45

16-C

VALORES EXCEPCIONALES DE LAS FUNCIONES
ENTERAS O MEROMORFAS REPRESENTADAS POR
SERIES DE TAYLOR LAGUNARES

Lema: AD ABSURDUM

(Para el concurso a premios anuales del Consejo Superior de Investigaciones Cientificas para el año 1955)

Las notas que deben figurar al pie de pagina han sido reunidas en dos hojas al final.

VALORES EXCEPCIONALES DE LAS FUNCIONES ENTERAS O MEROMORFAS REPRESENTADAS POR SERIES DE TAYLOR LAGUNARES

Lema: AD ABSURDUM

INTRODUCCION

Hadamard [7] () fue quien por primera vez, señaló que debia existir una relación entre los valores excepcionales de una función entera y las propiedades lagunares de la serie de Taylor que la representa. Luego se ocuparon de este tema Fejer [6], Biernacki [2] () y Pólya [13], pero los métodos utilizados por estos autores no les permitieron obtener resultados précisos. Hace algunos años, sin conocer ninguno de los trabajos de los autores citados anteriormente, me ocupé de este tema, obteniendo, mediante un método bastante simple unos resultados sumamente precisos. Luego continué ~~pmkk~~ trabajando sobre el mismo tema obteniendo algunos resultados inmejorables en el sentido de que la condición lagunar no podia debilitarse sin que el resultado dejase de cumplirse. Además extendí la teoria a las funciones meromorfas.

En esta memoria, además de varios resultados inéditos, expongo asimismo algunos de aquellos resultados dispersos en mis memorias anteriores, a fin de que esta memoria contenga un estudio lo mas completo posible del tema, con los resultados demostrados por procedimientos similares.

En el primer capítulo me ocupo de las funciones de orden finito, donde, como es habitual, los resultados son mucho mas precisos que para el orden infinito, que estudiamos en el segundo capítulo.

Antes de dar en forma imprecisa la idea común contenida en los resultados de esta memoria debemos dar el significado de algunas notaciones, al mismo tiempo daremos otras que nos serán útiles en los capítulos siguientes y concretaremos la terminologia que emplearemos en la totalidad del trabajo.

Muy a menudo aparecerán en esta memoria expresiones de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{l_k},$$

en ellas la sucesión $\{l_k\}$ (*) representará siempre una sucesión de números enteros tal que

$$0 = l_0 < l_1 < \cdots < l_k < \cdots \qquad \lim_{k=\infty} l_k = \infty;$$

la condición $0 = l_0$ no impone ninguna restricción, puesto que nada impide que $a_0 = 0$.

Ahora representando por $N(l)$ el mayor de los k tales que $l_k < l$ definiremos, según es costumbre, la densidad máxima D de $\{l_k\}$ por

$$D = \lim_{x=1} \overline{\lim_{l=\infty}} \frac{N(l) - N(xl)}{l - xl},$$

la función de densidad $D(l)$ de $\{l_k\}$ por

$$D(l) = \frac{N(l)}{l}$$

y, finalmente, la densidad media superior $\overline{D}^*$ de $\{l_k\}$ por

$$\overline{D}^* = \overline{\lim_{l=\infty}} \left(l^{-1} \int_0^l D(x)\, dx \right).$$

Por otra parte, en el caso del orden finito una función $\rho(r)$ tal que

$$\lim_{r=\infty} \rho(r) = \rho, \qquad \lim_{r=\infty} \rho'(r)\, r \log r = 0,$$

donde ρ es un número finito, será llamada un orden precisado, y la expresión $r^{\rho(r)}$ la repreentaremos siempre en el capítulo primero por $U(r)$. Entonces, si la función característica de Nevanlinna $T(r, f)$ de la función meromorfa $f(z)$ verifica

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r,f)}{U(r)} = k,$$

diremos:

1º.- si $b=0$, que $f(z)$ es de orden precisado inferior a $\rho(r)$
2º.- si $0<b<\infty$, que $f(z)$ es de orden precisado equivalente a $\rho(r)$
3º.- si $b=\infty$, que $f(z)$ es de orden precisado superior a $\rho(r)$

Cuando $f(z)$ es entera, escribiendo

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r,f)}{U(r)} = b_1, \tag{1}$$

donde $M(r,f)$ representa el máximo de $|f(z)|$ en la circunferencia $|z|=r$, podrá suceder que $b \neq b_1$ pero siempre que $b=0$ resultará $b_1=0$, y a la inversa; y del mismo modo resulta fácil demostrar que las condiciones $0<b<\infty$ y $0<b_1<\infty$ son equivalentes. Por lo tanto, en el caso de funciones enteras, para definir las tres clases que hemos definido en relación al orden precisado $\rho(r)$ hubiesemos podido partir de b_1, y la clasificación hubiese coincidido con la anterior. Finalmente, cuando (1) se cumpla diremos que la función entera $f(z)$ es de tipo b_1 del orden precisado $\rho(r)$.

En el caso del orden infinito utilizaremos los órdenes de K. L. Hiong [8], que, como en este caso únicamente estudiremos funciones enteras, definiremos del siguiente modo: Sea $\rho(r)$ una función que tiende al infinito, ahora para señalar mayormente que se trata del orden infinito (y lo mismo haremos en la totalidad del capítulo segundo) representaremos la función $r^{\rho(r)}$ por $W(r)$, y si $\rho(r)$ es tal que $\log W(r)$ es una función convexa de $\log r$ que además verifica

$$W\left(r+\frac{r}{\log W(r)}\right)<\left[W(r)\right]^{1+o(1)} \qquad (r\to\infty),$$

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log W(r)} = 1,$$

diremos que la función entera $f(z)$ es de orden infinito $\rho(r)$.

(cuando existen varios órdenes $\rho(r)$, $\rho_0(r)$, $\rho_1(r)$,..., las expresiones correspondientes vendrán representadas por $W(r)$, $W_0(r)$, $W_1(r)$,...,). Siguiendo la costumbre la expresión $o(1)$ representa cantidades que tienden a cero cuando la variable tiende a un determinado límite, y de modo parecido $O(1)$ representará cantidades que permanecen acotadas cuando la variable tiende asimismo a un límite. Caso de que exista posibilidad de confusión señalaremos a que variable y limite se refiere estas expresiones, pero generalmente no haremos ninguna indicación.

Finalmente, siguiendo a Nevanlinna la expresión $n(r,f)$ representará el número de polos de $f(z)$ contenidos en el círculo $|z| \leq r$; y por lo tanto, $n(r,1/f)$ representará el número de ceros de $f(z)$ contenidos en el mismo círculo.

La idea general de los teoremas de esta memoria podemos ahora explicarla en forma algo imprecisa como sigue: Sea $F(z)$ una función entera de orden ρ y de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$, los teoremas clásicos permiten (al menos para los valores de ρ próximos a un entero) la existencia de un par excepcional $f_0(z) \neq 0$ y $f_1(z)$ de funciones enteras de orden precisado inferior a $\rho(r)$ tal que la expresión

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r,1/(f_0F-f_1))}{U(r)}$$

toma un valor mucho menor que para cualquier otro par $f_0(z) \neq 0$ y $f_1(z)$ de funciones enteras de orden precisado inferior a $\rho(r)$.
Del mismo modo, si $F(z)$ es de orden infinito, los mismos teoremas clásicos permiten la existencia de un par $f_0(z) \neq 0$ y $f_1(z)$ de funciones enteras de orden inferior, para el cual

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n(r,1/(f_0F-f_1))}{\log W(r)} < 1$$

Los teoremas contenidos en esta memoria afirman que cuando los exponentes de la serie de Taylor de $F(z)$ verifican ciertas condiciones lagunares desaparecen la posibilidad de la existencia del par excepcional.

CAPITULO I

ORDEN FINITO

1,1.- En varias de mis memorias anteriores, precisando un resultado de Wiman [16] obtuve un lema muy interesante sobre el comportamiento de las funciones enteras de orden entero que admiten un valor excepcional; luego extendí este resultado a las funciones meromorfas de orden entero que toman dos valores en un conjunto de puntos relativamente poco numeroso. Posteriormente demostré estos resultados para el caso en que el orden no es entero. A continuación daremos el resultado para las funciones enteras, el cual nos permitirá demostrar, en el número siguiente el resultado general de que acabemos de hablar.

LEMA 1.- Sea $f(z)$ una función entera de orden $\rho \geq 1/2$ (1) y de orden precisado equivalente o superior a $\rho(r)$. Si

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{m(r,1/f)}{U(r)} < B\,C(\rho),$$

donde $C(\rho)$ es una constante que depende únicamente de ρ; entonces, para $\Omega^{-1}R \leq r \leq \Omega R$ y $z = re^{i\alpha}$ se cumple

(1,1,1) $$\log|f(z)| = \left(\frac{r}{R}\right)^{m} |\Psi(R,f)| \cos(m\alpha - ma(R,f)) + \Omega^{m+1}(B+o(1))\,U(R),$$

donde m es el entero mas próximo a ρ, y donde como habitualmente $o(1)$ representa una cantidad que tiende a cero, en este caso cuando $R \to \infty$.

Además, si existe una sucesión $\{R_n\}$ ($\lim_{n=\infty} R_n = \infty$) tal que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M(R_n,f)}{U(R_n)} = b > B,$$

entonces

(1,1,2) $$(b - B - o(1)) < \frac{|\Psi(R_n,f)|}{U(R_n)} < b\,\beta\left(\frac{B}{b}\right) + o(1),$$

donde $\beta(x) \to 1$ cuando $x \to 0$.

DEMOSTRACIÓN.- Sea q el entero que verifica

$$q \leq \rho < q+1,$$

según unos resultados sumamente conocidos podemos escribir

$$f(z) = z^{n} e^{h(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E_q\left(\frac{z}{z_k}\right), \tag{1,1,3}$$

donde n es un entero positivo o nulo, $h(z)$ un polinomio de grado q como máximo que escribiremos

$$h(z) = h_q z^q + \cdots + h_0$$

y $E_q(u)$ es el factor primario de Weierstrass, o sea

$$E_q(u) = (1-u)\exp\left(u + \cdots + \frac{u^q}{q}\right)$$

y donde finalmente $\{z_k\}$ representa la sucesión de los ceros no nulos de $f(z)$.

Supongamos primeramente que $\rho < q + \frac{1}{2}$ entonces evidentemente $m = q \geq 1$ puesto que, según las hipótesis que hemos admitido, $\rho \geq 1/2$.

