(Resumen)

SOBRE UNOS CASOS EN QUE LA DESIGUALDAD FUNDAMENTAL DE MANDELBROJT SE PUEDE PRECISAR

por F. Sunyer Balaguer

Cuando la sucesión $\{\lambda_n\}$ de los exponentes es tal que $\sum(1/\lambda_n)<\infty$ en lugar de la desigualdad fundamental de Mandelbrojt (Séries adhérentes. Régularisation des suites. Aplications, chap.III) se puede escribir

$$(1)\qquad |d_k|\leq \pi R Q_k(\pi R)q_k^* M(s_0, R)e^{\lambda_k\sigma_0}$$

donde

$$q_k^*=\prod_{n\neq k}\frac{\lambda_n}{|\lambda_k-\lambda_n|}\qquad\qquad Q_k(R)=\int_0^\infty e^{-Rt}q_k(t)dt$$

con $q_k(t)=\prod_{n\neq k}(1+t/\lambda_n)$, las otras notaciones siendo las mismas que en el libro de Mandelbrojt.

Las desigualdades a que satisfacen los polinomios ~~xxxxx~~ en la conclusión β de algunos de mis teoremas (Collectanea Math. t. 5, teoremas I y V) tambien pueden modificarse en la misma forma que la desigualdad de Mandelbrojt.

Si la sucesión $\{\lambda_n\}$ satisface a una condición cuyo enunciado detallado daremos en el trabajo, y que produce una convergencia rapida y regular de $\sum(1/\lambda_n$, se demuestra que

$$\lim_{R=0}\frac{L_k(\pi R)}{Q_k(\pi R)}=\infty\qquad\qquad (R>0)$$

donde el significado de $L_k(\pi R)$ es el mismo que en el libro de Mandelbrojt. Por lo tanto, cuando R es suficientemente pequeña, la desigualdad (1) es más precisa que la de Mandelbrojt e igualmente para las desigualdades de mis teoremas.

SOBRE UNOS CASOS EN QUE LA DESIGUALDAD
FUNDAMENTAL DE MANDELBROJT SE PUEDE
PRECISAR

por F. Sunyer Balaguer

Mandelbrojt |1| (1) al tratar de la aproximación de funciones medi-ante sumas parciales de una serie de Dirichlet, supone que la sucesi-ón $\{\lambda_n\}$ de los exponentes es de densidad superior finita. Cuando en lugar de esta hipotesis, se admite la hipotesis más restrictiva de que la serie ~~dx~~ $\sum(1/\lambda_n)$ converge rapida y <u>regularmente</u> (condición I del nº 6) las conclusiones y las otras hipotesis de Mandelbrojt pue-den precisarse de forma muy interesante. Esto es lo que nos propone-mos demostrar en esta Memoria.

Al mismo tiempo estudiaremos la precisión que bajo la misma hipo-tesis puede lograrse en unos resultados que obtuve hace años |2|.

1.- A pesar de que son sumamente conocidas, para mayor comodidad del lector, daremos en primer lugar algunas definiciones debidas a Mandelbrojt.

Sea pues $\{\lambda_n\}$ una sucesión tal que

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\ldots, \qquad \lim_{n=\infty}\lambda_n=\infty$$

entonces la función de distribución $N(\lambda)$ de esta sucesión es el val máximo de los n tales que $\lambda_n<\lambda$. A partir de esta función se defi nen:

$$D(\lambda) = N(\lambda)/\lambda$$

llamada función de densidad de $\{\lambda_n\}$,

---

(1) Los números entre parentesis angulares remiten a la lista biblio grafica del final.

$$D^{*}=\overline{\lim}\, D(\lambda)$$

que se llama densidad superior y la función de densidad superior

$$D^{*}(\lambda) = \overline{\underset{x \geq \lambda}{\text{extremo}}}\ D\ (x)$$

Asimismo se definen como sigue las:

$$\overline{D}(\lambda) = \lambda^{-1}\int_{0}^{\lambda} D(x)dx$$

que se llama función de densidad media,

$$\overline{D}^{*}= \lim \overline{D}(\lambda)$$

llamada densidad media superior, y la función

$$\overline{D}^{*}(\lambda) = \overline{\underset{x \geq \lambda}{\text{extremo}}}\ D(x)$$

que llamaremos función de densidad media superior de $\{\lambda_n\}$.

