

30.- APLICACIONES DIRIGIDAS.CONVERGENCIA.

Vamos a recordar lo que pasaba con los límites de las sucesiones. Una sucesión, si se trataba por ejemplo de números, es la aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ que pueden ser acabados.

Entonces se dice que:

$$\exists c = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \Leftrightarrow u_n \rightarrow c \in \mathbb{R} (\text{ó } \mathbb{C}) \quad (\equiv)_d \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni n > n_0 \Rightarrow |u_n - c| < \varepsilon$$

que es lo que llamamos límite, incluso cuando c era complejo.

En la recta $\mathbb{R}$ era: $c - \varepsilon < u_n < c + \varepsilon$ porque había orden lineal, pero en el plano complejo no ocurre.

En cambio en $\overline{\mathbb{R}}$:

$$u_n \rightarrow +\infty (\equiv)_d \quad \forall K \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni n > n_0 \Rightarrow u_n > K$$

$$\Rightarrow u_n < K. \quad \text{Igualmente } u_n \rightarrow -\infty \text{ si para todo } K \text{ arbitrario, cuando } n > n_0 \Rightarrow$$

En cambio puede ocurrir, como pasa con $(-2)^n$ ó $(2i)^n$, no tener límite $+\infty$ ni $-\infty$, y entonces en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ diremos:

$$u_n \rightarrow \text{sin signo determinado} \quad (\equiv)_d \quad \forall r \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni$$

$n > n_0 \Rightarrow |u_n| > r$ o sea que está fuera de un círculo de radio arbitrariamente general, a partir de un cierto n_0 en adelante.

En el campo complejo el límite puede no tener argumento:

$$\frac{e^{in\alpha}}{n} = \frac{\cos n\alpha}{n} + i \frac{\sin n\alpha}{n} \quad \text{complejo de argumento } n\alpha, \text{ siendo } \alpha \text{ fi-}$$

jo, y de módulo $1/n$, que tiende a cero.

Todo esto lo podemos agrupar en forma topológica aplicando la condición de entorno:

Diremos en $\overline{\mathbb{R}}$ o $\overline{\mathbb{C}}$ que $U_n \rightarrow c$ (incluye los casos de límite propio o impropio) si:

$$U_n \rightarrow c (\equiv)_d \quad \forall U_c \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni n > n_0 \Rightarrow u_n \in U_c$$

pues bien, esto lo podemos generalizar a aplicaciones dirigidas cualesquiera.

CONVERGENCIA EN APLICACIONES DIRIGIDAS.

Aplicaciones dirigidas será: $\{u_\alpha\} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ ó } \overline{\mathbb{C}} \ni \{\alpha\} = D$

sea un conjunto con ordenación transitiva y dirigida; entonces diremos:

$$\exists c = \lim u_\alpha \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} \Leftrightarrow u_\alpha \rightarrow c \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} \quad (\equiv)_d \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \alpha_0 \in D \ni \alpha > \alpha_0 \Rightarrow |u_\alpha - c| < \varepsilon$$

o bien en el caso de ser $u_\alpha \rightarrow +\infty$ entonces:

$$\forall K > R \Rightarrow \exists \alpha_0 \in D \ni \alpha > \alpha_0 \Rightarrow u_\alpha > K$$

o bien si es $u_\alpha \rightarrow -\infty \Rightarrow u_\alpha < K$

$$\text{o } u_\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow |u_\alpha| > r$$

Entonces esto se puede agrupar diciendo:

$$u_\alpha \rightarrow c \in \bar{R} \text{ (ó } \bar{C}) \text{ (} \equiv \text{)}_d \forall U_0 \Rightarrow \exists \alpha_0 \in D \ni \alpha > \alpha_0 \Rightarrow u_\alpha \in U_0$$

Ejemplos:

Tenemos el caso del límite de una función $u(x)$ de una variable real.