Como

$$\log E_k(u) = \log E_{k-1}(u) + \frac{u^k}{k}, \tag{1,1,4}$$

en virtud de (1,1,3) tendremos

$$\left\{\begin{aligned} \log|f(z)| \leq {} & (h_{q-1} + O(1))\rho^{q-1} + \sum_{k=1}^{m_1} \log\left|E_{q-1}\left(\frac{z}{z_k}\right)\right| + \\ & + \sum_{k=m_1+1}^{\infty} \log\left|E_q\left(\frac{z}{z_k}\right)\right| + \Re\left(h_q z^q + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{m_1}\left(\frac{z}{z_k}\right)^q\right), \end{aligned}\right. \tag{1,1,5}$$

donde m_1 es el número de los z_k que verifican $|z_k| \leq R$ y donde $\Re(\psi)$ representa la parte real de ψ. Además, según hemos indicado en el enunciado del lema 1, ρ representa $|z|$. Por lo tanto, si ponemos

$$(1,1,6)\quad \begin{cases} \varphi(r,f) = (h_{m-1} + o(1))\, r^{m-1} + \\ + \displaystyle\sum_{k=1}^{n_1} \log\left|E_{m-1}\left(\frac{z}{z_k}\right)\right| + \sum_{k=n_1+1}^{\infty} \log\left|E_m\left(\frac{z}{z_k}\right)\right| \end{cases}$$

$$\psi(z,f) = h_m z^m + \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n_1} \frac{z^m}{z_k^m},$$

y puesto que

$$\mathcal{R}(\psi(z,f)) = \left(\frac{r}{R}\right)^m |\psi(R,f)| \cos(m\alpha - m\alpha(R,f)),$$

donde $\psi(R,f)$ y $\alpha(R,f)$ dependen únicamente de R y de f, teniendo en cuenta que, en este caso según hemos dicho $m = q$, resultará finalmente

$$\log|f(z)| = \varphi(r,f) + \left(\frac{r}{R}\right)^m |\psi(R,f)| \cos(m\alpha - m\alpha(R,f)).$$

En segundo lugar supongamos que $q + \frac{1}{2} \leq \rho$;en este caso tendremos $m = q+1$. Aplicando las formulas (1,1,3) y (1,1,4) podremos escribir la (1,1,5) en otra forma, a saber:

$$\log|f(z)| \leq (h_q + o(1))\, r^q + \sum_{k=1}^{n_1} \log\left|E_q\left(\frac{z}{z_k}\right)\right| +$$
$$+ \sum_{k=n_1+1}^{\infty} \log\left|E_{q+1}\left(\frac{z}{z_k}\right)\right| + \mathcal{R}\left(-\frac{1}{q+1}\sum_{k=n_1+1}^{\infty} \frac{z^{q+1}}{z_k^{q+1}}\right);$$

por lo tanto, si ponemos

$$\psi(z,f) = -\frac{1}{m}\sum_{k=n_1+1}^{\infty} \frac{z^m}{z_k^m},$$

y recordando la (1,1,6), y que, en este caso, $m = q+1$, de nuevo tendremos

$$(1,1,\underline{7})\quad \begin{cases} \log|f(z)| \leq \\ \leq \varphi(r,f) + \left(\dfrac{r}{R}\right)^m |\psi(R,f)| \cos(m\alpha - m\alpha(R,f)) \end{cases}$$

en consecuencia, esta desigualdad se cumplirá en la totalidad de los casos. Para demostrar la primera parte del lema nos falta unicamente demostrar que, con las hipótesis admitidas, se cumple

$$\varphi(r,f)\leq \Omega^{m+1}(B+o(1))U(R)$$

cuando $R\to\infty$,

Segun Blumenthal [3, note II] y Denjoy [4] el factor primario de Weierstrass cumple

$$(1,1,8)\quad\begin{cases}\log|E_k(u)|\leq C_k|u|^k,\\ \log|E_k(u)|\leq C'_k|u|^{k+1},\end{cases}$$

donde C_k y C'_k son dos constantes que dependen únicamente del valor del entero k ; para una ~~extacción~~ acotación de estas constantes puede consultarse los trabajos de Blumenthal y Danjoy que acabamos de citar.

Evidentemente recordando la (1,1,6), y supóniendo R suficientemente grande, las (1,1,8) nos permiten afirmar

$$\varphi(r,f)\leq r^{m-1}\left(h_{m-1}+o(1)+C_{m-1}\int_1^R\frac{dn(r,1/f)}{r^{m-1}}\right)+C'_m r^{m+1}\int_R^\infty\frac{dn(r,1/f)}{r^{m+1}}$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned}\varphi(r,f)&\leq\\ &\leq r^{m-1}\left(h_{m-1}+o(1)+C_{m-1}\frac{n(R,1/f)}{R^{m-1}}+\right.\\ &\quad\left.+C_{m-1}\int_1^R(m-1)\frac{n(r,1/f)}{r^m}\,dr\right)+\\ &\quad+C'_m r^{m+1}\int_R^\infty(m+1)\frac{n(r,1/f)}{r^{m+1}}\,dr,\end{aligned}$$

Supongamos que , para $r\overset{R}{>}r_0$, se cumple

$$n(r,1/f)\leq AU(r)$$

resulta de la acotación de $\varphi(r,f)$ que hemos dado últimamente

$$\varphi(r,f)\leq r^{m-1}\left(h_{m-1}+o(1)+C_{m-1}\frac{AU(R)}{R^{m-1}}+\right.$$

$$\left.+C_{m-1}\int_{r_0}^{R}(m-1)\frac{AU(r)}{r^{m}}\,dr\right)+C_m r^{m+1}\int_{R}^{\infty}(m+1)\frac{AU(r)\,dr}{r^{m+2}}$$

Las propiedades de los órdenes precisados permiten inmediatamente demostrar que, para $R\to\infty$,

$$\int_{r_0}^{R}(m-1)\frac{AU(r)}{r^{m}}\,dr=(1+o(1))\frac{m-1}{\rho-m+1}A\frac{U(R)}{R^{m-1}}$$

y que

$$\int_{R}^{\infty}(m+1)\frac{AU(r)}{r^{m+2}}\,dr=(1+o(1))\frac{m+1}{\rho-m-1}A\frac{U(R)}{R^{m+1}},$$

de todo lo cual, y teniendo en cuenta que suponemos $r<\Omega R$ resulta

(1,1,9) $$\varphi(r,f)\leq(1+o(1))\Omega^{m+1}\frac{A}{C(\rho)}U(R),$$

donde $C(\rho)$ es una constante que depende únicamente de ρ, y que es una función continua de ρ , siempre positiva para $\frac{1}{2}<\rho<\infty$; esta constante es la que interviene en el enunciado del lema. La desigualdad (1,1,9) junto con la (1,1,7), suponiendo $A=BC(\rho)$, demuestra (1,1,1).

La demostración de (1,1,2) la dividiremos en dos partes correspondientes a las dos desigualdades de que se compone. Pongamos en (1,1,9) $r=R=R_n$ y $\Omega=1$ en este caso se convertirá en

$$\varphi(R_n,f)\leq(1+o(1))B\,U(R_n),$$

y, puesto que, según las hipótesis

$$\log M(R_n,f)>(1-o(1))b\,U(R_n),$$

de (1,1,1), se deduce

$$|\varphi(R_n,f)|>(1-o(1))(b-B)\,U(R_n),$$

lo cual demuestra la primera parte de (,1,1,2).

La seúnda parte se demuestra del siguiente modo: Según la fórmula de Jensen, y puesto que $f(z)$ suponemos que es una función entera, a partir de un valor de r se cumplirá

(1,1,10) $$\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\alpha})|\,d\alpha > H,$$

donde H es una constante finita. Sea α' el valor de α que verifica

$$\log M(R_n,f) = |\psi(R_n,f)|\cos m\alpha' + \varphi(R_n,f),$$

de (1,1,1), (1,1,10) y puesto que siempre

$$\log|f(re^{i\alpha})| \leq \log M(r,f),$$

resulta finalmente

(1,1,11) $$|\psi(R_n,f)|(m\alpha'\cos m\alpha' - \operatorname{sen} m\alpha') + 2\pi\,\varphi(R_n,f) > H,$$

De la sucesión $\{R_n\}$ extraeremos ahora una sucesión parcial $\{r_k\}$ tal que

$$\lim_{k=\infty} \frac{|\psi(r_k,f)|}{U(r_k)} = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{|\psi(R_n,f)|}{U(R_n)} = \psi_0,$$

$$\lim_{k=\infty} \frac{\varphi(r_k,f)}{U(r_k)} = \varphi_0:$$

para demostrar la segunda desigualdad de (1,1,2) basta demostrar que

$$\psi_0 \leq b\,\beta\left(\frac{B}{b}\right);$$

considerando la (1,1,11) únicamente para la sucesión $\{r_k\}$, dividiendola por

$$U(r_k)(b-\varphi_0)$$

y pasando luego al límite, tendremos

(1,1,12) $$\left\{ \begin{aligned} &\left[\left(1-\left(\frac{b-\varphi_0}{\psi_0}\right)^2\right)^{1/2} - \frac{b-\varphi_0}{\psi_0}\arccos\frac{b-\varphi_0}{\psi_0}\right]\frac{\psi_0}{b-\varphi_0} \leq \\ &\qquad\qquad \leq \frac{\pi\varphi_0}{b-\varphi_0} \end{aligned}\right.$$

puesto que el limite α_0 de α' en el caso que estamos considerando viene dado por

$$m\alpha_0 = \arccos\frac{b-\varphi_0}{\psi_0}$$

Representando por $\beta(x)$ la raiz real de

$$\left[(1-\beta^{-2})^{1/2}-\beta^{-1}\,\mathrm{arc}\cos\beta^{-1}\right]\beta=\frac{\pi x}{1-x},$$

tendremos, según la (1,1,12),

$$\psi_0\leq(b-\varphi_0)\beta\left(\frac{\varphi_0}{b}\right)\leq b\,\beta\left(\frac{\varphi_0}{b}\right),$$

y puesto que $\varphi_0\leq B$, tendremos finalmente

$$\psi_0\leq b\,\beta\left(\frac{B}{b}\right),$$

lo cual, según hemos dicho, completa la demostración de (1,1,2).

Ahora para terminar la demostración del lema 1 tendríamos que demostrar que la $\beta(x)$ tiende a 1 cuando $x\to 0$ pero esto se sigue casi inmediatamente de la definición de $\beta(x)$.

1,2.- Según hemos dicho el lema que acabamos de demostrar para las funciones enteras nos permitirá demostrar un resultado semejante para las funciones meromorfas, resultado que nos será útil para la demostración de uno de los teoremas objeto de este capítulo. El lema en cuestión puede enunciarse como sigue:

LEMA 2.- Sea $f(z)$ una función meromorfa de orden $\rho>1/2$ y de orden precisado equivalente o superior a $\rho(r)$. Si

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{n(r,1/f)}{U(r)}\leq B\,C(\rho),\qquad \overline{\lim_{r=\infty}}\frac{n(r,f)}{U(r)}\leq B'C(\rho),$$

entonces, cualesquiera que sean las cantidades positivas η y $\theta-1$ y para $\Omega^{-1}R\leq r\leq\Omega R$ y $z=re^{ix}$

$$(1,2,1)\quad\left\{\begin{aligned}&-\left(\left[B+B'+o(1)\right]\Omega^{m+1}+\left[2B+o(1)\right]\left(\frac{\Omega}{\theta}\right)^{\rho}C(\eta,\theta)\right)U(R)\\&<\log|f(z)|-\left(\frac{r}{R}\right)^{m}|\Psi(R,f)|\cos(mx-mx(R,f))<\\&<\left(\left[B+B'+o(1)\right]\Omega^{m+1}+\left[2B'+o(1)\right]\left(\frac{\Omega}{\theta}\right)^{\rho}C(\eta,\theta)\right)U(R)\end{aligned}\right.$$

excepto en un conjunto de pequeños círculos la suma de cuyos radios es inferior a $2\Omega\eta R/\theta$.