A continuación definiremos dos notaciones,asimismo de Mandelbrojt que si bien no necesitamos para la obtención de nuestro teorema,nos serán utiles para comparar nuestros resultados con los del repetido Prof. Mandelbrojt. Las notaciones que nos interesan son las siguientes:

$$\Lambda_K(z)=\prod_{n\neq K}\left(1+\frac{z^2}{\lambda^2}\right)$$

$$L_K(R)=\int_0^{\infty} e^{-Rr}\Lambda_K(r)\,dr$$

$$\Lambda_K^{*}=\frac{1}{\Lambda_K(i\lambda_K)}$$

2.- Por otra parte como en la totalidad de este trabajo supondremos que la sucesión $\{\lambda_n\}$ verifica la condición $\sum(1/\lambda_n)<\infty$ podemos definir las siguientes funciones y sucesiones

$$q_k(z) = \prod_{n\neq k} (1+z/\lambda_n) = \sum b_n^{(k)} z^n$$

$$Q_k(R) = \int_0^\infty e^{-Rt} q_k(t)dt \qquad (R>0)$$

$$q_k^* = \prod_{n\neq k} \frac{\lambda_n}{|\lambda_k - \lambda_n|}$$

Los resultados conocidos de la teoria de las funciones enteras permiten demostrar facilmente que de la convergencia de la serie $\sum (1/$ se sigue la convergencia de la integral que define $Q_k(R)$ para cualquier valor positivo de R. No insistiremos, pues, sobre ello.

3.- Bara poder comparar mejor nuestro teorema con el resultado de Mandelbrojt supondremos que la función considerada puede representarse con una determinación logaritmica por medio de las sumas parciales de una misma serie de Dirichlet, es decir, supondremos lo siguiente: Sea Δ un dominio del plano $s = \sigma + it$ cuya intersección con el semiplano $\sigma > \sigma_0$ no es nula para ningún valor finito dado de σ_0. Sea F(una función holomorfa y uniforme en Δ. Sea $\{d_n\}$ una sucesión de números complejos, y k un entero positivo. Supongamos que para x suficientemente grande se verifique en Δ

$$\underline{\text{externo}}_{m\geq k}\ \overline{\text{extremo}}_{\sigma\geq x} \left|F(s) - \sum_1^m d_n e^{-\lambda_n s}\right| \leq e^{-p_k(x)}$$

donde $p_k(x)$ es una función no decreciente que tiende a $+\infty$ (esta función puede ser igual a $+\infty$ para x suficientemente grande). Entonces diremos que las sumas

$$\sum_1^m d_n e^{-\lambda_n s}$$

con $m \geq k$, representan F(s) en Δ con una precisión logaritmica p_k (

Finalmente, antes de enunciar el teorema debemos dar la siguiente definición:

Hipotesis $A_c^{(k)}(g(\sigma), p(\sigma), \{\lambda_n\}$ ~~xxxxx~~.- Sea lim $g(\sigma) = g$, si exi te una función continua no creciente $h(\sigma)$, con lim $h(\sigma) = h$, tal q

$$0 \leq h < g, \qquad \log Q_k(\pi h(\sigma)) < p(\sigma) + M \quad (M < \infty, \sigma > \sigma_0)$$

$$\int^{\infty} |p(\sigma) - \log Q_k(\pi h(\sigma))| \exp\left(-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{dx}{g(x) - h(x)}\right) d\sigma = \infty$$

diremos que las funciones $g(\sigma)$, $p(\sigma)$ y la sucesión $\{\lambda_n\}$ satisface a la hipotesis $A_c^{(k)}(g(\sigma), p(\sigma), \{\lambda_n\}$).

4.- Ahora ya podremos enunciar el teorema siguiente:

TEOREMA.- 1º $\{\lambda_n\}$ es una sucesión tal que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ y $\sum (1/\lambda_n) < \infty$; Δ es un dominio del plano $s = \sigma + it$ definido por $\sigma > a$, $|t| < \pi g(\sigma)$, donde $g(\sigma)$ es una función continua, a variación acotada y tal que $g(\sigma) > 0$, lim $g(\sigma) > 0$.