$$\lim_{x \rightarrow \xi} u(x) = c \ni \xi = x_0 \vee x_0^+, \quad x_0^-, +\infty, -\infty, \infty$$

que el límite de $u(x)$ sea c cuando $x \rightarrow x_0$ querrá decir,

$$x \rightarrow x_0 \text{ si en } U_{x_0} \ni 0 < |x - x_0| < \delta$$

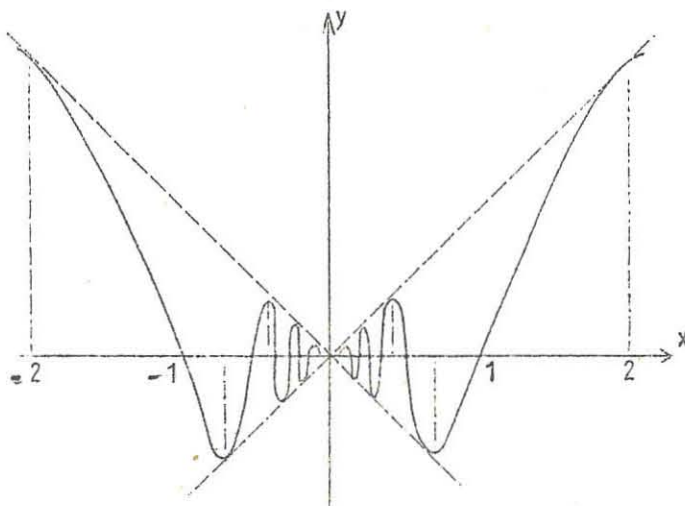
$$\text{diremos que: } x_1 > x_2 \text{ (} \equiv \text{)}_d 0 < |x_1 - x_0| < |x_2 - x_0|$$

esto es, un orden dirigido.

Entonces va a ocurrir que el límite será:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = c \in R \text{ (ó } C) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_0(\varepsilon) > 0 \ni 0 < |x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow |u(x) - c| < \varepsilon$$

aun cuando ni tan solo $u(x)$ esté definida en x_0 la función puede tener límite que es lo que pasa con el ejemplo $u(x) = x \sin \pi/x$ para $x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$.



Aunque no está definida para $x = 0$ pero se le asigna el valor 0, por ser éste su límite (discontinuidad evitable, Lec. 41).

En lugar de acercarnos bilateralmente podemos acercarnos por ejemplo por la derecha; entonces tendremos:

$$x \rightarrow x_0^+ \Leftrightarrow \in U_{x_0^+} \left(\left\{ \begin{array}{l} 0 < x - x_0 \\ < \delta_0 \end{array} \right\} \text{ es } x_1 > x_2 \text{ (} \equiv \text{)}_{\text{def}} \right.$$

$0 < x_1 - x_0 < x_2 - x_0$ entonces se designa el límite, si existe, por:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} u(x) = u(x_0^+) = u(x_0 + 0)$$

Si se acerca por la izquierda significará:

$$x \rightarrow x_0^- \Leftrightarrow \in U_{x_0^-} \left\{ \left\{ \begin{array}{l} 0 < x_0 - x \\ < \delta_0 \end{array} \right\} \text{ es } x_1 > x_2 \text{ (} \equiv \text{)}_{\text{def}} \right.$$

$$0 < x_0 - x_1 < x_0 - x_2$$

entonces se designa el límite, si existe, por,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} u(x) = u(x_0^-) = u(x_0 - 0)$$

Lo mismo será para $x \rightarrow +\infty$; es decir,

$$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow U_{+\infty}^x = \{ x \ni x > k \} \quad \text{es } x_1 = x_2 \quad (\equiv)_{\text{def}} \quad x_1 > x_2.$$

Entonces se aplica la misma definición que hemos dado de límite.

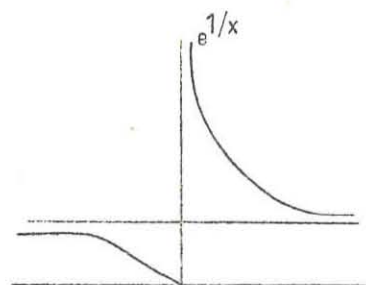
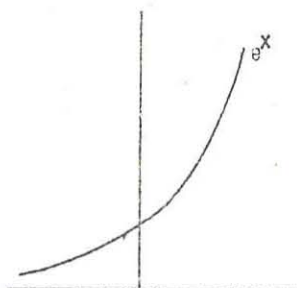
Igualmente procederíamos para $x \rightarrow -\infty$; en el caso de $x \rightarrow \infty$ sin signo determinado será:

$$x \rightarrow \infty \Leftrightarrow U_{-\infty}^x = \{ x \ni x < k \} \quad \text{es } x_1 > x_2 \quad (\equiv)_{\text{def}} \quad |x_1| > |x_2|$$

lo mismo que antes pondremos para el límite infinito, en el que exigimos que u_α esté en el entorno del infinito.