Además, si existe una sucesión $\{R_n\}$ ($\lim R_n=\infty$) tal que

$$\lim_{n=\infty}\frac{T(R_n,f)}{U(R_n)}=b>B+B'+2\min[B,B'],$$

existirá un número

$$b_0>b-2\min[B,B'],$$

tal que de la sucesión $\{R_n\}$ podrá extraerse una sucesión parcial $\{r_n\}$ para la cual

(1,2,2) $$b_0-B-B'-o(1)<\frac{|\psi(r_n,f)|}{U(r_n)}<b_0\beta\left(\frac{B+B'}{b_0}\right)+o(1).$$

Finalmente si $f(z)$ es entera se verifica

$$b_0=\lim_{n=\infty}\frac{\log M(r_n,f)}{U(r_n)}.$$

Nota.- la constante $c(\eta,\theta)$ es la que interviene en un lema de Bernstein [1, lema II].

DEMOSTRACIÓN.- Sea $h_1(z)$ el producto canónico formado con los polos de $f(z)$, aplicando el lema 1 a $h_1(z)$ resultará, para $\Omega^{-1}R\leq r\leq\Omega R$ y $z=re^{i\alpha}$

$$\log|h_1(z)|<\left(\frac{r}{R}\right)^m|\psi(R,h_1)|\cos(m\alpha-m\alpha(R,h_1))+$$

$$+(B'+o(1))\Omega^{m+1}U(R),$$

puesto que los ceros de $h_1(z)$ son los polos de $f(z)$ (*).

Poniendo

$$g_1(z)=h_1(z)h_1(ze^{i\pi/m}),$$

puesto que Ω es arbitraria, de lo que antecede se deduce, si suponemos $r=R$,

(1,2,3) $$\log|g_1(z)|<2(B'+o(1))U(R),$$

y toda vez que $g_1(z)$ es entera, esta misma desigualdad se cumplirá en la totalidad del círculo $|z|\leq R$.

Representando ahora por $h_2(z)$ el producto canónico formado con los ceros de $f(z)$, y poniendo

$$g_2(z) = h_2(z)\, h_2(z e^{-i\pi/m})$$

podremos demostrar del mismo modo que

(1,2,4) $\log|g_2(z)| < 2(B+o(1))\, U(R)$

en la totalidad de $|z| \leq R$.

De (1,2,3) se deduce aplicando el lema de Bernstein anteriormente citado [1, lema II] y teniendo en cuenta las propiedades de los órdenes precisados

(1,2,5) $\log|g_1(z)| > -2(B'+o(1))\left(\frac{\Omega}{\theta}\right)^{\rho} C(\eta,\theta)\, U(R),$

válida en el círculo $|z| \leq \Omega R$, excepto en un conjunto de pequeños círculos la suma de cuyos radios es inferior a $\Omega R \eta/\theta$.

Del mismo modo, de (1,2,4) se deduce la desigualdad

(1,2,6) $\log|g_2(z)| > -2(B+o(1))\left(\frac{\Omega}{\theta}\right)^{\rho} C(\eta,\theta)\, U(R),$

asimismo válida en $|z| \leq \Omega R$, excepto en un conjunto de pequeños círculos la suma de cuyos radios es inferior a $\Omega R \eta/\theta$.

Por otra parte, si definimos $f_1(z)$ y $f_2(z)$ por

$$f_1(z) = f(z)\, g_1(z), \qquad f_2(z) = \frac{g_2(z)}{f(z)},$$

resultará inmediatamente que $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son enteras, y cumplen

$$n(r, 1/f_1) = n(r, 1/f_2),$$

y según las hipótesis y la definición de $f_1(z)$ y de $f_2(z)$ resulta

(1,2,7) $\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r,1/f_1)}{U(r)} = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r,1/f_2)}{U(r)} \leq (B+B')\, C(\rho)$

y aplicando a $f_1(z)$ y a $f_2(z)$ el lema 1 obtendremos

1,2,8) $\log|f_1(z)| < \left(\frac{r}{R}\right)^{m} |\Psi(R,f_1)| \cos(m\alpha - m\alpha(R,f_1)) +$

$$+ (B+B'+o(1))\,\Omega^{m+1}\, U(R)$$

y

$$(1,2,9)\quad \log|f_2(z)| < \left(\frac{r}{R}\right)^m |\psi(R,f_2)| \cos(m\alpha - m\alpha(R,f_2)) + \\ + (B+B'+o(1))\,\Omega^{m+1}\, U(R),$$

para $\Omega^{-1}R \leq r \leq \Omega R$ y $z = re^{i\alpha}$. Además de la definición de $f_1(z)$ y de $f_2(z)$ se deduce

$$|\psi(R,f_1)| = |\psi(R,f_2)|,$$
$$\alpha(R,f_1) = \alpha(R,f_2) - \frac{\pi}{m},$$

y, por lo tanto, si escribimos

$$|\psi(R,f)| = |\psi(R,f_1)|, \qquad \alpha(R,f) = \alpha(R,f_1),$$

las (1,2,6) y (1,2,9), expresando $f(z)$ como el cociente de $g_2(z)$ y $f_2(z)$, nos darán la primera desigualdad de las (1,2,1). Del mismo modo, las (1,2,5) y (1,2,8), expresando $f(z)$ como el cociente de $f_1(z)$ y $g_1(z)$, nos darán la segunda desigualdad de las (1,2,1).

Para demostrar las desigualdades (1,2,2) procederemos del siguiente modo: La definición de $f_1(z)$ y de $f_2(z)$ nos permite afirmar que la función $T(z)$ que verifica

$$e^{T(z)} f_1(z) \equiv f_2(z e^{i\pi/m}),$$

es un polinomio de grado $m-1$ como máximo, y, puesto que $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son enteras, tendremos

$$(1,2,10)\qquad \lim_{r=\infty} \frac{\log M(r,f_1) - \log M(r,f_2)}{U(r)} = 0.$$

Además, según Nevanlinna,

$$T(r,f) \leq T(r,g_1) + T(r,f_1) + O(1) \leq$$
$$\leq \log M(r,g_1) + \log M(r,f_1) + O(1),$$

$$T(r,f)\leq T(r,g_2)+T(r,f_2)+O(1)\leq$$
$$\leq \log M(r,g_2)+\log M(r,f_2)+O(1);$$

por lo tanto, recordando (1,2,3), (1,2,4), (1,2,10) y las propiedades que según las hipótesis tiene $\{R_n\}$, puede afirmarse que

$$\lim_{n=\infty}\frac{\log M(R_n,f_2)}{U(R_n)}=\lim_{n=\infty}\frac{\log M(R_n,f_2)}{U(R_n)}>B+B',$$

y en consecuencia podrá extraerse de $\{R_n\}$ una sucesión parcial, que representaremos por $\{r_n\}$, de modo que

$$\lim_{n=\infty}\frac{\log M(r_n,f_2)}{U(r_n)}=b_0>B+B',$$

y recordando (1,2,7), la aplicación del [redacted] lema 1, y en particular de (1,1,2), nos permite escribir

$$b_0-B-B'-o(1)<\frac{|\psi(r_n,f_2)|}{U(r_n)}<b_0\,\beta\left(\frac{B+B'}{b_0}\right)+o(1)$$

y, puesto que según la definición que hemos dado,

$$|\psi(r_n,f)|=|\psi(r_n,f_1)|,$$

esto completa la demostración del lema 2.

Observación.- Si $f(z)$ es una función entera la segunda desigualdad de (1,2,1) se cumple sin excepción, es decir, los pequeños círculos excepcionales dejan de existir. De igual modo si la función $f(z)$ no tiene ceros será la primera desigualdad de (1,2,1) la que se cumplirá sin excepción.

1,3.-Ahora nos interesa demostrar un resultado que [redacted] es [redacted] una precisión de un resultado de Pólya [13, cap. III teorema IV]. El enunciado de esta precisión es como sigue:

LEMA 3.- Sea

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{l_k}$$

una función entera, y representemos por D la densidad máxima de la sucesión $\{l_k\}$; entonces, culaquiera que sea la función $\theta(r)$, para todo valor de r puede encontrarse un punto z_r que satisface a

$$\frac{r}{1+\eta(r)}<|z_r|<(1+\eta(r))r \quad |\arg z_r-\theta(r)|<\pi D+\eta(r),$$

$$\log|f(z_r)|>(1-\eta(r))\log M(r,f),$$

donde $\eta(r)$ es una cantidad que tiende a cero con $\frac{1}{r}$ y que es independiente de $\theta(r)$.

DEMOSTRACIÓN.- Sea n un entero positivo dado, y pongamos, para simplificar las fórmulas

$$\gamma=\frac{2\pi}{n}.$$

Empleando, como habitualmente, la notación $\bar{f}(z)$ para representar la función cuya serie de Taylor, alrededor del origen, tiene los coeficientes conjugados a los de la serie de Taylor, alrededor del origen, de $f(z)$; podremos construir las $2n$ funciones

$$\left.\begin{aligned} f_{m,1}(z)&=f(ze^{im\gamma})+\bar{f}(ze^{-im\gamma}) \\ f_{m,2}(z)&=i\left[f(ze^{im\gamma})-\bar{f}(ze^{-im\gamma})\right] \end{aligned}\right\}(m=0,\dots,n-1)$$

Evidentemente los coeficientes de los desarrollos en series de Taylor alrededor del origen, de estas funciones, son reales; por consiguiente, según los resultados de Pólya [13], se podrán formar $2n$ funciones $\Phi_{m,s}(x)\ (s=1,2;\ m=0,1,\dots,n-1)$ tales que

$$\log\left[\frac{1}{2\pi i}\int \Phi_{m,s}(x)\, f_{m,s}\left(\frac{(1+o(1))r}{x}\right)\frac{dx}{x}\right]>$$

$$>(1-o(1))\log M(r,f_{m,s}), \qquad (r\to\infty)$$

la integral siendo calculada a lo largo de la frontera, descrita en sentido negativo, del dominio definido por

$$\frac{1}{1+\gamma}<|x|<1+\gamma, \qquad |\arg x|<\pi D+\gamma.$$

Por otra parte, de la definición de las funciones $f_{m,1}(z)$ resulta que, para todo valor de r y para cualquier valor de m,

$$\max[\log M(r,f_{m,1}), \log M(r,f_{m,2})]>\log M(r,f).$$

De todo ~~xxxxx~~ cuanto precede resulta fácilmente que es posible hallar una r_n independiente de m tal que, para $r>r_n$, existe un punto función de r y m que representaremos por $z'_{n,m,r}$ que verifica

$$\frac{r}{1+2\gamma}<|z'_{n,m,r}|<(1+2\gamma)r, \quad |\arg z_{n,m,r}|<\pi D+\gamma,$$

y que al mismo tiempo cumple la desigualdad

$$\max[\log|f_{m,1}(z'_{n,m,r})|, \log|f_{m,2}(z'_{n,m,r})|]>(1-o(1))\log M(r,f).$$

Por lo tanto, se deduce facilmente la existencia de unos puntos $z_{n,m,r}$ función de r, que verifican

$$(1,3,1) \quad \frac{r}{1+2\gamma}<|z_{n,m,r}|<(1+2\gamma)r, \quad |\arg z_{n,m,r}-m\gamma|<\pi D+\gamma,$$

$$\log|f(z_{n,m,r})|>(1-\eta_m(r))\log M(r,f),$$

donde $\eta_n(r)$ es una función positiva que tiende a cero cuando r tiende al infinito, y, puesto que los valores que m puede tomar son en numero finito, podremos suponer que esta función es independiente de m.