2º $F(s)$ es una función holomorfa en Δ y se puede prolongar anal ticamente a lo largo de un canal de anchura $\delta > 0$ cualquiera desde hasta el círculo $C(s_0, \pi R)$ (donde $C(s_0, r)$ representa el círculo $|s -$ $\leq r$).

3º La sucesión $\{d_n\}$ y el entero positivo k son tales que las sum $\sum_1^m d_n e^{-\lambda_n s}$ con $m \geq k$, representan $F(s)$ en Δ con una precisión logari mica $p_k(\sigma)$.

Si $g(\sigma)$, $p_k(\sigma)$ y la sucesión $\{\lambda_n\}$ satisfacen a la hipotesis $A_c^{(k)}(g(\sigma), p_k(\sigma), \{\lambda_n\})$ resulta

Conclusión α .-

$$|d_K| \leq \pi R Q_K(\pi R) q_K' M(s_0, R) e^{\lambda_K \sigma_0}$$

donde $M(s_0,R) = \max |F(s)| (s \in C(s_0, \pi R))$.

Conclusión β .- Existe una sucesión de polinomios

$$\left\{ \psi_m(s) = \sum_1^m a_n^{(m)} e^{-\lambda_n s} \right\}$$

que converge uniformemente hacia $F(s)$ en todo dominio cerrado interi al dominio de holomorfía de $F(s)$ y estos polinomios verifican

$$|\psi_m(s_0)| \leq \pi R Q_K(\pi R) M(s_0, R)$$

y $a_K^{(m)} = \theta_K^{(m)} d_K$ con $\lim_{m=\infty} \theta_K^{(m)} = 1$.

Demostración.- La demostración de la conclusión α es casi igual la demostración de la desigualdad fundamental de Mandelbrojt [1, teo rema 3.7.I], pero utilizando en lugar del lema 3.3.VII de Mandelbro el lema siguiente:

Lema 1.- Sea $\phi(s)$ una función holomorfa en el circulo $C(s', \pi R)$ que en este mismo circulo verifica la desigualdad $|\phi(s)| < M$. Si $\sum (1/\lambda_n) < \infty$, la serie

$$\sum b_n^{(K)} \phi^{(m)}(s)$$

converge uniformemente en todo circulo $C(s', \pi r)$, con $0 \leq r < R$, y en el representa una función holomorfa $\phi_K(s)$ que satisface a la desigu aldad

$$|\phi_K(s')| < \pi R Q_K(\pi R) M.$$

Demostración.- A pesar que la demostración de este lema es casi igual a la del lema 3.3.VII de Mandelbrojt la daremos porque es sumamente corta. Mediante las desigualdades de Cauchy

$$|\phi^{(n)}(s)| \leq M \frac{n!}{(\pi R - \pi r)^n}$$

resulta

$$|\phi_k(s)| \leq \sum b_n^{(K)} |\phi^{(n)}(s)| \leq \sum M b_n^{(K)} \frac{n!}{(\pi R - \pi r)^n} =$$

$$= M(\pi R - \pi r) \int_0^\infty e^{-t(\pi R - \pi r)} q_k(t)dt =$$

$$= M(\pi R - \pi r) Q_k(\pi R - \pi r)$$

de donde resulta, cuando r tiende a cero,

$$|\phi_k(s')| \leq \pi R Q(\pi R) M.$$

con lo cual termina la demostración del lema.

La conclusión β se demuestra por un metodo muy semejante al que utiliza para demostrar [redacted] la conclusión β del teorema I d mi Memoria [2]. Con todo y esta semejanza daremos sus lineas generales, pues las diferencias entre las dos demostraciones requieren alguna atención.

En primer lugar si definimos las $b_{m,n}^{(K)}$ mediante la igualdad

$$\prod_{\substack{n \neq K \\ n > m}} (1+z/\lambda_n) = \sum b_{m,n}^{(K)} z^n$$

se sigue

(1) $$b_{m,0}^{(K)} = b_0^{(K)} = 1, \qquad b_{m,n}^{(K)} \leq b_n^{(K)} \qquad (n \geq 1)$$

(2) $$\lim_{m=\infty} b_{m,n}^{(K)} = 0.$$

Por otra parte definimos los coeficientes $\beta_{m,n}^{(K)}$ por la igualdad

$$\prod_{\substack{n \neq K \\ n \leq m}} (1+z/\lambda_n) = \sum_0^m \beta_{m,n}^{(K)} z^n$$

tendremos

$$\left[\sum_{0}^{m} \beta_{m,n}^{(K)} z^n\right]\left[\sum_{0}^{\infty} b_{m,n}^{(K)} z^n\right] = \sum_{0}^{\infty} b_n^{(K)} z^n \tag{3}$$

Dado un número positivo ρ suficientemente pequeño será posible definir un dominio Δ_1 que se aleje hasta el infinito, que sea comp tamente interior a Δ y que la distancia de sus puntos a la fronte de Δ sea superior a ρ.