Ejemplo: $u(x) = e^{1/x}$. Esta función tiene la siguiente gráfica:

Primero dibujamos e^x ; entonces cuando $x < 0$ la función $e^{1/x}$ varía entre los puntos 0,1; pero cuando $x \rightarrow -\infty$ entonces $1/x \rightarrow 0^-$. En cambio cuando la $x \rightarrow +\infty$ entonces $1/x \rightarrow 0^+$. O sea que tendremos,



$$\exists u(0^-) = 0 \neq u(0^+) = +\infty$$

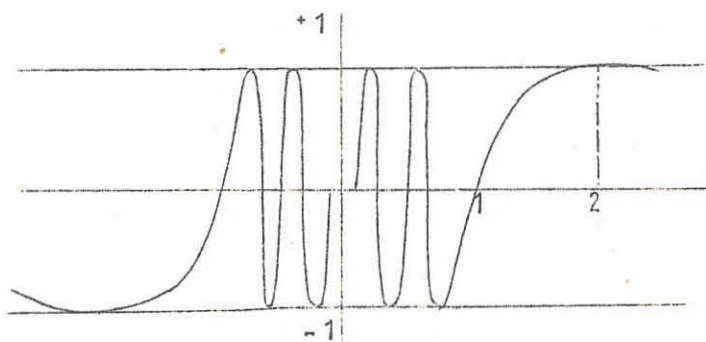
$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 1$$

O sea que cuando x tiende bilateralmente a infinito, $u(x)$ se acerca tanto como se quiera a 1.

Pero puede no tener límite; por ejemplo, puede no existir límites laterales: $u(x) =$

$$= \sin \frac{\pi}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \text{ no existe } \vee 0^- \vee 0^+ \quad \text{que no tiene límite en el}$$

punto 0. La gráfica será:



Para $x \rightarrow 0$ aunque no tiene límite, esta función en puntos tan cercanos a 0 como se quiera se aproxima tanto como se quiera a +1 y -1 ó a todo valor real entre -1 y +1. Esto nos dará una idea del límite de oscilación.

LÍMITE DE OSCILACION: PROPIEDADES.

En $\bar{R}$ ó $\bar{C}$ diremos que a es límite de oscilación de la sucesión cuando ocurre que para todo entorno de a hay infinitos puntos de la sucesión dentro del entorno, quedando fuera también acaso infinitos.

$$a = \lim \text{ oscil } \{u_n\} \quad (\equiv)_{\text{def}} \quad \forall U_a \wedge \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n > m \ni u_n \in U_a$$

La misma definición servirá para el conjunto dirigido $\{u_\alpha\}$ en que α es el índice que fija los valores.

$$a = \lim \text{ oscil } \{u_\alpha\} \quad (\equiv)_{\text{def}} \quad \forall U_a \wedge \forall \beta \in D \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \alpha > \beta \ni u_\alpha \in U_a$$

Ejemplos:

Supongamos en el caso de la sucesión en el campo complejo

$$\{i^n \ni n \in \mathbb{N}\}$$

Los valores que va tomando los términos de la sucesión son:

$$i, -1, -i, 1, i, \dots$$

en que se repiten a partir del cuarto término.

Ninguno de estos cuatro números son límite de la sucesión i^n , pero cada uno de los cuatro es límite de oscilación porque siempre hay un n , que por elevado que sea el m , se cumple que $n > m$, y hace coincidir el valor de i^n bien con i , con -1 , con $-i$, o con 1 .

Hay que distinguir esencialmente el límite de oscilación de punto de acumulación; son cosas distintas. Como conjunto puntual, el conjunto de i^n sólo tiene cuatro valores, o sea que como conjunto puntual estos cuatro puntos son puntos aislados del conjunto; pero sin embargo, son límites de oscilación, porque aunque coincidan para distintos valores de la n , serán como números los mismos, pero no lo serán considerados como términos de la sucesión.