Sea pues r'_n un valor tal que, para $r>r'_n$, se cumpla

$$\eta_n(r)<2\gamma,$$

y sea $R_n=\max[r_n, r'_n]$, entonces, cuando $r>R_n$, existirán unos pu puntos $z_{n,m,r}$ que verificaran las (1,3,1) y la

$$\log|f(z_{n,m,r})| > (1-2\gamma)\log M(r,f).$$

Estos razonamientos pueden repetirse para cualquier valor de n, hemos definido pues una sucesión $\{R_n\}$ que podemos suponer que verifica $R_n \leq R_{n+1}$ y

$$\lim_{n=\infty} R_n = \infty;$$

a partir de esta sucesión puede definirse una función $\eta(r)$ que tenga las propiedades siguientes:

a). $\lim_{r=\infty} \eta(r) = 0$

b). para $r \leq R_{n+1}$ satisface a $\eta(r) > \frac{4\pi}{n}$.

Una vez establecido lo que antecede, para cualquier valor de r, podremos elegir n igual al mayor valor que cumple $R_n < r$ y m de modo que sea el menor entero que satisface a

$$|m\gamma - \theta(r)| \leq \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{n},$$

con estas elecciones $z_{n,m,r}$ quedará completamente determinado por r; en consecuencia, podremos representarlo abreviadamente por z_r y verificará

$$\frac{r}{1+\eta(r)} < |z_r| < (1+\eta(r))r, \qquad |\arg z_r - \theta(r)| < \pi D + \eta(r),$$

$$\log|f(z_r)| > (1-\eta(r))\log M(r,f),$$

y como en la definición de $\eta(r)$ no ha intervenido la función $\theta(r)$, el lema queda demostrado.

1,4.- El lema 1 y el lema 3 nos permiten demostrar el teorema siguiente:

TEOREMA I.- Sea

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\lambda_k},$$

una función entera de orden ρ y de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$ y sea D la densidad máxima de la sucesión $\{\ell_k\}$. Si $mD<1$, entonces, cualesquiera que sean las funciones $f_0(z)\not\equiv 0$ y $f_1(z)$ enteras y de orden precisado inferior a $\rho(r)$, tendremos

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\ \frac{n(r,1/(f_0F-f_1))}{U(r)}\geq B_1C(\rho),$$

donde B_1 depende únicamente de mD

Observación.- La condición $mD<1$ no puede debilitarse, pues la función $\exp(z^m)$ verifica $mD=1$ y presenta el par excepcional $f_0(z)\equiv 1$, $f_1(z)\equiv 0$.

DEMOSTRACION.- Por mediación del resultado ya citado de [redacted] Bernstein [1, lema II] se puede demostrar fácilmente la existencia de una sucesión $\{R_n\}$ $(\lim_{n=\infty} R_n=\infty)$ tal que

$$\lim_{n=\infty}\frac{\log M(R_n,F)}{U(R_n)}=\lim_{n=\infty}\frac{\log M(R_n,H)}{U(R_n)}=1,$$

donde para simplificar hemos escrito $H(z)\equiv f_0(z)F(z)-f_1(z)$.

Sea B una cantidad que verifica

$$(1,4,1)\qquad \overline{\lim_{r=\infty}}\ \frac{n(r,1/H)}{U(r)}<BC(\rho),$$

sin perdida de generalidad podemos suponer que B puede elegirse de manera que verifique $B<1$, puesto que si ello no fuese posible el teorema resultaría cierto con solo suponer $B_1=1$. Aplicando pues el lema 1 a la función $H(z)$ y escribiendo como en el lema $z=re^{i\alpha}$ se deduce, en $\Omega^{-1}R_n\leq r\leq\Omega R_n$

$$\log|H(z)|\leq$$

$$(1,4,2)\qquad \leq\left(\frac{r}{R_n}\right)^m|\psi(R_n,H)|\cos(m\alpha-m\alpha(R_n,H))+$$

$$+(B\Omega^{m+1}+o(1))U(R_n).$$

Ahora bien una nueva aplicación del resultado de Bernstein permite demostrar que cualquiera que sea el punto $z_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$ es posible hallar un valor t_0 que verifica $\varepsilon < t_0 < 2\varepsilon$, donde ε es una cantidad positiva tan pequeña como se quiera pero fija, de modo que en los puntos

$$|z - z_0| = t_0 r_0$$

se verifica

(1,4,3) $$\log |f_0(z)| > -o(1)\, U(r_0)$$

cuando $|z_0| = r_0 \to \infty$

Dada la arbitrariedad de ε, de (1,4,2) y (1,4,3), y puesto que $F(z)$ es entera, se deducen las siguientes desigualdades

(1,4,4) $$\log |F(z)| \leq$$
$$\leq \overset{+}{\log} |H(z)| + \overset{+}{\log} |f_1(z)| + \log 2 - \log |f_0(z)| <$$
$$< \Big[\left(\frac{r}{R_m}\right)^m |\varphi(R_m, H)| \cos(m\alpha - m\alpha(R_m, H)) +$$
$$+ (B\Omega^{m+1} + o(1))\, U(R_m) \Big]^+ + o(1)\, U(R_m),$$

validas en la misma corona que (1,4,2), y donde

$$\overset{+}{\log} X = \frac{\log X + |\log X|}{2}$$

y del mismo modo

$$[A]^+ = \frac{A + |A|}{2}$$

Según el lema 3 en el dominio

$$\frac{R_m}{1+o(1)} < r < (1+o(1))\, R_m,$$

$$\left|\alpha - \alpha(R_m, H) - \frac{\pi}{m}\right| < \pi D + o(1);$$

existe un punto z_m tal que

(1,4,5) $$\log |F(z_m)| = (1 - o(1))\, U(R_m).$$

Si en la (1,4,4) se toma $\Omega = 1 + o(1)$, de (1,4,4) y (1,4,5) según las propiedades $\varphi(R, H)$ se deduce, dividiendo por $U(R_m)$ y pasando al límite,

(1,4,6) $$1 \equiv \beta(B)[\cos(\pi-\pi m D)]^{+}+B.$$

Si definimos B_1 por la igualdad

$$1=\beta(B_1)[\cos(\pi-\pi m D)]^{+}+B_1,$$

de (1,4,6) se deduce que cualquier B que verifique (1,4,1) verificara asimismo $B \geq B_1$; lo cual demuestra el teorema. En la última fase de la demostración hemos supuesto $mD > 0$, cuando $mD = 0$ el razonamiento es inmediato.

1,5.- El lema 2 nos permitirá demostrar para una clase de funciones meromorfas un teorema semejante al anterior, a saber:

TEOREMA II.- Sea

$$F(z)=\frac{F_1(z)}{F_2(z)}$$

una función meromorfa de orden ρ; si las funciones enteras $F_1(z)$ y $F_2(z)$ son de orden precisado equivalente a $\rho(r)$ (de tipo respectivamente t_1 y t_2), no se anulan simultaneamente y sus desarrollos de Taylor son de la forma

$$F_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} z^{\ell_k^{(1)}}, \qquad F_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} z^{\ell_k^{(2)}},$$

si además las densidades D_1 de la $\{\ell_k^{(1)}\}$ y D_2 de la $\{\ell_k^{(2)}\}$ satisfacen a

$$\frac{1}{\rho} > m \min[D_1, D_2],$$

entonces:

1º: $F(z)$ es de orden precisado equivalente a $\rho(r)$.

2º: cualquiera que sea la función $f(z)$ meromorfa y de orden precisado inferior a $\rho(r)$ (con sólo una posible excepción) se tiene

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r,1/(F-f))}{V(r)} \geq B_2 C(p),$$

donde B_2 es una cantidad positiva que depende unicamente de f_1, f_2, $m D_1$ y $m D_2$.

DEMOSTRACION.- Sin perdida de generalidad podemos suponer $m D_1 \leq \frac{1}{2}$, pues, caso de no cumplirse, bastará representar $F_2(z)$ por $F_1(z)$ y viceversa, para que se cumpla, lo cual unicamente intercambia el numerador y el denominador de la fracción que representa $F(z)$, sin ningún efecto posible sobre el resultado. Entonces la primera parte de la conclusión del teorema se demuestra de manera sumamente sencilla. En efecto, puesto que suponemos que $m D_1 \leq \frac{1}{2}$, el teorema I nos permite afirmar inmediatamente que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r,1/F_1)}{V(r)} \geq f_1 B_1 C(p),$$

y como $n(r,1/F_1) = n(r,1/F)$, resulta finalmente

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r,1/F)}{V(r)} \geq f_1 B_1 C(p) > 0,$$

y puesto que

$$T(r,F) > \int_{\frac{r}{2}}^{r} n(r,1/F) \frac{dr}{r} + O(1),$$

se deduce

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r,F)}{V(r)} > 0.$$

Además, como quiera que

$$T(r,F) \leq \log M(r,F_1) + \log M(r,F_2) + O(1),$$

resulta de las dos ultimas desigualdades que $F(z)$ es de orden precisado equivalente a $\rho(r)$; lo cual es la primera parte de la conclusión.

Para demostrar la segunda parte supondremos que existen dos funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$ meromorfas y de orden precisado inferior a $\rho(r)$ tales que

$$(1,5,1)\qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r,1/(F-f_i))}{U(r)} < BC(\rho) \qquad (i=1,2),$$

y demostraremos que en este caso B es superior a una cantidad positiva que depende unicamente de f_1, f_2, mD_1 y mD_2 ; que es la segunda parte de la conclusión.

