SOBRE LOS PUNTOS SINGULARES DE LAS FUNCIONES

REPRESENTADAS POR SERIES DE

DIRICHLET (1)

por F. Sunyer Balaguer

Introducción.- Cuando la sucesión $\{\lambda_n\}$ de los exponentes de una serie de Dirichlet tiene una densidad máxima $D<\infty$ un teorema de Bernstein nos permite afirmar que en todo segmento de la recta de holomorfia de longitud $2\pi D$ existe un punto singular de la función representada por la serie (tanto si se supone que la serie tiene un semiplano de convergencia, como si se supône la serie convergente solamente mediante agrupación de terminos. Nosotros supondremos, para simplificar las demostraciones, que las series de que trataremos tienen un semiplano de convergencia).

No obstante este teorema de Bernstein no permite conocer la situación, o mejor dicho la distribución, de los puntos singulares situados más alla de la recta de holomorfia, cuando la ~~sucesión~~ función puede prolongarse a traves de ella. En este caso Mandelbrojt obtuvo un teorema cuando la función puede prolongarse analiticamente a lo largo de un canal de anchura $>2\pi\overline{D}^*$, donde $\overline{D}^*$ es la densidad media superior de la sucesión $\{\lambda_n\}$ de los exponentes.

En este trabajo demostraremos dos teoremas que se refieren a la distribución de los puntos singulares situados más alla de la

(1) Los resultados de este trabajo son una pequena parte de los obtenidos en una serie de investigaciones bajo contrato con la U.S. Navy

recta de holomorfia, pero que no son consecuencia del Mandelbrojt, ni tampoco lo contienen. Una de las diferencias entre el teorema de Mandelbrojt y los nuestros es que aquel supone que

$$\underline{\mathrm{Lim}}\,(\lambda_{n+1}-\lambda_n) = h > 0$$

y que por lo tanto el indice de condensación de $\{\lambda_n\}$ es nulo, mientras que nosotros no hacemos ninguna hipotesis sobre el valor del indice de condensación.

1.- El primero de los teoremas que queremos demostrar tiene el siguiente enunciado:

TEOREMA I.- *Si* H *es la abscisa de holomorfia de*

$$(1) \qquad F(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it)$$

y si $\{\lambda_n\}$ *es tal que* $0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1}$ *y* $D < \infty$, *entonces existe por lo menos una singularidad de* $F(s)$ *en todo rectangulo* $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 < H$, $t_1 \leq t \leq t_2$ *tal que* $\sigma_2 - \sigma_1 = 2\pi\overline{D}^*$, $t_2 - t_1 = 2\pi(D + \overline{D}^*)$ *y que pueda conectarse con el semiplano de convergencia de (1) por un canal de anchura* $> 2\pi\overline{D}^*$ *en el cual* $F(s)$ *es holomorfa.*

Demostración.- Representemos por $C(s_0,R)$ el círculo $|s - s_0| \leq R$, entonces, según la terminologia en uso, un canal de anchura $2R$ será la unión de un conjunto de círculo $C(s_0,R)$ cuando el centro s_0 recorre un arco simple de Jordan J, o sea

$$S = S(J,R) = \bigcup_{s_0 \in J} C(s_0,R)$$

donde S es el canal en cuestión. Por otra parte se dice que una función F(s) puede prolongarse analiticamente de un dominio d_1 a otro dominio d_2 a lo largo del canal S si F(s) es holomorfa en S y si el circulo cuyo centro corresponde a un extremo de J es completamente interior a d_1 mientras que el correspondiente al otro ~~termino~~ extremo es completamente interior a d_2.