Sea S un dominio cerrado completamente interior al dominio H de holomorfia de F(s); evidentemente podremos unir S a Δ_1 mediante un canal completamente interior al dominio H. Entonces si llamamos S_0 a la unión de S, del canal y de Δ_1, resulta que será posible hall un $R < \rho$ tal que si $s_1 \in S_0$, la función F(s) será holomorfa en $C(s_1$ y además es facil deducir, puesto que F(s) esta representada e con una cierta aproximación logaritmica, que esta función F(s) ser holomorfa y acotada en

$$E = \bigcup_{s \in S_0} C(s, \pi R)$$

y por lo tanto, podemos definir la cantidad

$$M(E) = \overline{\text{extremo}}_{s \in E} |F(s)|.$$

Ahora bien, si escribimos

$$\psi_m(s) = \sum_{0}^{\infty} b_{m,n}^{(K)} F^{(n)}(s)$$

según el teorema de Cauchy, para $s \in S_0$, teniendo en cuenta las des gualdades (1) resultara

$$b_{m,n}^{(K)} |F^{(n)}(s)| \leq b_n^{(K)} \frac{n!}{(\pi R)^n} M(E) \tag{4}$$

y en consecuencia, recordando las definiciones dadas en el nº 2, par $s \in S_0$ tendremos

$$(5) \qquad |\psi_m(s)| \leq M(E)\pi R \int_0^\infty e^{-\pi R r}\left(\sum_0^\infty b_n^{(K)} r^n\right) dr = \pi R Q_K(\pi R) M(E).$$

La (4) demuestra que la serie que define $\psi_m(s)$ es uniformemente convergente en s y en m, para $s \in S_0$ y m entero positivo. De esto se deduce que $\psi_m(s)$ son holomorfas en la totalidad del dominio de holo morfia de F(s), puesto que el dominio cerrado S puede ser un dominio cerrado cualquiera con la sola condición de ser interior al dominio de holomorfia de F(s).

Por otra parte, recordando la (2) resulta

$$\lim_{m=\infty} \psi_m(s) = F(s)$$

la convergencia siendo uniformes para $s \in S_0$ (*).

De la identidad (3) se sigue inmediatamente

$$\sum_0^m \beta_{m,n}^{(K)} \psi_m^{(n)}(s) = \sum_0^\infty b_n^{(K)} F^{(n)}(s) = F_K(s).$$

Además si hubiesemos desarrollado la demostración de la conclusión (hubieramos visto que se cumple la igualdad

$$F_K(s) = \frac{d_K}{q_K^*} e^{-\lambda_K s}$$

por lo tanto, según la teoria de las equaciones diferenciales, resul tara finalmente

---

(*) Según se nota facilmente esto demuestra algo más que lo que afir ma el teorema, puesto que S_0 es la unión de un dominio cerrado con ot que se aleja hasta el infinito.

$$\psi_m(s) = \sum_{\substack{1 \\ n \in K}}^{m} a_n^{(m)} e^{-\lambda_n s} + \theta_k^{(m)} d_k e^{-\lambda_k s}$$

donde

$$\theta_k^{(m)} = q_k^* \sum_{1}^{m} (-1)^n \beta_{m,n}^{(k)} \lambda_k^n$$

De la definición de q_K^* y de la definición de las $\beta_{m,n}^{(K)}$ resulta facilmen-
te

$$\lim_{m=\infty} \theta_k^{(m)} = 1$$

lo cual termina la demostración de la conclusión β, puesto que la acotación dada en la conclusión para los $\psi_m(s)$ resulta de (5) cuando en lugar de E se toma simplemente $C(s_0, \pi R)$.