En primer lugar resulta fácil demostrar que es posible hallar cuatro funciones enteras $h_{11}(z)$, $h_{12}(z)$, $h_{21}(z)$ y $h_{22}(z)$ de orden precisado inferior a $\rho(r)$, tales que

$$f_1(z) = \frac{-h_{12}(z)}{h_{11}(z)}, \qquad f_2(z) = \frac{-h_{22}(z)}{h_{21}(z)},$$

$$h_{11}(z)\,h_{22}(z) - h_{12}(z)\,h_{21}(z) \neq 0.$$

Para ello basta demostrar que toda función meromorfa $f(z)$ de orden precisado inferior a $\rho(r)$ puede escribirse como cociente de dos funciones enteras de orden precisado inferior a $\rho(r)$. Esto se demuestra como sigue: escribamos primero $f(z)$ como cociente de dos funciones enteras que no tengan ceros comunes, sea

$$f(z) = \frac{h_2(z)}{h_1(z)}$$

esta representación, y supongamos ~~par~~ que, por ejemplo, $h_2(z)$ es de orden precisado equivalente o superior a $\rho(r)$; como en el número 1,1, podemos escribir

$$\log|h_2(z)| = \varphi(r,h_2) + |\psi(r,h_2)|\cos(m\alpha - m\alpha(r,h_2)),$$

y puesto que

$$n(r,1/h_2) = n(r,1/f) = o(U(r)),$$

resulta que

$$\varphi(r,h_2)=o(U(r)),$$

y en consecuencia

$$\log|h_2(z)h_2(ze^{i\pi/m})|<2\varphi(r,h_2)=o(U(r)).$$

Escribiendo, pues, $f(z)$ en la forma

$$f(z)=\frac{h_2(z)h_2(ze^{i\pi/m})}{h_1(z)h_2(ze^{i\pi/m})},$$

y como el numerador y la fracción son de orden precisado inferior a $\rho(r)$ tambien lo será el denominador.

Pongamos ahora

$$(1,5,2)\begin{cases} h_{11}(z)F_1(z)+h_{12}(z)F_2(z)=H_1(z), \\ h_{21}(z)F_1(z)+h_{22}(z)F_2(z)=H_2(z), \end{cases}$$

como $F_1(z)$ y $F_2(z)$ no tienen ceros en común, es evidente que los conjuntos de los ceros de $H_1(z)$ y $F(z)-f_1(z)$ difieren solamente por la adicion a lo sumo de una sucesión formada por ceros de $h_{11}(z)$ e igualmente para los conjuntos de los ceros de $H_2(z)$ y $F(z)-f_2(z)$ que difieren a lo sumo por la adición de una sucesión de ceros de $h_{21}(z)$; y puesto que $h_{11}(z)$ y $h_{21}(z)$ son de orden precisado inferior a $\rho(r)$, queda demostrado

$$(1,5,3)\begin{cases} \overline{\lim_{r=\infty}}\dfrac{n(r,1/H_1)}{U(r)}<BC(p), \\ \overline{\lim_{r=\infty}}\dfrac{n(r,1/H_2)}{U(r)}<BC(p). \end{cases}$$

Ahora bien, combinando debidamente las (1,5,1) se obtienen fácilmente

$$(1,5,4)\begin{cases} [h_{11}(z)h_{22}(z)-h_{21}(z)h_{12}(z)]F_1(z)= \\ \qquad =h_{22}(z)H_1(z)-h_{12}(z)H_2(z), \end{cases}$$

y de estas igualdades, aplicando el resultado ya citado de Bernstein [1, lema II] es fácil deducir la existencia de una sucesión $\{R_n\}$ $(\lim_{n=\infty} R_n = \infty)$ tal que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M(R_n, F_1)}{U(R_n)} = b_1,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M(R_n, H_1)}{U(R_n)} = \tau_1 \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log M(R_n, H_2)}{U(R_n)} = \tau_2$$

donde pueden presentarse dos casos (suponemos sin perdida de generalidad, $\tau_1 \geq \tau_2$)

$$b_1 < \tau_1 = \tau_2;$$

$$b_1 = \tau_1 \geq \tau_2;$$

estudiaremos separadamente estos dos casos.

En el primer caso, si β es inferior a una cantidad positiva que depende únicamente de b_1 y de $m\,D_1$, podremos, en virtud de (1,5,3), aplicar el lema 2 a $H_1(z)$ y a $H_2(z)$, recordando la (1,5,4) se deduce, teniendo en cuenta nuevamente que las h son de orden precisado inferior a $\rho(r)$, que

$$(1,5,5) \qquad \overline{\lim_{n=\infty}} |\alpha(R_n, H_1) - \alpha(R_n, H_2)| \leq \frac{\pi}{4m} - \frac{\pi D_1}{2},$$

de lo cual se deduce que, si β es inferior a una cantidad positiva que depende únicamente de b_1 y de $m\,D_1$, será posible hallar una cantidad $\varepsilon > 0$ tal que, a partir de un valor n, en el dominio

$$\frac{R_n}{1+\varepsilon} < |z| < (1+\varepsilon) R_n,$$

$$\left| \arg z - \alpha(R_n, H_1) - \frac{\pi}{m} \right| < \pi D_1 + \varepsilon < \frac{\pi}{2m},$$

se verificará, en virtud de (1,5,3)

$$-\log|F_1(z)| < \frac{b_2}{2}U(R_n),$$

lo cual estara en contradicción con el lema 3; esto termina la demostración en el primer caso.

En el segundo caso, o sea cuando

$$b_1 = \tau_1 \geq \tau_2,$$

la demostración debe variarse, pues no es posible demostrar la desigualdad (1,5,5). En este caso la demostración se efectuará en la siguiente forma: Si $\tau_2 = \tau_1 = b_1$, de nuevo, cuando B es inferior a una cantidad que depende únicamente de b_1, podremos aplicar el lema 2 a $H_1(z)$ y a $H_2(z)$ y demostrar la existencia de una cantidad $\varepsilon > 0$ y de una sucesión $\{\alpha_n\}$ de modo que en el dominio

$$\frac{R_n}{1+\varepsilon} < |z| < (1+\varepsilon)R_n, \qquad |\arg z - \alpha_n| < \pi D_1 + \varepsilon < \frac{\pi}{2m},$$

se cumpla, a partir de un valor de n,

$$\log|F_1(z)| < \frac{b_1}{1+\varepsilon}U(R_n),$$

de nuevo en contradicción con el lema 3.

Finalmente, si $\tau_2 < b_1 = \tau$, cuando B es inferior a una cantidad que depende únicamente de b_1, será posible afirmar solamente que el lema 2 es aplicable a $H_1(z)$, pero por otra parte, es posible hallar $\varepsilon > 0$ de modo que

$$(1,5,6)\quad \overline{\lim_{n=\infty}} \max_{1 \leq x \leq 1+\varepsilon} \frac{\log M(xR_n, H_2)}{U(R_n)} < \frac{b_1}{1+\varepsilon},$$

pues de no ser cierta, para ningun valor de ε, esta última desigualdad, podriamos aplicar a $H_2(z)$ el lema 2, utilizando en lugar de la sucesión $\{R_n\}$ la $\{x_n R_n\}$, donde $1 \leq x_n \leq 1+\varepsilon$, y resultaria que para ε suficientemente pequeña tendriamos

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log M(R_n, H_2)}{U(R_n)} > \tau_2,$$

contrariamente a la definición de τ_2. Por lo tanto, de (1,5,4) y (1,5,6), aplicando a $H_1(z)$ el lema 2, lo cual es posible según hemos visto, resulta finalmente que si B es inferior a una cantidad positiva que depende únicamente de b_1, en el dominio

$$\frac{R_n}{1+\varepsilon} < |z| < (1+\varepsilon) R_n, \quad \left|\arg z - \alpha(R_n, H_1) - \frac{\pi}{m}\right| < \pi D_1 + \varepsilon,$$

se cumplirá asimismo en este caso, y a partir de un valor de n, la desigualdad

$$\log|F_1(z)| < \max\left[\tau_2, \frac{b_1}{1+\varepsilon}\right] U(R_n),$$

desigualdad que de nuevo esta en contradicción con el lema 3.

Como en todos los casos, si B es inferior a una cantidad positiva que depende únicamente de b_1 y de mD_1, hemos llegado a una contradicción con el lema3, hemos demostrado el teorema. Sin embargo creo debo señalar que la aparente contradicción entre el enunciado, donde B_2 depende ademas de b_1 y mD_1, de b_2 y mD_2, y el resultado final de la demostración en que la cantidad positiva que debe sobrepasar B depende únicamente de b_1 y de mD_1, es debida a que, para concretar, hemos supuesto que $mD_1 < 1/2$ mientras que en el enunciado solamente se supone que se cumple al menos una de las dos desigualdades

$$mD_1 < \frac{1}{2}, \qquad mD_2 < \frac{1}{2},$$

si en lugar de suponer que se cumple la primera hubiesemos supuesto que se cumple la segunda, la cota inferior de la B que verifica (1,5,1), o sea (1,5,3), dependeria únicamente de b_2 y de mD_2. Por lo tanto, el enunciado es correcto.

1,6.- El teorema I puede también modificarse en otra direc...

ción, pero para ello necesitamos introducir nuevas notaciones, Sea Λ el ángulo

$$|\arg z - \alpha_0| \leq \sigma,$$

entonces 2σ será llamada la amplitud del ángulo Λ , y

$$n(r, \Lambda, 1/f)$$

representará el número de ceros de $f(z)$ interiores a la intersección del ángulo Λ con el círculo $|z| \leq r$.

Con estas notaciones podemos ya enunciar el teorema que nos interesa

TEOREMA III.- Sea

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\ell_k}$$

una función entera de orden ρ y de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$ Dado un ángulo Λ de amplitud $2\sigma > \pi/\rho$, si la densidad máxima D de la sucesión $\{\ell_k\}$ verifica

$$D < \Delta,$$

donde Δ_1 es una determinada cantidad que depende únicamente de ρ y de σ, entonces, cualesquiera que sean las funciones $f_0(z) \neq 0$ y $f_1(z)$ enteras y de orden precisado equivalente a $\rho_1(r)$, donde $\rho_1(r)$ es un orden precisado tal que

$$\lim_{r=\infty} \frac{r^{\rho_1(r)}}{\log M(r; F)} = 0;$$

será satisfecha

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r, \Lambda, 1/(f_0 F - f_1))}{V(r)} > B_3,$$

donde B_3 es una cantidad positiva que depende únicamente de ρ

y σ.

DEMOSTRACION.- Igual que anteriormente, y para simplificar, pondremos

$$H(z) = f_0(z)F(z) - f_1(z),$$

y dadas las propiedades clásicas de los productos canónicos de Weierstrass que podemos limitar a los de orden no entero, puesto que actualmente suponemos que el ángulo Λ no incluye la totalidad del plano, si

$$(1,6,1) \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r,\Lambda,1/H)}{V(r)} < B,$$

podemos construir una función $g(z)$ holomorfa en Λ que tenga en este ángulo los mismos ceros que $H(z)$, y que verifique

$$(1,6,2) \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r,\Lambda,g)}{V(r)} < B,$$

donde $M(r,\Lambda,g)$ representa el máximo de $|g(z)|$ en la ~~circunfer rencia~~ intersección de Λ y $|z| \leq r$.

