanto, dada la elección de existira una curva que desde el origen llega hasta la circunferencia en la cual se cumple

(1,3,3)

Ademas, puesto que es de tipo 1 del orden precisado, teniendo en cuenta las dos transformaciones de variables, y si , y por consiguiente , es suficientemente grande, en el círculo tendremos

(1,3,4)

Las desigualdades (1,3,3) y (1,3,4) son de la forma de las hipotesis que intervienen en el teorema M, por lo tanto, aplicando este teorema veremos finalmente que en el círculo

se cumpliera la desigualdad

(1,3,5)

Por otra parte, las propiedades de los ordenes precisados permiten demostrar facilmente que

por consiguiente, si es suficientemente grande la desigualdad (1,3,5) se cumpliera evidentemente en el circulo

(1,3,6)

Sea

(1,3,7)

de (1,3,2), (1,3,5), (1,3,6) y (1,3,7) deduciremos fácilmente que, eligiendo convenientemente el valor de  $\epsilon$  y si  $r$  es suficientemente grande en el segmento rectilíneo

(1,3,8)

se cumpliera la desigualdad

lo cual demuestra que si  $\epsilon$  el maximo de  $\epsilon$  en el segmento (1,3,8) tiende a 0 cuando  $r$  . Si  $r$  como

el resultado continua siendo valido.

Ahora bien, sea la faja comprendida entre las curvas y ( debe interpretarse como ). Nosotros suponemos que la numeración de las ha sido establecida de forma que las ~~no tengan ningun punto~~, ,..., no tengan ningun punto que sea interior a dos de ellas, lo cual es posible segun puede demostrarse facilmente. Sea el conjunto formado por la suma de los segmentos (1,5,8) cuando toma la totalidad de los valores reales positivos; si de se suprimen los puntos que pertenecen a o a obtendremos una faja que llamaremos para la cual, y del mismo modo que Ahlfors define para 1, podremos definir la función.

El hecho de que el maximo de t enda a 0 en cuando , permite repetir para ,..., el razonamiento de Ahlfors .1. pag. 21-27 y puesto que evidentemente

llegaremos a la desigualdad

no sea

Como quiera que es una función continua y puesto que es arbitraria, resulta finalmente

que es la afirmación del teorema. Además, la desigualdad resulta fácilmente de la definición de

Del teorema II se sigue

COROLARIO.- Una función entera de orden  $\rho$  y de tipo  $\lambda$  del orden precisado  $\rho$ , puede tener exactamente  $\rho$  valores asintóticos finitos distintos, únicamente cuando el índice de rotación y los tipos de estos valores son nulos.

1.4.- Grunsky <sup>3</sup> complementó el teorema de Denjoy-Carleman-Ahlfors introduciendo, en lugar del orden  $\rho$ , el orden inferior

y, en lugar del índice de rotación, la cantidad

Después de lo expuesto al principio del número anterior resulta fácil demostrar que esta cantidad es igual para todas las curvas de  $\rho$  y además, que también es igual para todos los valores asintóticos de una misma función entera.

Aplicando, pues, los métodos de Grunsky y los razonamientos contenidos en el n. anterior es fácil demostrar el teorema siguiente:

TEOREMA III.- Si la función entera  $f(z)$  de orden  $\rho$ , de tipo  $\lambda$  del orden precisado  $\rho$  y de orden inferior  $\rho_1$ , tiene los valores asintóticos  $a_1, a_2, \dots, a_\rho$ , cuyos tipos respectivos son  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\rho$ , resulta

donde  $\rho$  es la cantidad definida anteriormente, utilizando las curvas que intervienen en la definición de los tipos de los valores asintóticos

cos de .

De este teorema se sigue inmediatamente el siguiente

COROLARIO.- Una función entera de orden  $\rho$ , de tipo 1 del orden precisado  $\lambda$  y de orden inferior  $\lambda_1$ , puede tener exactamente  $\nu$  valores asintóticos finitos <sup>únicamente</sup> distintos, cuando  $\nu > \lambda_1$  y  $\nu \leq \lambda$  para

Además, puesto que  $\nu > \lambda_1$  cuando  $\nu > \lambda_1$  resulta que  $\nu > \lambda_1$ ; pero este resultado es ya clásico y se deduce inmediatamente de los procedimientos de Ahlfors.