Igualmente ocurre para $(-1)^n$.

$$(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{si } n \text{ par} \\ -1 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} \quad \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \right\}$$

Parece que los límites de oscilación son puntos excepcionales, pero veamos que no ocurre esto con ciertos ejemplos:

Si tenemos el conjunto de los números racionales puestos en sucesión: $\{r_n\} = \mathbb{Q}$ entonces cualquier número real es límite de oscilación de la sucesión, pues cumple la condición, ya que en cualquier entorno de un número real hay infinitos números racionales.

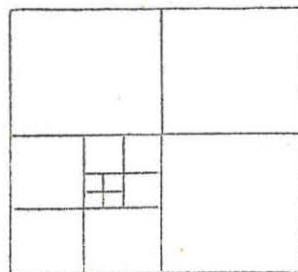
Ahora bien, toda aplicación dirigida en $\bar{R}$ (ó $\bar{C}$) tiene límite de oscilación finito o infinito.

En efecto, si la u_α no se conserva acotada, entonces ∞ ya es límite de oscilación en $\bar{C}$, y en $\bar{R}$ lo es $+\infty$, ó $-\infty$, o ambos a la vez.

En el caso de que esté acotada, entonces $\{U_\alpha\}$ siempre tiene un límite de oscilación finito.

La demostración es la misma, que para el teorema de Weierstrass.

Por estar acotada, podemos encerrar la función de un cuadrado. Entonces por dicotomía, divido el cuadrado en cuatro partes y elijo el intervalo cerrado en él se cumple la condición de que $\forall \beta \Rightarrow \exists \alpha > \beta \exists u_\alpha \in \bar{I}$, o sea este contenido en la $\bar{I}$ que corresponde a una de las cuatro divisiones. Podemos tomar siempre una, porque siempre habrá uno de los cuatro cuadrados cerrados en el que se cumple la condición, puesto que se cumple para el total, y todos los u_α están contenidos en el total. Si hay más de uno se elige el de la izquierda y el de abajo. Entonces vuelvo a dividir el que tomo en cuatro partes, y vuelvo a tomar la que cumplía la condición. Procediendo sucesivamente de esta manera voy determinando un encaje de intervalo que definen el límite de oscilación y para todo entorno se cumple la condición, pues hemos elegido los cuadrados que la cumplían.



En el caso de la recta, podemos decir que hay siempre un límite de oscilación supremo e ínfimo. Si no está acotado superiormente diremos que $+\infty$ es el límite de oscilación superior.

Pero en el caso de que $\{u_\alpha\}$ en R esté acotada superior e inferiormente, a la vez, esto implica que exista límite superior y límite inferior finitos; esto es:

$$\Rightarrow \exists \lim_{\alpha} u_\alpha = L \in R \wedge \exists \lim_{\alpha} u_\alpha = l \in R$$

Así como para que existiera supremo finito bastaba que estuviera acotada superiormente, y para que existiera ínfimo finito bastaba que estuviera acotada inferiormente, aquí necesitamos que estuviera acotada superior e inferiormente, por ejemplo la sucesión $\{-n\}$ está acotada superiormente y $L = l = -\infty$.

Para aplicaciones dirigidas, se puede caracterizar el límite superior de oscilación de la siguiente forma.

$$\exists L \in R (\equiv)_d \begin{cases} L_1) \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) \in D \exists \alpha > \delta \Rightarrow u_\alpha < L + \varepsilon \\ L_2) \forall \varepsilon > 0 \wedge \forall \beta \in D \Rightarrow \exists \alpha > \beta \exists u_\alpha < L - \varepsilon \end{cases}$$

$\begin{array}{c} L - \varepsilon \quad L \quad L + \varepsilon \\ | \quad | \quad | \\ \hline \end{array}$

o sea que la ecuación L_1 es la siguiente en las sucesiones dado un ε , como ha de ser límite superior, solo puede haber un número finito de términos a la izquierda, o sea que para un valor de n_0 en adelante, todos están a la izquierda de $L + \varepsilon$.

En cambio diremos que:

$$L = +\infty (\equiv)_{\text{def}} \forall K > 0 \wedge \forall \beta \in D \Rightarrow \exists \alpha > \beta \exists u_\alpha > K$$

porque no hay ningún número real que esté a la derecha del $+\infty$, y la primera condición se cumple automáticamente.

Para $L = -\infty \Rightarrow L = 0$ pues la primera condición exige que sea convergente.