5.- De este teorema, puesto que las $\psi_m(s)$ son funciones enteras, resulta inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario.- <u>Con las hipotesis del teorema resulta que elmdominio de holomorfia de</u> F(s) <u>es simplemente conexo</u>.

Este mismo resultado vale si a las hipotesis del teorema I de mi Memoria citada [2] se añade la condición $\bar{D}^* = 0$.

6.- La diferencia principal entre las hipotesis del teorema de este trabajo y las admitidas por Mandelbrojt, es que nosotros suponemos que la serie $\sum(1/\lambda_n)$ es convergente, mientras que, según hemos dicho en la introducción, Mandelbrojt supone unicamente que la sucesión $\{\lambda_n\}$ es de densidad superior finita. A continuación demostraremos que cuando la convergencia de la serie $\sum(1/\lambda_n)$ es rapida y <u>regular</u>, o mejor dicho, cuando $N(\lambda)$ (función de distribución de la sucesión $\{\lambda_n\}$) crece lenta y regularmente, las restantes hipotesis y las conclusiones son más precisas que las correspondientes de Mandelbrojt [1, teorema 3.7.I] y del teorema I de mi

Memoria citada anteriormente [2].

Antes de proceder a demostrar los resultados que acab-
mos de mencionar, debemos dar una definición y demostrar un lema.

Definición de la condición B.- <u>Si existe una función positiva</u> V(
<u>tal que</u>

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{N(\lambda)}{V(\lambda)} = 1$$

<u>y que para un valor de</u> $\rho<2/3$ <u>y para</u> λ <u>suficientemente grande, la</u>

$$\frac{V(\lambda)}{\lambda^{\rho}}$$

<u>sea una función no creciente de</u> λ , <u>entonces diremos que la sucesi</u>
$\{\lambda_n\}$ <u>verifica la condición</u> B.

Lema 2.- <u>Si la sucesión</u> $\{\lambda_n\}$ <u>verifica la condición</u> B, <u>entonces</u>

$$\lim_{r=\infty} \frac{\Lambda_k(r)}{q_k(r)} = \infty \qquad (r>0)$$

<u>y por lo tanto</u> ,

$$\lim_{R=0} \frac{L_k(\pi R)}{Q_k(\pi R)} = \infty \qquad (R>0)$$

Demostración .- Sea $N_k(\lambda) = N(\lambda)$ cuando $\lambda \leq \lambda_k$, y
$N_k(\lambda) = N(\lambda) - 1$ cuando $\lambda > \lambda_k$. Entonces la definición de $q_k(r)$
y puesto que de la convergencia de $\sum(1/\lambda_n)$ se deduce $\lim_{\lambda=\infty} (N(\lambda)/\lambda$
= 0, resultará

$$\log|q_k(r)| = \int_0^{\infty} \log\left(1+\frac{r}{\lambda}\right) dN_k(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{rN_k(\lambda)}{\lambda(\lambda+r)}\, d\lambda$$

Y de modo semejante

$$\log|\Lambda_k(r)| = \int_0^{\infty} \log\left(1+\frac{r^2}{\lambda^2}\right) dN_k(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{2r^2 N_k(\lambda)}{\lambda(\lambda^2+r^2)} d\lambda$$

Por lo tanto

$$\log\left|\frac{\Lambda_k(r)}{q_k(r)}\right| = \int_0^{\infty}\left[\frac{2r^2}{\lambda(\lambda^2+r^2)} - \frac{r}{\lambda(\lambda+r)}\right] N_k(\lambda)\, d\lambda$$

y puesto que la cantidad interior a los parentèsis angulares es posi

va para $\lambda < (1+\sqrt{2})r$, para cualquier valor de $\eta < 1+\sqrt{2}$, tendremos

$$(6) \qquad \log\left|\frac{\Lambda_k(r)}{q_k(r)}\right| > \int_{\eta r}^{+\infty}\left[\frac{2r^2}{\lambda(\lambda^2+r^2)} - \frac{r}{\lambda(\lambda+r)}\right] N_k(\lambda)\, d\lambda.$$