1.5.- También en los interesantes resultados de Masintyre 4 pueden introducirse los tipos de los valores asintóticos. En efecto, sea  $\gamma$  una de las curvas que intervienen en la definición del tipo del valor asintótico  $\alpha$ , es decir una de las curvas de  $\gamma$ . Representemos por  $\rho$  el extremo inferior de la longitud en el plano de las curvas que unen cualquier punto de  $\gamma$  con cualquier punto de  $\gamma$  sin tener puntos comunes con ninguna de las  $\gamma$  y sea

Por otra parte, representando por  $\rho$  el

cuando  $\rho$  tiende al infinito siguiendo la curva  $\gamma$  podremos definirlo los

donde estos límites se refieren a cuando las curvas

varian de cualquier modo, con la sola condición de que tienda a para

Con estas notaciones y aplicando los métodos de Macintyre junto con los ejemplos contenidos en el n. 1,3, podemos demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA IV.- Si la función entera de orden  $\rho$ , de tipo 1 del orden precisado  $\sigma$  y de orden inferior  $\lambda$ , tiene los valores asintóticos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , cuyos tipos respectivos son  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ , tendremos

y

De este teorema tampoco daremos la demostración limitándonos al esquema indicado antes del enunciado.

1,6.- Observación I.- La definición que damos de  $\rho$  permite demostrar que  $\rho \geq \lambda$  cuando  $\lambda < \rho$ ; pero creo probable que mediante otro método de demostración pueda afirmarse que los teoremas anteriores continúan siendo válidos si la definición de  $\rho$  se sustituye por otra que verifique  $\rho \geq \lambda$  cuando  $\lambda < \rho$ .

Observación II.- Si en los teoremas II, III y IV sabemos que algunos de los valores asintóticos son radiales, para los valores de  $\rho$  correspondientes puede ponerse

1,7.- Del teorema II y asimismo del teorema de Ahlfors se deduce que el índice de rotación de los valores asintóticos de una función es

entera de orden  $n$  viene acotado independientemente del valor de  $\epsilon$  por

En realidad el teorema II nos da la acotación mas precisa

En el capítulo II emplearemos el teorema III para acotar la rotación de las curvas en las que una función de orden infinito permanece acotada.

1,8.- R. Nevanlinna 7, pag. 95 afirma Bien qu'il soit vraisemblable que toute valeur de défaut positif soit une valeur asymptotique; la réciproque n'est pas vraie y añade mas abajo Pour qu'il <sup>en</sup>soit ainsi, il faut que la convergence ait lieu dans des domaines assez larges et qu'elle soit d'une intensité qui corresponde a la croissance de la fonction caractéristique .

Los metodos anteriores permiten afirmar que es suficiente que la intensidad sea grande para que los dominios sean suficientemente extensos, es decir, podemos afirmar que

TEOREMA V.- Todo valor asintotico de tipo positivo de una función entera de orden  $n$  y de orden precisado  $\lambda$  es asimismo un valor de defecto positivo.

## CAPITULO II

## Orden infinito

2,1.- Como sabemos, en el caso del orden infinito pueden existir infinidad de valores asintóticos y, según hace observar ya Milloux 5 ello impone que en el estudio de los mismos habra necesidad de acotar superiormente el modulo de las  $\rho$  e inferiormente los valores mediante cantidades variables que dependen de  $\rho$ . Además, igual que Milloux, consideraremos en lugar de verdaderos valores asintóticos, el número de curvas interiores a una corona circular en las cuales la función se aproxima suficientemente a los  $\rho$ , sin necesidad de que estas curvas puedan extenderse hasta el infinito de modo que la función tienda hacia  $\rho$ . En esta dirección Milloux 5 obtuvo el resultado siguiente

TEOREMA .- Sea  $f(z)$  una función entera de orden infinito. En ~~general~~ general es imposible que en la corona circular

existan un número mayor que

de curvas  $N$  en cada una de las cuales  $\rho$  es inferior a  $\rho_0$  y tales que sobre  $\rho_0$  sea satisfecha la desigualdad

con

donde la constante  $K$  depende del valor que se tome para la  $\rho_0$ .

Desgraciadamente cuando

(2,1,1)

la acotación dada por el teorema anterior pierde su valor, puesto que, en este caso, la acotación no proviene del hecho de la proximidad del valor de la función a determinados valores constantes, sino de que el número máximo ~~de valores~~ posible de valores que verifican

es inferior al primer miembro de la desigualdad ((2,1,1)). Por otra parte, según demostraremos en una nota al final del presente trabajo, existe una clase de funciones enteras de orden infinito para las cuales los valores de que cumplen (2,1,1) no son excepcionales, sino todo lo contrario, puesto que la desigualdad se cumple a partir de un valor de . Estas consideraciones demuestran la necesidad de considerar de nuevo el problema del número de valores asintóticos para el caso del orden infinito.