A su vez:

$$\exists l \in R (\equiv)_{\text{def}} \begin{cases} l_1) \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) \in D \exists \alpha > \delta \Rightarrow u_\alpha > l - \varepsilon \\ l_2) \forall \varepsilon > 0 \wedge \forall \beta \in D \Rightarrow \exists \alpha > \beta \exists u_\alpha < l + \varepsilon \end{cases}$$

$\begin{array}{c} l - \varepsilon \quad l \quad l + \varepsilon \\ | \quad | \quad | \\ \hline \end{array}$

lo que ha de ocurrir es que a partir del δ , estén todos a la derecha de $l - \varepsilon$

para que no haya límite de oscilación < 1 .

Entonces para $l = -\infty \ (\equiv)_{\text{def}} \forall \epsilon \in \mathbb{R} \wedge \forall \beta \in D \Rightarrow \exists \alpha > \beta \ni u_\alpha < \kappa$

La primera parte ya se cumple, pues $-\infty - \epsilon = -\infty$ y ya queda a la derecha. Cuando $l = +\infty \Rightarrow l = \infty = L$.

Por ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \xi} u(x) \wedge \lim_{x \rightarrow \xi} u(x)$ en que $\xi = x_0 \vee x_0^+ \vee x_0^-$,

$\forall +\infty, -\infty, \infty$ El límite de $\sin \pi/x$ es:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{\pi}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{\pi}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} = +1 \wedge \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} = -1.$$

En la función de Dirichlet tenemos:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_r \text{ racional} \\ 0 & \text{si } x = x_i \text{ irracional} \end{cases} \quad \forall \xi \text{ es } \lim_{x \rightarrow \xi} u(x) = +1 \wedge \lim_{x \rightarrow \xi} u(x) = 0$$

es decir, el límite superior de oscilación es 1 y el inferior es 0 en cualquier ξ .

Teorema: $\exists \mid L \text{ en } \bar{\mathbb{R}} \wedge \exists \mid l \text{ en } \bar{\mathbb{R}}$

Veremos más adelante que la condición necesaria y suficiente para que tenga límite una función es que el límite de oscilación sea único.

Se podría construir L y l por cortaduras, pero basta la existencia de extremos en $\mathbb{R}_1$ (demostrada anteriormente por cortaduras) pues hay otro teorema que dice que el límite superior de oscilación es un ínfimo de un supremo.

$$\text{Teorema: } L = \overline{\lim}_{\alpha >} u_\alpha = \inf_{\beta} \underbrace{\left\{ \sup_{\alpha > \beta} u_\alpha \right\}}_{s_\beta} = \inf_{\beta} s_\beta$$

esto es para todo α que siga a β existe un supremo, y voy a ver que el ínfimo de estos supremos es el límite superior de u_α .

En las aplicaciones dirigidas va a ocurrir lo siguiente:

$$\text{cuando } \beta_1 > \beta_2 \Rightarrow s_{\beta_1} \leq s_{\beta_2}$$

como β_1 sigue a β_2 , habrá más α en β_2 que en β_1 y por lo tanto s_{β_2} será también cota superior de los $u_\alpha \ni \alpha > \beta_1$, siendo s_{β_1} cota superior mínima de estos $u_\alpha \ni \alpha > \beta_1$.

Análogamente tendremos:

$$l = \lim_{\alpha >} u_\alpha = \sup_{\beta} \underbrace{\left\{ \inf_{\alpha > \beta} u_\alpha \right\}}_{i_\beta} = \sup_{\beta} i_\beta \quad \text{y en las aplicaciones dirigidas}$$

ocurre que $\beta_1 > \beta_2 \Rightarrow i_{\beta_1} \geq i_{\beta_2}$ por el motivo dual del anterior (véase).

Demostración: En esta demostración hemos de mostrar que es neces-

rio y suficiente, esto es hay directo y recíproco.

La condición de necesario dice que el número siempre existente fijado por estas condiciones cumple las condiciones L_1 y L_2 .