Dado que suponemos que la sucesión $\{\lambda_n\}$ verifica la condición B,

si r es suficientemente grande, para $\lambda > \eta\, r$, tendremos

$$1-\varepsilon < \frac{N_k(\lambda)}{V(\lambda)} < 1+\varepsilon$$

donde ε es una cantidad positiva determinada pero tan pequeña como se quiera. En consecuencia, si escribimos $\theta = 1+\sqrt{2}$, puesto que la catidad que en (6) es interior a los parentesis angulares es negati

para $\lambda > (1+\sqrt{2})r$, se seguira

$$\log\left|\frac{\Lambda_k(r)}{q_k(r)}\right| > \int_{\eta r}^{\theta r}\left[\frac{2r^2}{\lambda(\lambda^2+r^2)} - \frac{r}{\lambda(\lambda+r)}\right](1-\varepsilon)V(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+ \int_{\theta r}^{\infty}\left[\frac{2r^2}{\lambda(\lambda^2+r^2)} - \frac{r}{\lambda(\lambda+r)}\right](1+\varepsilon)V(\lambda)\,d\lambda$$

y por las propiedades de $V(\lambda)$ y despues de efectuar un cambio de va riable, resulta

$$\log\left|\frac{\Lambda_k(r)}{q_k(r)}\right| > \frac{V(\theta\, r)}{\theta^\rho}\left(\int_\eta^\infty\left[\frac{2x^\rho}{x(x^2+1)} - \frac{x^\rho}{x(x+1)}\right]dx + \right.$$

$$\left. + \varepsilon\int_\theta^\infty\left[\frac{2x^\rho}{x(x^2+1)} - \frac{x^\rho}{x(x+1)}\right]dx - \varepsilon\int_\eta^\theta\left[\frac{2x^\rho}{x(x^2+1)} - \frac{x^\rho}{x(x+1)}\right]dx\right).$$

y haciendo tender r al infinito, puesto que η y ε pueden tender hacia cero, resulta finalmente

$$\lim_{r=\infty}\frac{\log|\Lambda_k(r)/q_k(r)|}{V(\theta\, r)} \qquad \frac{\pi\theta^{-\rho}}{\operatorname{sen}\pi\rho/2} - \frac{\pi\theta^{-\rho}}{\operatorname{sen}\pi\rho} \tag{7}$$

y como que por hipotesis $\rho < 2/3$, resultará

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi\rho/2} - \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi\rho} > 0,$$

y por lo tanto, ya que $V(\theta\, r)$ crece indefinidamente cuando $r \to \infty$, se sigue de (7)

$$\lim_{r=\infty}\frac{\Lambda_k(r)}{q_k(r)} = \infty$$

que es la primera parte del lema 2.

La segunda parte del lema se seguiria inmediatamente de las propi dades de la transformación de Laplace, pero puede deducirse directa- mente del siguiente modo: Tomemos r_0 suficientemente grande para que cuando $r > r_0$ se verifique

$$\Lambda_k(r) > \Omega\, q_k(r)$$

donde Ω es un número determinado tan grande como se quiera. Ahora, p esto que $q_K(r)$ es una función creciente de r será posible elegir R_o t què para todo $R<R_o$, se cumple

$$\int_{r_o}^{\infty} q_K(r)e^{-rR}\, dr > \Omega \int_0^{r_o} q_K(r)e^{-rR}\, dr,$$

por lo tanto, para $R<R_o$,

$$\frac{L_K(R)}{Q_K(R)} > \frac{\Omega}{1+\frac{1}{\Omega}}$$

y puesto que Ω puede ser tan grande como se quiera

$$\lim_{R=0} \frac{L_K(R)}{Q_K(R)} = \infty$$

lo cual termina la demostración del lema.

7.- Como siempre en este trabajo continuamos suponiendo que la ser $\sum(1/\lambda_n)$ es convergente entonces si se cumple la hipotesis $A^{(K)}(g(\sigma)$, $p(\sigma), \{\lambda_n\})$ de Mandelbrojt [1,pag.74] de la existencia de la funció $h(\sigma)$ se deduce facilmente que puede determinarse otra función $h_o(\sigma)$ que verifica $\lim h_o(\sigma) = 0$ y

$$\text{(8)} \qquad \log L_K(\pi h_o(\sigma)) < p(\sigma) + M$$

$$\text{(9)} \qquad \int^{\infty} |p(\sigma) - \log L_K(\pi h_o(\sigma))| \exp\left(-\frac{1}{2}\int^{\sigma}\frac{dx}{g(x) - h(x)}\right) d\sigma = \infty$$

o dicho de otro modo, en el caso que estamos considerando podemos suponer que en la hipotesis $A^{(K)}(g(\sigma), p(\sigma), \{\lambda_n\})$ la constante h es

igual a cero. Lo mismo sucede con nuestra hipotesis $A_c^{(K)}(g(\sigma),p(\sigma),$
$\{\lambda_n\}$), Por lo tanto, lo mismo al tratar de la hipotesis $A^{(K)}$que de
la hipotesis $A_c^{(K)}$supondremos en adelante que lim $h(\sigma) = 0$.