2.2.- Los resultados que obtenemos a continuación se siguen del teorema II mediante un procedimiento semejante a la primera parte de la demostración del teorema II, es decir, la parte en que se demuestra la existencia de los . Me parece probable que con otro método de demostración los resultados que obtendremos podrían precisarse; así mismo parece posible que si en lugar de considerar los caminos únicamente en el interior de una corona circular, considerásemos caminos extendiéndose hasta el infinito, la acotación del número de valores asintóticos disminuiría, tal vez notablemente. Sin embargo, hasta el presente no conozco método alguno que permita hacerlo.

En primer lugar demostraremos el resultado siguiente.

TEOREMA VI.- Sea una función entera de orden infinito. Si existen curvas que atraviesan la corona

tales que sobre se cumple

donde las son constantes que verifican

entonces tendremos

donde depende de y .

Demostración.- Efectuemos de nuevo la transformación

y pongamos

Sea además el punto en que la transformada de corta la recta . Pongamos, igual que en el n. 1,3 00

(2,2,1)

y apliquemos el teorema II a en el círculo , entonces resulta que para

(2,2,2)

se cumple

(2,2,3)

Por otra parte, es fácil demostrar que

Por lo tanto, si escribimos como en el capítulo anterior

de (2,2,1), (2,2,2) y (2,2,3), resultara que para

(2,2,4)

se cumple

si suponemos, como es posible, y y y por lo tanto suficientemente grande, la última desigualdad para dos valores de será incompatible con la condición que según el teorema cumplen las por lo tanto, los segmentos definidos por (2,2,4) no tendrán puntos en común lo cual demuestra que

lo cual demuestra el teorema.

Toda elección determinada de la función dará lugar a un corolario del teorema anterior; nosotros nos limitaremos a enunciar y demostrar el siguiente

COROLARIO.- Con las mismas hipótesis que en el teorema VI y tomando

se verificara

excepto en una sucesión de intervalos donde la variación de  $\phi$  es finita. La constante  $\epsilon$  es distinta de la del teorema VI pero depende tambien de  $\delta$  y  $\eta$ .

Demostración.- Segun un conocido teorema de Borel los valores de  $\phi$  para los cuales

están contenidos en una sucesión de intervalos cuya suma es finita; aplicando este resultado al teorema VI en el cual  $\phi$  se determina como en el corolario, resulta este demostrado.

2,3.- Si se utiliza la noción de orden para regularizar y acotar el crecimiento de una función de orden infinito, puede enunciarse un teorema semejante al teorema VI para cada clase de ordenes. Indicaremos el procedimiento para un solo caso, que nos parece el mas interesante.

Si  $\phi$  es una función decreciente tal que

existe siempre para toda función entera  $\phi$  de orden infinito, una función  $\psi$  no decreciente tal que escribiendo

se verifican las

La función  $f(x)$  se llama generalmente orden de  $n$ ; aquí seguiremos esta costumbre no obstante en trabajos anteriores llamabamos orden a  $n$ . Daremos a continuación el esquema de la demostración de la existencia de la función  $f(x)$ . A pesar de que esta demostración puede hallarse en varios libros y memorias (por ejemplo Valiron 10, pag. 27-33) daremos la demostración puesto que queremos que tengamos, además de las señaladas, otra propiedad que nos será necesaria en el teorema VII.

Sea

y construyamos la función  $f(x)$  lineal para

y definida por las condiciones

donde  $\epsilon$  es un número positivo dado. Evidentemente la  $f(x)$  es creciente y convexa en cierto intervalo  $(a, b)$ , tiende al infinito cuando  $x \rightarrow a$  y verifica

Definamos  $f(x)$  por

y sea el máximo de

para los valores de que cumplen

donde es la función inversa de .

De la definición de y de resulta fácilmente que tiene las propiedades siguientes

existe una sucesión que tiende al infinito tal que

y además la función

es no decreciente.

Escribiendo pues

tendremos, puesto que

o sea algo más de lo que habíamos exigido.

Con estos ordenes podemos enunciar un teorema semejante al VI, III a saber

TEOREMA VII.- Sea una función entera de orden infinito si existen curvas que atraviesan la corona

tales que sobre se cumple

donde las son constantes que verifican

entonces tendremos

donde depende unicamente de y .