Supongamos que contrariamente a lo afirmado por el teorema exista un rectangulo

$$\rho = \{ \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 < H, \ t_1 \leq t \leq t_2 \}$$

con $\sigma_2 - \sigma_1 = 2\pi \overline{D}^*$, $t_2 - t_1 = 2\pi(D + \overline{D}^*)$ tal que la prolongación analitica de F(s) desde el semiplano de convergencia de (1) hasta ρ a lo largo de un canal de anchura $> 2\pi\overline{D}^*$ sea posible. Como quiera que ρ es un dominio cerrado, es evidente que si en él F(s) no posee ninguna singularidad, existe una cantidad $\varepsilon > 0$ tal que en

$$\rho = \{ \sigma_1 - \varepsilon \leq \sigma \leq \sigma_2 + \varepsilon < H, \ t_1 - \varepsilon \leq t \leq t_2 + \varepsilon \}$$

tampoco F(s) posee singularidad alguna.

Sin perdida de generalidad podremos suponer que la serie (1) no contiene el termino constante, es decir que $\lambda_1 > 0$, entonces siguiendo a Mandelbrojt podemos escribir

$$\Lambda(s) = \prod \left(1 + \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right) = \sum c_n z^{2n}$$

y se puede demostrar facilmente (por ejemplo Mandelbrojt [1, lema 3.3.VII]) que si $\Phi(s)$ es una función holomorfa en $|s - s_0| \leq$

$\leq R > \pi \bar{D}^{\bullet}$ entonces la función

$$\Phi'(s) = \sum (-1)^n c_n \Phi^{(2n)}(s)$$

será una función holomorfa en el circulo $|s - s_0| \leq R - \pi \bar{D}^{\bullet}$, y además

$$(2) \qquad |\Phi'(s_0)| < KM,$$

donde K depende unicamente de R, $\bar{D}^{\bullet}$ y $\{\lambda_n\}$ y M es el máximo de $|\Phi(s)|$ en $C(s_0, R)$.

Por lo tanto puesto que en la definición de ρ_1 podemos elegir ε tan pequeña como queramos, es evidente que es posible suponer que el canal S que permite prolongar analiticamente F(s) desde el semiplano de convergencia de (1) hasta ρ_1 tiene una anchura igual a $2\pi\bar{D}^{\bullet} + 2\varepsilon$. En consecuencia la función $F^{\bullet}(s)$ que se deduce de F(s) del mismo modo que Φ' se deduce de Φ será holomorfa en

$$\rho_2 = \{\sigma_1 + \pi\bar{D}^{\bullet} - \varepsilon \leq \sigma \leq \sigma_2 - \pi\bar{D}^{\bullet} + \varepsilon,\ t_1 + \pi\bar{D}^{\bullet} - \varepsilon \leq t \leq t_2 - \pi\bar{D}^{\bullet} + \varepsilon\}$$

y puede prolongarse analiticamente desde el semiplano de convergencia de (1) hasta este rectangulo ρ_2 a lo largo de un canal de anchura 2ε.

Por otro lado si $\Phi(s) = e^{-\lambda_k s}$ resulta

$$(3) \qquad (e^{-\lambda_k s})^{\bullet} = \Phi'(s) = \sum (-1)^n \lambda_k^{2n} e^{-\lambda_k s} = 0$$

además dado cualquier circulo completamente interior al semiplano de convergencia de (1) y para cualquier $\eta > 0$ podra elegirse un k_0

tal que

$$(4) \qquad \left| F(s) - \sum_{1}^{m} a_n e^{-\lambda_n s} \right| < \eta \qquad \text{si } m > k_o.$$

Por lo tanto si el circulo tiene un radio $R > \pi \bar{D}^*$ como hemos supuesto, resultara de (2), (3) y (4)

$$|F^*(s_o)| < K\eta$$

y puesto que η puede elegirse tan pequeña como se quiera y además s_o recorre un arco de Jordan, tendremos finalmente

$$(5) \qquad F^*(s) \equiv 0$$

y esta misma identidad se cumplirá en el rectangulo ρ_2 puesto que $F^*(s)$ puede prolongarse analiticamente desde el semiplano de convergencia de (1) hasta ρ_2.