Ahora bien, si la sucesión $\{\lambda_n\}$ cumple la condición B definida e
el nº 6, puesto que según el lema 2 a partir de un valor de σ se ve-
rifica

$$Q_K(\pi h(\sigma)) < L_K(\pi h(\sigma))$$

si se cumple las (8) y (9), [redacted] (*) se cumplira
asimismo

$$\log Q_K(\pi h(\sigma)) < p(\sigma) + M$$

$$\int^{\infty} |p(\sigma) - \log Q_K(\pi h(\sigma))| \exp\left(-\frac{1}{2}\int^{\sigma}\frac{dx}{g(x) - h(x)}\right) d\sigma = \infty$$

o sea que con la condición B, cuando se cumple la hipotesis $A^{(K)}$se cu
ple asimismo $A_c^{(K)}$, es decir en este caso nuestra hipotesis es menos (
a lo sumo igual) restrictiva que la de Mandelbrojt. No podemos desca
tar la posibilidad de que sean equivalentes, pues no hemos encontrad
ningún ejemplo en que se cumpla la $A_c^{(K)}$y no se cumpla la $A^{(K)}$. Creo se-
ria interesante averiguar si son o no equivalentes.

Por otro lado el lema 2 permite demostrar inmediatamente que cua
do R es suficientemente pequeña y cuando se cumple la condición B se
verifican

$$\pi R Q_K(\pi R) q_K^* < \pi R L_K(\pi R)$$

(*) En (8) y (9) suponemos de nuevo escritas con $h(\sigma)$ en lugar de
$h_0(\sigma)$, puesto que, según hemos dicho suponemos ya que lim $h(\sigma) = 0$

y

$$\pi R Q_K(\pi R) < \pi R L_K(\pi R),$$

es decir, que la desigualdad de la conclusión α del teorema es más precisa que la fundamental de Mandelbrojt, y que la desigualdad de la conclusión β es más precisa que la desigualdad correspondiente del teorema I de [2].

8.- Igual que hicimos con los resultados de Mandelbrojt en [2] podemos suponer en el teorema de este trabajo que la función F(s) en lugar de venir representada con una función logaritmica por las sumas parciales de una misma serie de Dirichlet, esta representada con la misma precisión logaritmica por unas sumas de exponenciales, o polinomios de Dirichlet,

$$\varphi_m(s) = \sum_{0}^{n_m} d_n^{(m)} e^{-\lambda_n s}$$

cualesquiera, con la sola condición de que para el valor de k que interviene en el teorema $d_K^{(m)}$ es independiente de m; entonces las conclusiones α y β se cumplen igualmente. Y esta ultima condicion de la independencia de $d_K^{(m)}$ no se cumple, la conclusión β continua, sin grandes variaciones, siendo valida; como resulta razonando como la demostración del teorema II de [2].

Por otra parte, en el teorema de este trabajo y en la generalización de que acabamos de hablar se puede sustituir la precisión logaritmica por la l-precisión logaritmica que definimos en la sección 2 de [2] y las conclusiones del teorema continuan siendo validas con ligeras variaciones.

Finalmente, las observaciones que hemos efectuado en el nº 7 sobre la comparación de las hipotesis $A^{(K)}$ y $A_c^{(K)}$, y sobre la precisión de las

desigualdades de las conclusiones, podran repetirse integramente pa[r]
las generalizaciones del teorema señaladas en este número.

Referencias Bibliograficas

1.- Mandelbrojt (S) - Séries adhérantes. Régularisation des suites. Aplications (Paris 1952)

2.- Sunyer Balaguer (F) - Aproximación de funciones por sumas de exponenciales (Collectanea Máth. vol. 5, 1952)

Vilajoan 30 de Agosto de 1960