En R :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \xRightarrow{(I_2)} \quad \exists \delta(\varepsilon) \in D \ni s_\delta < (\inf_\beta s_\beta) + \varepsilon := s_\delta \quad \forall \alpha > \delta \quad \xRightarrow{(S_1)} \quad u_\alpha \leq s_\delta$$

$$< \inf_\beta s_\beta + \varepsilon \quad \text{que es la condición } L_1) \text{ para } \inf_\beta s_\beta$$

$$\forall \varepsilon > 0 \wedge \forall \beta \in D \quad \xRightarrow{(S_2)} \quad \exists \gamma > \beta \ni u_\gamma > s_\beta - \varepsilon \geq \inf_\beta s_\beta - \varepsilon \quad \xRightarrow{(I_1)} \quad \text{que es la condición } L_2) \text{ para } \inf_\beta s_\beta.$$

Por el recíproco voy a demostrar que todo número que tiene las propiedades de L_1 y L_2 es único, o sea coincide con este ínfimo del s_β . La demostración consiste en ver que este número L es mayor o igual a la vez que menor o igual, que $\inf s_\beta$. Además vamos a aplicar el método de exhaustión:

$$L_1 \quad \xRightarrow{(S_2)} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \xRightarrow{\beta} \quad \exists \delta(\varepsilon) \in D \ni \sup_{\alpha > \delta} u_\alpha = s_\delta \leq L + \varepsilon \quad \text{pues nosotros sa-}$$

bemos por la propiedad L_1 que todos los $u_\alpha \ni \alpha > \delta$ son menores que $L + \varepsilon$ y entonces $L + \varepsilon$ es una cota superior de todos los α que siguen a δ ; entonces por la condición de ser cota superior mínima, es decir, ser supremo (condición S_2) será:

$$\sup_{\alpha > \delta} u_\alpha = s_\delta \leq L + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{(I_1)} \quad \inf_\beta s_\beta \leq s_\delta \leq L + \varepsilon \Rightarrow \text{Ahora viene lo de exhaustir la diferencia:}$$

aquí el ínfimo de s_β no depende del ε sino que es el ínfimo para todos los s_β que es independiente del ε prefijado y lo mismo L ; así pues,

$$\Rightarrow \inf_\beta s_\beta \leq L, \text{ ya que si } \inf_\beta s_\beta > L \text{ tomando } 0 < \varepsilon < (\inf_\beta s_\beta) - L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \inf_\beta s_\beta > L - \varepsilon \text{ absurdo por hipótesis.}$$

Por otra parte:

$$L_2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \wedge \forall \beta \in D \quad \xRightarrow{(S_1)} \quad \sup_{\alpha > \beta} u_\alpha = s_\beta > L - \varepsilon \quad \text{pues como existe algún}$$

$\alpha \ni u_\alpha > L - \varepsilon$, entonces va a resultar que el supremo de los u_α que siguen a β será mayor que $L - \varepsilon$

$$\xRightarrow{(I_2)} \quad \inf_\beta s_\beta \geq L - \varepsilon \quad \text{ya que } L - \varepsilon \text{ es cota inferior de todos los } s_\beta, \text{ para}$$

$$\text{todo } \beta; \quad \Rightarrow \quad \text{Extr. } \inf_\beta s_\beta \geq L$$

Entonces siendo $\geq$ y $\leq$, por la ley asimétrica de los números reales ordenados por $\leq$ será:

$$\inf s_\beta = L \text{ (c.q.d.)}$$

Este teorema nos permite comparar los ínfimos y supremos respecto al límite superior e inferior de oscilación. Así tenemos el siguiente teorema:

Teorema: $\inf_{\alpha} u_{\alpha} \leq \lim_{\alpha >} u_{\alpha} \leq \overline{\lim}_{\alpha >} u_{\alpha} \leq \sup_{\alpha} u_{\alpha}$

Lo primero de lo cuarto es evidente por definición de ínfimo y supremo como cotas inferior y superior de las u_{α} .