Del hecho que F(s) es holomorfa en ρ_1 y que (5) se cumple en ρ_2, se deduce(por ejemplo como en mi trabajo [2]) que F(s) es el limite de una sucesión uniformemente convergente en ρ_2 de combinaciones lineales de $\{e^{-\lambda_n s}\}$. Entonces, según un resultado de Schwartz [3,prpriete VIII, pag. 135], F(s) será holomorfa en el semiplano

$$\sigma > \sigma_1 + \pi \bar{D}^* - \varepsilon < H$$

contrariamente a la hipotesis de que H es la abscisa de holomorfia de F(s). Esta contradicción demuestra que la suposición de que F(s) puede prolongarse analiticamente a lo largo de un canal de anchura

$> 2\pi \bar{D}'$ hasta ρ_1 en el cual suponemos que es holomorfa es absurda para cualquier valor de ε, lo cual demuestra que F(s) tiene por lo menos una singularidad en ρ cuando este cumple las condiciones del teorema, es decir el teorema queda demostrado.

2.- Una demostración semajante, como veremos, nos permitira demostrar :

TEOREMA II.- Suponiendo que $\{\lambda_n\}$ verifica las mismas condiciones que en el teorema I, existirá por lo menos una singularidad de F(s) en cualquier círculo $|s - s_0| \leq 2\pi \bar{D}'$ tal que $\sigma_0 < H - \pi D$, y que pueda conectarse con el semiplano de convergencia de (1) por un canal de anchura $> 2\pi \bar{D}'$ en el cual F(s) es holomorfa.

Demostración.- Es evidente que si la afirmación del teorema fuese falsa, existiria un círculo $|s - s_0| \leq 2\pi \bar{D}' + \varepsilon$ en el cual F(s) no tendria ninguna singularidad y que este circulo podria conectarse con el semiplano de convergencia de (1) por un canal de anchura $2\pi \bar{D}' + 2\varepsilon$, todo esto para un determinado valor de $\varepsilon > 0$.

Entonces igual que en la demostración del teorema I podria demostrarse que en el círculo $|s - s_0| < \pi \bar{D}' + \varepsilon$ severifica

$$F'(s) \equiv 0$$

y por lo tanto puede demostrarse, como anteriormente que en este último círculo F(s) seria el límite de una sucesión uniformemente convergente de combinaciones lineales de $\{e^{-\lambda_n s}\}$.

Ahora bien aplicando un resultado de Kahane [4, teorema 3, pag. 96] resultaria finalmente que F(s) seria holomorfa en el semiplano

$$\sigma > \sigma_0 + \pi D < H$$

en contradicción con el hecho de que H es la abscisa de holomorfia de F(s). Esta contradicción demuestra que el teorema es cierto.

3.- El teorema de Mandelbrojt de que hemos hablado en la introducción admite la hipotesis

$$\underline{\lim}\,(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0 \tag{6}$$

y con esta hipotesis y suponiendo tambien que $\overline{D}^{\circ} < \infty$ afirma que dado un canal S de anchura $> 2\pi\overline{D}^{\circ}$ que parte del semiplano de convergencia de (1) y cuyo arco J de Jordan recorrido por el centro de los círculos que lo componen tiene un punto s_0 tal que

$$\sigma_0 < \sigma_c - 3\overline{D}^{\circ}(3 - \log(h\overline{D}^{\circ}))$$

donde σ_c es la abscisa de convergencia de (1), entonces en S existe por lo menos un punto singular de F(s).