Por otra parte, el lema de Bernstein [1, lema II] aplicandolo a $f_0(z)$ nos permite establecer que dada una sucesión de puntos $\{z_n\}$ que tiende al infinito y que verifica

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log|F(z_n)|}{\log M(r_n,F)} = 1 \qquad (r_n = |z_n|),$$

existe otra sucesión $\{z'_n\}$ tal que

$$\lim_{n=\infty} \frac{z'_n}{z_n} = 1, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log|H(z'_n)|}{\log M(r'_n,F)} = 1 \qquad (r'_n = |z'_n|).$$

Por lo tanto, aplicando el lema 3 resulta que, en cualquier ángulo Λ' de amplitud superior a $2\pi D$, se verifica

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r,\Lambda', H)}{V(r)} = 1. \tag{1,6,3}$$

En consecuencia , si $\pi D < \sigma/2$ en el ángulo Λ_1 de igual bisectriz que Λ pero de amplitud igual a la mitad, se cumple, en virtud de (1,6,2) y (1,6,3),

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r,\Lambda_1, H/g)}{V(r)} \geq 1-B.$$

Ahora bien como hemos supuesto que $2\sigma > \pi/\rho$ por la teoria clásica de las funciones holomorfas y sin ceros en un ángulo cuya amplitud es superior a π/ρ , resultará que si Λ_2 es el ángulo de igual bisectriz que Λ y de amplitud

$$2\sigma_2 = \sigma + \frac{\pi}{2\rho},$$

se cumplirá

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r,\Lambda_2, g/H)}{V(r)} > C^*(1-B),$$

donde C^* depende únicamente de ρ y de σ . De esto se deduce la existencia de una sucesión de puntos $\{z_n''\}$ interiores a Λ_2 y que tienden al infinito, en los cuales

$$\log|H(z_n'')/g(z_n'')| < -\frac{1}{2} C^*(1-B)\,V(r_n'') \qquad (r_n'' = |z_n''|)$$

y puesto que $H(z)/g(z)$ no tiene ceros en Λ esta misma desigualdad se cumple en unas curvas que partiendo de los z_n'' terminan en un punto frontera de Λ . Por lo tanto, aplicando un resultado muy conocido de Milloux en su forma mas precisa (vease por ej. Nevanlinna [12, pag. 95-100]) resulta finalmente que en el interior de Λ existen una sucesión de circulos

(1,6,4) $$|z - z''_n| \le \theta r''_m,$$

donde θ depende únicamente de ρ, σ y B, en los cuales

$$\log |H(z)/g(z)| < -\frac{1}{4} C^*(1-B) U(r''_m),$$

además, es fácil demostrar que cuando $B < \frac{1}{2}$ puede elegirse θ completamente independiente de B ; por lo tanto, si B además de cumplirse la desigualdad últimamente indicada, cumple asimismo la

$$B < \frac{1}{4} C^*(1-B),$$

en los círculos (1,6,4) se verificará, dadas las propiedades de $g(z)$

(1,6,5) $$\log |H(z)| < 0,$$

aplicando nuevamente el lema 3 veremos que, si D es inferior a una cierta cantidad Δ_1 que depende únicamente de θ, o sea de ρ y de σ, en el interior de los círculos (1,6,4) existirán puntos en los cuales

$$\log |H(z)| > \frac{1}{2} \log M(r''_m, F),$$

lo cual esta en contradicción con (1,6,5). En consecuencia, si $D < \Delta_1$, la B que verifica (1,6,1) no puede ser inferior a una cantidad ~~que depende~~ positiva B_3 que depende únicamente de ρ y σ, pues de lo contrario se llega a un absurdo, Esto termina la demostración del teorema III

1,7.- La condición lagunar de la serie de Taylor que representa la función $F(z)$ puede expresarse, en lugar de hacerlo como hasta ahora mediante la densidad máxima, por medio de la densidad media superior. Representando, pues por $\overline{D}^*$ la densidad media superior de $\{\ell_k\}$ puede enunciarse el siguiente teorema, semejante la teorema I, pero que no lo contiene ni esta contenido en él

TEOREMA IV.- Sea

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\ell_k}$$

una función entera de orden ρ y de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$. Si $m\bar{D}^* < A_0$ (donde A_0 es una cierta cantidad que depende únicamente de ρ, y cumple $1 > A_0 > 1/2$ y $\lim_{\rho=\infty} A_0 = 1/2$), entonces, cualesquiera que sean las funciones $f_0(z) \neq 0$ y $f_1(z)$ enteras y de orden precisado inferior a $\rho(r)$, resulta

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{m(r, 1/(f_0 \cdot F - f_1))}{V(r)} \geq B_4 C(\rho),$$

donde B_4 depende únicamente de ρ y de $\bar{D}^*$

DEMOSTRACION.- Primeramente podremos repetir lo dicho en la demostración del teorema I hasta obtener la formula (1,4,4), luego la demostración debe continuarse del siguiente modo:

Según Mandelbrojt [11, teorema a, pag. 366] cualquiera que sea el punto z_1 en el interior del dominio definido por

$$|\log z - \log z_1| \leq \pi \bar{D}^* + \varepsilon,$$

donde ε es una cantidad positiva arbitraria, existe un punto z' en el cual se cumple

$$\log|F(z')| >$$

(1,7,1)

$$> \log|a_k| + \ell_k \log r_1 - \log \Lambda_k^* - \log[(\pi \bar{D}^* + \varepsilon) L(\pi \bar{D}^* + \varepsilon)],$$

donde $r_1 = |z_1|$ como generalmente venimos haciendo (*).

Ahora bien, a partir de un valor de k tambien según un resultado de Mandelbrojt [11, pag. 355] y apoyandonos en que, según Dvoretzky [5], $D^* \leq 2\bar{D}^*$, tendremos

$$(1,7,2)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{-\log \Lambda_k^* - \log[(\pi \bar{D}^* + \varepsilon) L(\pi \bar{D}^* + \varepsilon)]}{l_k} > \\ \qquad > -e\bar{D}^*(1 - 3\log(e\bar{D}^*)) - \varepsilon .\end{array}\right.$$

Además, si escribimos

$$\mu(r) = \max_{0 \leq k < \infty} (|a_k| r^{l_k}),$$

es evidente que, para r_1 suficientemente grande, de (1,7,1) y de (1,7,2) se sigue

$$\log|F(z')| > \log \mu(r_1 e^{h-\varepsilon}),$$

donde $h = -e\bar{D}^*(1-3\log(e\bar{D}^*))$.

Por otra parte Valiron [15, pag 32] demuestra que para las funciones enteras de orden finito se verifica

$$\log \mu(r) = (1 - o(1)) \log M(r, F)$$

y en consecuencia

$$(1,7,3) \qquad \log|F(z')| > (1 - o(1)) \log M(r_1 e^{h-\varepsilon}, F) \qquad (r_1 \to \infty).$$

Si en la fórmula (1,4,4) tomamos

$$\log \Omega \leq \pi \bar{D}^* - h + 2\varepsilon,$$

y en la (1,7,3)

$$z_1 = R_n \exp\left(-h + \varepsilon - i\left(\alpha(R_n, H) + \frac{\pi}{m}\right)\right),$$

de (1,4,4) yde (1,7,3), pasando al límite y ~~tomando~~ teniendo en cuenta que ε es arbitraria, se deduce que toda B que verifica (1,4,1) verificará también

$$1 \leq \beta(B) q + \Omega_0^{m+1} B,$$

donde

$$\log \Omega_0 = \pi \bar{D}^* - h,$$

y donde, si $m\bar{D}^* \geq 1/2$,

$$\log q = \max_{\pi m \bar{D}^* \geq m x \geq \frac{\pi}{2}} [\log \cos(mx+\pi) - mh + ((\pi m \bar{D}^*)^2 - m^2x^2)^{\frac{1}{2}}],$$

y si $m\bar{D}^* < 1/2$, entonces $q = 0$.

Si ahora definimos la cantidad A_0 que interviene en el enunciado del teorema IV, como el extremo superior de las cantidades $A \leq \rho$ que verifica

$$\max_{\pi A \geq x \geq \pi/2} [\log \cos(x+\pi) + eA\left(7 + 3\log\frac{m}{eA}\right) + (\pi^2A^2 - x^2)^{1/2}] \leq 0,$$

resulta inmediatamente $1 > A_0 > 1/2$ y $\lim_{\rho = \infty} A_0 = 1/2$. Además, puesto que por hipótesis $m\bar{D}^* < A_0$, resulta que en todos los casos $q < 1$, y, en consecuencia, si definimos B_4 por

$$1 = \beta(B_4)q + \Omega_0^{m+1} B_4,$$

se deduce que, si B cumple (1,4,1) debe cumplir asimismo $B \geq B_4$ y puesto que q y Ω_0 dependen únicamente de ρ y de $\bar{D}^*$, lo mismo sucederá con B_4, y, por lo tanto, el teorema queda completamente demostrado.

1,8.- En el teorema III puede asimismo substituirse D por $\bar{D}^*$ veriando únicamente el valor de Δ_1, pero despues de lo dicho en los números anteriores creo innecesario dar el enunciado y la demostración de este teorema.

Por el contrario damos a continuación sin demostración, puesto que el lector podra demostrarlo sin grande dificultades, los enunciados de un lema y dos teoremas que demuestran que en algunos resultados anteriores cuando la función es de crecimiento muy regular respecto al orden precisado $\rho(r)$, la expresión

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r,1/H)}{V(R)},$$

puede substituirse por

$$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r,1/H)}{V(R)},$$

es decir, en algunos resultados anteriores el hecho de que $F(z)$ sea de crecimiento muy regular se transmite a $n(r,1/(f_0F-f_1))$.

Los enunciados en cuestion son los siguientes:

LEMA 4.- Sea $f(z)$ una función entera de orden ρ y de orden precisado equivalente a $\rho(r)$. Si

$$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r,f)}{V(r)} = b > 0$$

y si

$$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r,1/f)}{V(r)} < B^{3\rho} C_1(\rho),$$

donde $C_1(\rho)$ es una constante semejante a $C(\rho)$. entonces, existe una sucesión $\{R_n\}$ $(\lim_{n=\infty} R_n=\infty)$ tal que, para $\Omega^{-1}R_n \leq r \leq \Omega R_n$,

$$\log|f(z)| < \left(\frac{r}{R_n}\right)^m |\psi(R_n,f)| \cos(m\alpha - m\alpha(R_n,f)) +$$
$$+ \left[\frac{\Omega^{m+1}B}{b} + o(1)\right] \log M(R_n,f),$$

con

$$(1-o(1))\left(1-\frac{B}{b}\right) < \frac{|\psi(R_n,f)|}{\log M(R_n,f)} < (1+o(1))\beta\left(\frac{B}{b}\right),$$

donde $\beta(x)$ es la misma función que interviene en el lema 1.

TEOREMA V.- Sea

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{l_k}$$

una función entera de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$ y tal que

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r,F)}{U(r)} = k > 0.$$

Si una al menos de las dos condiciones:

1ª $m D < 1$

2ª $m \bar{D}^* < A_0$ (A_0 es la misma que en el teorema IV)

se cumple; entonces, cualesquiera que sean las funciones $f_0(z) \neq 0$ y $f_1(z)$ enteras y de orden precisado inferior a $\rho(r)$, se verifican

$$\lim_{r=\infty} \frac{n(r, 1/(f_0 F - f_1))}{U(r)} \geq B_5^{\rho} C_1(\rho),$$

donde $B_5 = k \cdot B_1$,cuando es la primera condicion la que se cumple, y $B_5 = k B_4$, cuando es la segunda condición la que es satisfecha.