**Demostración.**- La demostración de este teorema, teniendo en cuenta la desigualdad

sigue el mismo curso que la demostración del teorema VI llegándose a la desigualdad

de la cual teniendo en cuenta que

y que tiende a 0 cuando , resulta finalmente el teorema.

2.4.- Sea una función entera de orden infinito  $(\rho)$ , y sea la representación paramétrica de una curva continua que tienda al infinito y en la cual permanece acotado; en particular supondremos que . Vamos a acotar el crecimiento de

por medio de una función cuyo crecimiento depende únicamente del de

Como a partir de un valor de  $\alpha$  la curva no puede contener curvas cerradas que rodeen el origen, puesto que, si así fuese, la función sería una constante; podemos suponer sin pérdida de generalidad que dicha curva no se corta a sí misma. Tampoco disminuye la generalidad las siguientes hipótesis que por otra parte nos permitirán simplificar la demostración

Supongamos que  $C$  cumple  $(2.4.1)$  y

(2.4.1)

entonces pueden presentarse dos casos: 1- Representando por  $\alpha$  el menor valor de  $\alpha$  que verifica  $(2.4.1)$ , tendremos

2- Con la misma notación se cumple

En el primer caso evidentemente es posible hallar una sucesión de puntos  $P_n$  situados sobre la curva y cuyos argumentos forman una sucesión monótona y verifican

por lo tanto, existiran sobre la curva al menos dos puntos cuyos argumentos difieren de una cantidad superior a  $\epsilon$  y cuya distancia es in-

ferior a

En el segundo caso existirá una sucesión de puntos situados sobre la curva, cuyos argumentos forman asimismo una sucesión monótona, y que verifican

esto se deduce fácilmente de la suposición que la curva no se corta a sí misma. En consecuencia, en este caso existen asimismo dos puntos situados sobre la curva cuyos argumentos difieren de una cantidad superior a  $\epsilon$  y cuya distancia en este caso es inferior a  $\delta$ .

En resumen siempre será posible hallar dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  situados sobre la curva, cuyos argumentos difieren de una cantidad superior a  $\epsilon$  y que verifiquen

Consideremos ahora el círculo de centro  $O$  y de radio  $R$  como según la propiedad de los ordenos, se verifica

en dicho círculo tendremos

y puesto que la curva  $C$  pasa por el punto  $P_1$  y se aleja hasta el infinito y además sobre esta curva según las hipótesis se cumple

podremos aplicar el teorema II, resultando finalmente la existencia de un círculo de centro  $O$  y de radio  $R$  que depende únicamente de  $\epsilon$  y  $\delta$ , en el cual

(2,4,2)

Del mismo modo se puede demostrar la existencia de otro círculo de centro  $\alpha$  y de radio  $r$  en el cual se cumple asimismo la (2,4,2)

Por lo tanto, si

(2,4,3)

el trozo de curva  $\gamma$  que une los puntos  $\alpha$  y  $\beta$  unido a la recta que une asimismo estos dos puntos formara un circuito cerrado que rodeara el origen y sobre el cual se verificara la (2,4,2).

Ahora bien, si

existe evidentemente un entero  $n$  que verifica al mismo tiempo (2,4,1) y (2,4,3). Por lo tanto, puesto que

si existiera una sucesión de valores  $\alpha_n$  con  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  y para los cuales se cumpliera

donde  $\gamma_n$  existiría una sucesión de circuitos cerrados tales que cualquier dominio acotado del plano complejo sería interior a todos ellos a partir de un valor de  $n$  que depende únicamente del dominio elegido, y además, sobre estos circuitos la función cumpliría la (2,4,2) lo cual demostraría que  $f(\alpha)$  es una constante, contrariamente a lo que hemos supuesto. En consecuencia hemos demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA VIII.- Si  $f(z)$  es una función entera no constante de or-

den infinito , que permanece acotada sobre la curva continua  
que tiende al infinito, entonces a partir de un valor de  
se cumple

donde la expresion de depende unicamente del orden y de sus  
propiedades.