Puesto que cuando (6) se verifica $\sigma_c = H$ y como la expresion $3\overline{D}^{\circ}(3 - \log(h\overline{D}^{\circ}))$ puede ser, según los casos, superior, e incluso muy superior, a la cantidad πD, el teorema de Mandelbrojt no puede contener nuestros teoremas ni cuando se admite la (6). Asimismo puesto que ni el rectangulo de nuestro teorema I ni el circulo de radio $2\pi\overline{D}^{\circ}$ de nuestro teorema II, es posible afirmar que en todos los casos sean interiores a los circulos de radio $>\pi\overline{D}^{\circ}$, que intervienen en el teorema de Mandelbrojt, ninguno de nuestros teoremas contiene al del mencionado Profesor. Es decir que como hemos dicho en la introducción los dos teoremas demostrados en este trabajo y el de Mandelbrojt son independientes, incluso sin tener en cuenta que nuestros teoremas no presuponen que se verifique la condicion (6).

BIBLIOGRAFIA

1.- Mandelbrojt, S - Séries adhérentes, Régularisation des suites, Applications (Paris 1952).

2.- Sunyer Balaguer, F - Aproximación de funciones por súmas de exponenciales (Collectanea Math. Vol.V, 1952).

3.- Schwartz, L - Etude des sommes d'exponentielles ~~XXXXXXXXXXXX~~ (2º edicion, Paris 1959).

4.- Kahane, J.P. - Sur quelques problèmes d'unicité et de ~~xxxxxxxxxn~~ prolongement relatifs aux fonctions aprochables par des sommes d'exponentielles (Ann. de l'Institut Fourier, t. V, 1953-54).

Vilajoan, Octubre 1964

Nº 38

5ª R. Mat Esp.

(Sección:ANALISIS)

SOBRE LOS PUNTOS SINGULARES DE LAS FUNCIONES REPRESENTADAS POR SERIES DE DIRICHLET

por F. Sunyer Balaguer

RESUMEN

Si en una serie de Dirichlet la sucesión $\{\lambda_n\}$ de los exponentes tiene una densidad máxima D finita, es clasico actualmente un resultado de Bernstein que afirma que en cualquier segmento de la recta de holomorfia de longitud $2\pi D$ existe al menos un punto singular. Pero este resultado no permite saber la situación de los puntos singulares situados más alla de la recta de holomorfia cuando la función puede prolongarse analiticamente a traves de ella; es decir, cuando la recta formada por todos los puntos cuya abscisa es igual a la de holomorfia no es una cortadura para la función. En este sentido Mandelbrojt demostro un resultado cuando la función puede prolongarse a lo largo de un canal de anchura $> 2\pi\bar{D}^*$, donde $\bar{D}^*$ es la densidad media superior de $\{\lambda_n\}$.

En este trabajo demostraremos dos teoremas en la misma dirección que el de Mandelbrojt, pero que no son consecuencia de él ni tampoco lo contienen. Estos teoremas son los siguientes:

TEOREMA I.- Si H es la abscisa de holomorfia de

(1) $$F(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

y si $\{\lambda_n\}$ es tal que $0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1}$ y $D < \infty$, entonces existe al menos una sigularidad de $F(s)$ en todo rectangulo $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 < H$, $t_1 \leq t \leq t_2$ tal que $\sigma_2 - \sigma_1 = 2\pi\bar{D}^*$, $t_2 - t_1 = 2\pi(D + \bar{D}^*)$ y que pueda conectarse con el semiplano de convergencia de (1) por un canal de anchura $> 2\pi\bar{D}^*$ en el cual $F(s)$ sea holomorfa.

TEOREMA II.- Suponiendo que $\{\lambda_n\}$ verifica las mismas condiciones que en el teorema I, existirá por lo menos una singularidad de $F(s)$ en cualquier círculo $|s - s_0| \leq 2\pi\bar{D}^*$ tal que $\sigma_0 < H - \pi D$, y que pueda conectarse con el semiplano de convergencia de (1) por un canal de anchura $> 2\pi\bar{D}^*$ en el cual $F(s)$ es holomorfa.

Las demostraciones de estos dos teoremas se apoyan en unos resultados de Schwartz y Kahane, y en un procedimiento mio que he utilizado en diversas cuestiones.