TEOREMA VI.- Sea

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\lambda_k}$$

una función entera de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$ y que verifica

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r,F)}{U(r)} = k > 0.$$

Dado un angulo Λ de amplitud $2\sigma > \pi/\rho$, si la densidad maxima D de $\{\lambda_k\}$ verifica

$$D < \Delta_2 ,$$

donde Δ_2 es una cierta cantidad que depende unicamente de ρ, de σ y de k. Entonces, cualesquiera que sean las funciones $f_0(z) \neq 0$ y $f_1(z)$ enteras y de orden precisado equivalente a $\rho_1(r)$, donde $\rho_1(r)$ verifica

$$\lim_{r=\infty} \frac{r^{\rho_1(r)}}{\log M(r,F)} = 0,$$

será satisfecha

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{n(r,\Lambda,1/(f_0F-f_1))}{U(r)} > B_6,$$

donde B_6 depende únicamente de ρ, de σ y de f.

Una vez demostrado el ~~xxxxx~~ lema 4, los teoremas V y VI se demuestran a partir de él como los resultados correspondientes se demostraban a partir del lema 1.

CAPITULO II

ORDEN INFINITO

2,1.- En primer lugar demostraremos un lema que nos es indispensable para la demostración de los resultados que nos interesan En todo este capítulo, según dijimos en la introducción emplearemo unos órdenes casi iguales a los de K.L.Hiong.

LEMA 5.- Sean $\rho(r)$ y $\rho_0(r)$ dos órdenes infinitos que verifican

$$\rho_0(r) \leq \delta\rho(r) \qquad (\delta < 1).$$

Si $f(z)$ es una función de orden infinito $\rho_0(r)$, para R_1 suficientemente grande, existirán siempre dos valores R_1' y R_1'' que satisfacen a

$$R_1 < R_1' < R_1 + \frac{R_1}{[W(R_1)]^{\delta}} \leq R_1'' < R_1 + \frac{R_1}{\log W(R_1)},$$

y tales que, para $R_1' = |z| < R_1''$, la función $f(z)$ es acotada inferiormente por la desigualdad

$$\log|f(z)| > -[W(R_1)]^{\delta'},$$

y esto culauiera que sea δ' con tal que sea mayor que δ.

DEMOSTRACION.- Supondremos que $f(z)$ no se anula en el origen, puesto que, si esta condición no se cumpliera y $f(z)$ tuviera en el origen un cero de orden m, se podria razonar sobre $f(z)/z^m$ y la desigualdad que el lema afirma, seria verificada a fortiori

Apliquemos ahora el lema de Bernstein [1, lema II], tomando

$$(2,1,1)\quad \begin{cases} R = R_1\left(1+\dfrac{1}{\log W(R_1)}\right)^2, \\ \theta = \left(1+\dfrac{1}{\log W(R_1)}\right)^{-1}, \quad \eta = \dfrac{1-\theta}{15}; \end{cases}$$

según las hipótesis sobre el valor en el origen y las propiedades de los órdenes tendremos, para R_1 suficientemente grandes y $|z| \leq R$

$$\log|f(0)| > -[W_0(R_1)]^{1+o(1)},$$

$$\log|f(z)| < [W_0(R_1)]^{1+o(1)};$$

por otra parte, según Hiong [8], el número de ceros de $f(z)$ en este mismo círculo es inferior a

$$[W_0(R_1)]^{1+o(1)},$$

por consiguiente el número de los pequeños círculos que intervienen en el lema de Bernstein es también inferior a este número, y como quiera que, en virtud de (2,1,1), la suma de los ~~pequ~~ diámetros de estos pequeños circulos es inferior a

$$\frac{1}{8}\frac{R_1}{\log W(R_1)}\left(1+\frac{1}{\log W(R_1)}\right),$$

se ve sin dificultad que, en la corona

$$R_1 < |z| < R_1 + \frac{R_1}{\log W(R_1)},$$

existe como mínimo una corona de amplitud igual o superior a

$$(2,1,2)\quad \frac{R_1}{[W_0(R_1)]^{1+o(1)}\log W(R_1)}\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{8\log W(R_1)}\right)$$

que no tiene ningún punto común con los pequeños círculos repetidamente mencionados. En razon de la expresión que nosotros hemos tomado para θ y η el valor de $C(\eta,\theta)$ será inferior a

$$[\log W(R_1)]^{2+o(1)},$$

y, por consiguiente, al exterior de los pequeños círculos tendremos

$$(2,1,3)\quad \log|f(z)| > -[\log W(R_1)]^{2+o(1)}\,[W_1(R_1)]^{1+o(1)}.$$

La expresión (2,1,2) y la desigualdad (2,1,3) demuestran el lema 5

2,2.- TEOREMA VII.- Sea

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\ell_k}$$

una función entera de orden infinito $\rho(r)$. Si la función de densidad $D(\ell)$ de $\{\ell_K\}$ verifica

$$\overline{\lim_{\ell=\infty}}\, D(\ell)\,\ell^{\beta} < \infty \qquad (0<\beta<1),$$

y si $\rho_0(r)$, $\rho_1(r)$ y $\rho_2(r)$, órdenes respectivos de $f_0(z)$, $f_1(z)$ y $f_2(z)$, son tales que

$$\rho_0(r) < \delta\,\rho(r) \qquad \left(\delta < \min\left(1, \frac{\beta}{1-\beta}\right)\right),$$

$$\rho_s(r) < \delta_s\,\rho(r) \qquad (\delta_s < 1,\ s=1,2),$$

es imposible (cualesquiera que sean las funciones enteras $f_0(z) \not\equiv 0$, $f_1(z)$ y $f_2(z)$, cuyos órdenes satisfacen a las condiciones anteriores) que la identidad

$$(2,2,1)\quad f_0(z)F(z) - f_1(z) \equiv f_2(z)\,e^{\varphi(z)}$$

sea satisfecha para ninguna función entera $\varphi(z)$.

DEMOSTRACION.- Según el resultado ya utilizado de Mandelbrojt [11, teorema a] en el dominio

$$|\log z - \log z_1| < \varepsilon,$$

cualquiera que sea z_1 , existe un punto z' en el cual

(2,2,2) $\log|f(z')| >$

$$> \log|a_k| + l_k \log r_1 - \log \Lambda_k^* - \log[\varepsilon L(\varepsilon)].$$

Escribiendo como anteriormente

$$\mu(r) = \max_{0 \leq k \leq \infty} (|a_k| r^{l_k}),$$

de (2,2,2) ~~de~~ deduce

(2,2,3) $\log|F(z')| > \log \mu(r_1) - \log \Lambda_k^* - \log[\varepsilon L(\varepsilon)],$

pero en esta el valor de K no es arbitrario como en la (2,2,2), en la (2,2,3) K es una función de r_1 que representaremos por $K(r_1)$. Además representaremos por $l(r)$ el valor de l_k cuando $K = K(r)$. Ahora bien, según Hiong, tendremos

(2,2,4) $$l(r) < [W(r)]^{1+o(1)},$$

y, por la teoria clásica de las funciones enteras, deduciremos, teniendo en cuenta las propiedades de los órdenes de Hiong, que

$$M(r, F) < \mu(r)[W(r)]^{1+o(1)},$$

en consecuencia, dada una sucesión $\{R_n\}$ tal que

$$\log M(R_n, F) > [W(R_n)]^{1-o(1)},$$

se cumplirá

$$\log \mu(R_n) > [W(R_n)]^{1-o(1)}.$$

Por otra parte, según Mandelbrojt [11, pag. 355] de (2,2,4) se deduce

(2,2,5) $$\log \Lambda^*_{K(r)} < [W(r)]^{(1-\beta)(1+o(1))}.$$

Asimismo, según Mandelbrojt [10, lema VI], de la condición

$$\overline{\lim_{l=\infty}}\, D(l)\, l^{\beta} < \infty ,$$

se sigue

(2,2,6) $$\log [tL(t)] \leq C t^{(\beta-1)/\beta},$$

donde C es una constante.

Ahora bien, apliquemos a $f_0(z)$ el lema 5 tomando R_n en lugar de R_1 ; según este lema podremos elegir un δ' tal que

$$\delta < \delta' < \min\left(1, \frac{\beta}{1-\beta}\right)$$

y que existan R'_n y R''_n de modo que

$$R_n < R'_n < R'_n + \frac{R_n}{[W(R_n)]^{\delta'}} \leq R''_n < R_n + \frac{R_n}{\log W(R_n)}$$

y que, para $R_n < |z| < R''_n$

(2,2,7) $$\log |f_0(z)| > -[W(R_n)]^{\delta'}.$$

Por lo tanto, si elegimos

$$r_1 = R'''_n = \frac{R'_n + R''_n}{2}, \qquad t = [W(R_n)]^{-\delta''} \quad \left(\delta' < \delta'' < \frac{\beta}{1-\beta}\right);$$

puesto que

$$\log \mu(r_1) > [W(R_n)]^{1-o(1)},$$

y el dominio en que se cumple (2,2,3) es interior, según la elección de t y de r_1 , al en que se verifica la (2,2,7); de (2,2,3), (2,2,5),(2,2,6) y (2,2,7) se sigue

(2,2,8) $\log|f_1(z')F(z')-f_1(z')|>[W(R_n)]^{1-o(1)}$;

si suponemos, pues, la existencia, en contra de lo que afirma el teorema, de una función entera $\varphi(z)$ que cumple (2,2,1), habremos demostrado que todo punto de la circunferencia $|z|=R'''_n$ se halla a una distancia inferior a

$$\pounds R'''_n[W(R_n)]^{-\delta''}$$

de un punto z' en que se verifica

$$\log|f_2(z')\cdot e^{\varphi(z')}|>[W(R_n)]^{1-o(1)},$$

o sea, puesto que el orden de $f_2(z)$ es inferior por hipótesis a $\rho(P)$,

(2,2,9) $$\mathcal{R}[\varphi(z')]>[W(R_n)]^{1-o(1)},$$

donde $\mathcal{R}[\varphi]$ representa la parte real de φ.