## NOTA

En el n. 2,1 hemos afirmado la existencia de una clase de funciones enteras que a partir de un valor de  $x$  verifican la desigualdad (2,1,1). A continuación demostraremos la existencia de tales funciones, o mejor dicho de funciones que verifican desigualdades mucho mas restrictivas; a saber demostraremos el resultado siguiente

TEOREMA.- Dada una función positiva no decreciente,  $f(x)$ , tal que

existe siempre una función entera  $P(x)$  tal que, cualquiera que sea  $x$ , se cumple la desigualdad

para

Demostración.- En primer lugar definiremos las sucesiones  $a_n$  y  $b_n$ , pongamos  $a_0 = 1$  y  $b_0 = 1$  y supongamos definidas las  $a_n$  para  $n < n_0$  y las  $b_n$  para  $n < n_0$  y definamos  $a_{n_0}$  y las  $b_{n_0}$  del siguiente modo:  $a_{n_0}$  es el menor de los enteros que verifican

y

dada, pues, la función  $f(x)$ , la sucesiones  $a_n$  y  $b_n$  quedan por este procedimiento completamente determinadas.

Sea

evidentemente puesto que la función es una función entera.

Escribamos

según la definición de para cualquier valor de se cumplirá

por otra parte, si , existe siempre por lo menos un entero tal que

de lo cual se deduce inmediatamente que, para

(1)

Además según un resultado muy conocido de Valiron 11, IX, pag.240 se verifica

(2)

excepto en una sucesión de intervalos en los cuales la variación de es finita. Por lo tanto, si es mayor que una cierta constante existirá siempre un valor que verifica (2) y tal que

en consecuencia, de (1) y (2) se sigue, para

lo cual es el teorema que tratamos de demostrar. En realidad en la última desigualdad hemos supuesto

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \leq 1 + \varepsilon$$

pero esta suposición no restringe en absoluto la generalidad de la demostración .

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- Ahlfors (L) - Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen. (Acta Scientiarum Fennicae N.S.A.IN:9 1930)
- 2.- Denjoy (A) - Sur les fonctions entières de genre fini (C.R. de l'Acad. des Sci. de Paris T.145 pp. 106-108, 1907)
- 3.- Grunsky (H) - (Math. Z., 42, pp. 674-679, 1937)
- 4.- Macintyre (A.J.) - On the asymptotic paths of integral functions of finite order (J. London math. soc., t.10 pp. 34-39 1935)
- 5.- Milloux (H) - Sur les valeurs asymptotiques des fonctions entières d'ordre infini (Compositio Math. Vol. 1 pp.305-313 1935)
- 6.- Nevanlinna (R) - Eindeutige analytische Funktionen, (Berlin 1936)
- 7.- Nevanlinna (R) - Le ~~theoreme~~ de Picard-Borel et la theorie des fonctions méromorphes (Paris 1929)
- 8.- Sunyer Balaguer (F) Propiedades de las funciones enteras representadas por series de Taylor lagunares (orden finito) (Collectanea Math. Vol. 2, 1949)
- 9.- Sunyer Balaguer (F) - Sur le theoreme de Denjoy-Carleman-Ahlfors (C.R.Acad. Sci. Paris t. 237, p. 548-550, 1953)
- 10.- Valiron (G) - Directions de Borel des fonctions méromorphes (Mem. des Sci. Math. fas. LXXXIX Paris 1938)
- 11.- Valiron (G) - Les theoremes generaux de M. Borel dans la theorie des fonctions entières (Ann. Sci, de l'Ec. Norm. Sup. t.37, pag. 219, 1920)

22 Octubre de 1954.

Notas que deben figurar al pie de pagina

( ).- Los numeros entre parentesis angulares remiten a la bibliografia del final del trabajo.

.....

( ).- Los principales resultados de este capitulo fueron comunicados a la Academie des Sciences de Paris y aparecieron en sus C.R. 9

.....

( ).- Esto unicamente es cierto cuando y no cuando ; pero a nosotros nos interesa particularmente el caso en que

.....

( ).- Cuando el valor asintotico es radial el extremo inferior es alcanzado para un valor determinado de ; por eso en (1,1,1) hemos escrito en lugar de

.....

( ).- Aqui suponemos pero el caso en que se trata asimismo sin dificultad

.....

( ).- Esta transformación no es absolutamente necesaria, unicamente aumenta los valores de la función que definiremos proximaamente.

.....

( ).- Tambien aqui podriamos prescindir de esta transformación; asi lo haremos en el numero 2,4

.....

( ).- Los razonamientos siguientes pueden aplicarse asimismo cuando

es de orden finito, pero el resultado obtenido seria muy inferior al que para el índice de rotación, deducimos del teorema II y que hemos indicado en el numero 1,7.

.....