Por otra parte, sea cual sea R, el lema 5 nos permite afirmar la existencia de un R' tal que

$$R+\frac{2R}{\log W(R)}<R'<R+\frac{3R}{\log W(R)}$$

y tal que, para $|z|=R'$, se cumpla siempre

$$\log|f_2(z)|>-[W(R)]^{\delta_2} \qquad (\delta_1<\delta_2<1),$$

y, como quiera que, para cualquier valor de z ($|z|=r$), se verifica

$$\log|f_2(z)\,e^{\varphi(z)}|<[W(r)]^{1+o(1)},$$

para $|z|=R'$, tendremos

$$\mathcal{R}[\varphi(z)]<[W(R)]^{1+o(1)},$$

y una fórmula de Caratheodory (vease por ej. Landau [9, pag. 299] nos dara, para $|z| = R + \frac{R}{\log W(R)}$,

$$|\varphi(z)| < [W(R)]^{1+o(1)},$$

y una fórmula clásica nos dará asimismo, para $|z| = R$,

$$|\varphi'(z)| < [W(R)]^{1+o(1)}.$$

Finalmente, recordando que cualquier punto de la circunfernci $|z| = R'''_n$ se halla a una distancia inferior a

$$e R'''_n [W(R_n)]^{-\delta''}$$

de un punto z' donde se verifica la (2,2,9), resulta, en toda la circunferencia $|z| = R'''_n$,

$$\Re[\varphi(z)] > \Re[\varphi(z')] - |\varphi'(z_0)||z - z'| >$$

$$> [W(R_n)]^{1-o(1)} - e R'''_n [W(R_n)]^{(1+o(1))(1-\delta'')} = [W(R_n)]^{1-o(1)}$$

donde z_0 se halla comprendida en el segmento rectilineo que va de z' a z. Estas desigualdades demuestran

$$|e^{\varphi(z)}| > M_n$$

en todos los puntos de $|z| = R'''_n$, donde M_n tiende al infinito con n, lo cual es imposible puesto que $e^{\varphi(z)}$ es una funcion entera sin ceros.

2,3.- Ahora podriamos enunciar y demostrar un teorema cuya relación con el teorema VII seria la misma que existe entre el II y el I, pero ello nos impondria en primer lugar la definición de ~~la~~ una clase de órdenes que, además de las propiedades de los de Hiong, cumplieran otras ~~propiedades~~ condiciones apropiadas. A esta definición ya suficientemente laboriosa, seguiría una demostración que, sin ser dificil requiere un espacio que en conjunto haria esta memoria interminable. En consecuencia prefiero pasar directamente al enunciado y demostración de un teorema semejante al III, pero para las funciones de orden infinito.

TEOREMA VIII.- Sea

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\ell_k}$$

una función entera de orden infinito $\rho(r)$. Si la función de densidad $D(\ell)$ de $\{\ell_k\}$ verifica

$$\overline{\lim_{\ell \to \infty}}\, D(\ell)\,\ell^{\beta} < \infty \qquad (0<\beta<1),$$

entonces, cualquiera que sea el ángulo Λ y el valor finito a (sin excepción) resulta

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n(r,\Lambda,1/(F-a))}{\log W(r)} = 1,$$

donde $n(r,\Lambda,1/(F-a))$ tiene el significado que le hemos dado en el nº. 1,6.

DEMOSTRACIÓN.- Construyamos como indica Hiong [8] el producto canónico $g(z)$ con los ceros de $F(z)-a$ interiores a Λ. Si contrariamente a lo que afirma el teorema se cumpliera

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n(r,\Lambda,1/(F-a))}{\log W(r)} = B < 1,$$

resultaria

$$\log M(r,g) < [W(r)]^{B+o(1)}.$$

Ahora bien, razonando como en el nº. anterior al demostrar (2,2,8), resultará que, para cualquier ángulo Λ_1 interior a Λ, existe una sucesión $\{R_n\}$ tal que

$$\log M(R_n, \Lambda_1, F-a) > [W(R_n)]^{1-o(1)},$$

y, por lo tanto,

$$\log M(R_n, \Lambda_1, (F-a)/g) > [W(R_n)]^{1-o(1)}.$$

En consecuencia, la teoría de las funciones holomorfas y sin ceros en un ángulo nos permite afirmar que en todo ángulo Λ_2 que contenga Λ_1 y que este contenido en Λ existirá una sucesión de puntos $\{z_n\}$ en los cuales

$$\log|g(z_n)/(F(z_n)-a)| > [W(r_n)]^{1-o(1)},$$

donde $r_n = |z_n|$. Además esta misma desigualdad se cumplirá en una sucesión de curvas que partiendo de los z_n terminan en la frontera de Λ. Por otra parte, aplicando el lema de Bernstein [1,lema II] tantas veces utilizado, seria fácil demostrar que en todo Λ_3 interior a Λ

$$\log M(r, \Lambda_3, (F-a)/g) < [W(r)]^{1+o(1)};$$

y aplicando a estas dos últimas desigualdades el teorema de Milloux que hemos citado anteriormente, se demuestra fácilmente que, en los circulos

$$|z - z_n| \leq [W(r_n)]^{-\gamma}, \tag{2,3,1}$$

donde γ es una cantidad positiva arbitraria, se verifica

$$\log|g(z)/(F(z)-a)| > [W(r_n)]^{1-o(1)},$$

y como

$$\log|g(z)| < [W(r)]^{\beta+o(1)},$$

resulta que, en el mismo circulo (2,3,1)

(2,3,2) $\qquad \log|F(z)-a| < -[W(r_n)]^{1-o(1)}.$

Aplicando a $F(z) - a$ el resultado ya utilizado de Mandelbrojt [11, teorema a] resulta

$$(2,3,3) \quad \begin{cases} \log|F(z'')-a| > \\ > \log|a_k| + \ell_k \log r_n - \log \Lambda_k^* - \log[tL(t)], \end{cases}$$

donde z'' es un punto del círculo

$$|z - z_n| \leq t = [W(r_n)]^{-\delta} \qquad \left(\delta < \frac{\beta}{1-\beta}\right),$$

y si en (2,3,3) tomamos para k un valor fijo cualquiera con la sola condición que $|a_k| \neq 0$ se seguirá

(2,3,4) $\qquad \log|F(z'')-a| > -C[W(r_n)]^{\delta(1-\beta)/\beta},$

y si en (2,3,1) tomamos $\gamma < \delta$, lo cual es posible puesto que γ es arbitraria, las desigualdades (2,3,2) y (2,3,4) son incompatibles. Por lo tanto, si suponemos que el teorema no se cumple llegamos a un absurdo.

2,4.- Igual que para las funciones de orden finito para las de orden infinito, si se supone que $F(z)$ es de crecimiento regular del orden infinito $\rho(r)$, es decir, cuando se cumple

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log \log M(r,F)}{\log W(r)} = 1,$$

en la conclusión del teorema anterior puede substituirse $\overline{\lim}$ por $\lim$. Mas concretamente podemos enunciar el teorema siguiente:

TEOREMA IX.- Sea

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\ell_k}$$

BIBLIOGRAFIA

1.- Bernstein (V) - Sulle direzioni di Borel di funzioni olomorfe. (Annali di Mat. 4ª serie t. 12, 1934)

2.- Biernacki (M) - Sur les equations algebriques contenant des parametres arbitraires. (These. Paris 1928)

3.- Blumenthal (O) - Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini (Paris 1910)

4.- Denjoy (A) - Sur le produit canonique d'ordre infini (Jour. de Math. 6ª serie t. 6, 1910)

5.- Dvoretzky (A) - Sur les suites d'exposants à densité supérieure finie (C.R.Acad. Sci. Paris t.225, pag.481-483 1947)

6.- Féjer (L) - Uber die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung, (Mat. Annalen t.65 pag. 413-423, 1908)

7.- Hadamard (J) - Sur les fonctions entières (C.R. Acad. Sci. Paris t. 136, pag. 1.309- 1.311, 1902)

8.- Hiong (K.L.) - Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini (Journ. de Math. 9ª serie t.14, pag. 233-308, 1935)

9.- Landau - Handbunch der Leher von der Verteilung der Primzahlen (Leipzig 1909)

10.- Mandelbrojt (S) - Quasi-analyticity and analitic continuation - a general principle,(Trans. of the Am. Math. Soc. vol.55 pag. 96-131,1944)

11.- Mandelbrojt (S) - Sur une inégalité fondamentale (Ann. Sci. de l'Ec. Norm. Sup. 3ª serie t. 63 pag. 351-378, 1947)

12.- Nevanlinna (R) - Eindeutige analytische Funktionen (Berlin 1936)

13.- Polya (G) - Untersuchungen uber Lucken und Singularitate von Potenzreihen (Math. Zeitschrift t.XXIX pag. 549,1929

14.- Valiron (G) - Directions de Borel des fonctions méromorphes (Mem. Sci. Math. fas. 89, 1938)

15.- Valiron (G) - Lectures of the general theory of integral functions (2ª édition New York, 1949)

16.- Wiman (A) - Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières (Arkiv. for Mat. t.I ,pag.327, 1904)

17.- Sunyer Balaguer (F) - Aproximación de funciones por sumas de exponenciales (Collectanea Math. vol. V, 1952)

NOTAS QUE DEBEN FIGURAR AL PIE DE PAGINA

(1).- Los números entre parentesis angulares remiten a la bibliografia del final del trabajo.

---

(2).-Esta memoria no me ha sido posible consultarla, solamente conozco de ella lo que Pólya indica en la suya.

---

(3).- Usamos $\{l_k\}$, en lugar de $\{\lambda_n\}$, para subrayar que se trata de una sucesión de números enteros, puesto que en la teoria de las series de Dirichlet la $\{\lambda_n\}$ habitualmente representa una sucesión de números positivos cualesquiera.

---

(4).- El lema es asimismo cierto cuando $0 < \rho < 1/2$, pero, en este caso la transformación correspondiente no puede efectuarse, según ~~debera~~ se verá en la demostración, y entonces la constante $C(\rho) \rightarrow \infty$ cuando $\rho \rightarrow 0$, y por lo tanto, el lema pierde importancia en las aplicaciones.

---

(5).- Evidentemente, cuando $\rho = q + 1/2$ lo mismo puede elegirse $m = q$, que $m = q + 1$, pero para fijar el valor de m hemos hecho la segunda elección.

---

(6).- A pesar de que $h_1(z)$ puede ser de orden precisado inferior a $\rho(r)$, e incluso de órden inferior a ρ, la demostración puede, incluso en este caso, efectuarse de modo que los resultados continuen validos. Lo mismo podra decirse para $h_2(z)$, que pronto definiremos.

().- Ahora y hasta el final de este capítulo, m representará, como en los lemas 1 y 2, el entero mas próximo a ρ (cuando existan dos enteros igualmente próximos a ρ, entonces m representará, como anteriormente, el mayor de ellos). En realidad los teoremas I, II, IV y V tienen su maximo interes cuando ρ es entero, pues en caso contrario los reoremas clásicos, sin condición lagunar, ya dan una cota inferior positiva para

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r, 1/(f_0 F - f_1))}{T(r)}$$

no obstante, en muchos casos (en particular cuando ρ es próximo a un entero) los teoremas I, II, IV y V mediante la introducción de una condición lagunar dan una acotación mejor que los teoremas clásicos.

().- La Λ_k^* y la $L(t)$ se definen a partir de $\{l_k\}$ casi del mismo modo que Mandelbrojt las define a partir de $\{\lambda_n\}$, no obstante, la existencia de $l_0 = 0$ introduce pequeñas variaciones en las definiciones mencionadas, para estas variaciones puede consultarse mi memoria [17].