Demostraremos primero que $\overline{\lim}_{\alpha >} u_{\alpha} \leq \sup_{\alpha} u_{\alpha}$: pues:

$$L = \inf_{\beta} s_{\beta} \leq s_{\beta} = \sup_{\alpha > \beta} u_{\alpha} \leq \sup_{\alpha} u_{\alpha}$$

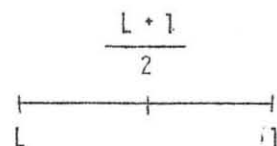
Igualmente demostraríamos, haciendo el razonamiento dual que:

$$\inf_{\alpha} u_{\alpha} \leq \lim_{\alpha >} u_{\alpha}$$

Luego queda por demostrar que $\lim_{\alpha >} u_{\alpha} = \overline{\lim}_{\alpha >} u_{\alpha}$. Para ello tenemos:

$$1 > L \wedge 0 < \varepsilon < \frac{1+L}{2} \wedge (\exists \beta_1 \ni i_{\beta_1} 1 - \text{por } l_1$$

$$- \varepsilon) \wedge (\exists \beta_2 \ni s_{\beta_2} \leq L + \varepsilon) \wedge \text{por } l_2$$



$$(\exists \beta \in D \ni \beta > \beta_1 \wedge \beta > \beta_2) \Rightarrow: i_{\beta} \geq i_{\beta_1} \geq 1 - \varepsilon > \frac{1+L}{2}$$

$L + \varepsilon \geq s_{\beta_2} > s_{\beta}$ absurdo, pues hemos aplicado que si $\beta_1 > \beta_2 \Rightarrow s_{\beta_1} \leq s_{\beta_2} \wedge i_{\beta_1} \geq i_{\beta_2}$ y nos da un absurdo, pues para un mismo conjunto nunca puede ser el ínfimo i_{β} mayor que el supremo s_{β} .

Otro teorema es el siguiente: En $\bar{R}$ ó $\bar{C}$, la condición necesaria y suficiente para que exista límite de la aplicación dirigida u_{α} es que exista un único límite de oscilación; es decir, en $\bar{R}$ que el límite superior e inferior de oscilación sea el mismo.

$$\exists c = \lim_{\alpha >} u_{\alpha} \Leftrightarrow \exists \lim \text{ osc. } \{u_{\alpha}\} = c$$

que sea necesario es inmediato recordando la definición de límite de oscilación y de límite:

$$\exists c \Rightarrow \exists \lim \text{ osc. } = c \text{ (condición de necesidad).}$$

Que exista un c querrá decir que dado un entorno de c , todos los términos de la aplicación para $\alpha > \alpha_0$ están en dicho entorno. Además no puede haber otro distinto. Si fuera otro, por ejemplo a , tomando entornos disjuntos de a y de c , no se cumple la segunda condición de que sea límite de oscilación.

Que sea suficiente significa que si existe un único límite de oscilación, es el c límite. Es decir, la suficiencia es:

$$\exists \lim \text{osc.} = c$$

que el c sea límite de oscilación significa que dado un β , existe un α que sigue al β tal que u_α está dentro del entorno. Pero si para todo β existiese algún α para el que u_α no estuviera dentro de dicho entorno, fuera de éste habría otro límite de oscilación de $\{u_\alpha\}$ y c no sería único límite de oscilación. Luego existe un $\beta = \alpha_0$ tal que cumple la condición para que c sea límite de $\{u_\alpha\}$

Corolario: En $\bar{R}$ se cumple: $\exists c = \lim_{\alpha \rightarrow} u_\alpha \Leftrightarrow l = L (= c) : c$

sea que la condición necesaria y suficiente en la recta acabada, para que exista el límite de la aplicación dirigida es que el límite superior y el inferior coincidan.

En el caso de que l fuera $+\infty \Rightarrow l = L = c = +\infty \wedge$

cuando $L = -\infty \Rightarrow l = L = c = -\infty$

CRITERIO GENERAL DE CONVERGENCIA DE CAUCHY.

Vamos a ver que $\exists \lim_{\alpha \rightarrow} u_\alpha = c \in R \text{ ó } C$ finito cuando y sólo cuando se verifique el criterio de convergencia:

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \alpha_0(\varepsilon) \in D \exists \alpha', \alpha'' > \alpha_0 \Rightarrow |u_{\alpha'} - u_{\alpha''}| < \varepsilon$$

La condición necesaria es la más sencilla; la idea es la misma que para las sucesiones.

$\exists c = \lim_{\alpha \rightarrow} u_\alpha \in R \text{ ó } C$; que exista c significa que:

$$\begin{aligned} \exists \alpha_0(\varepsilon) \in D \exists \alpha', \alpha'' > \alpha_0 \Rightarrow |u_{\alpha'} - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |u_{\alpha''} - c| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |u_{\alpha'} - \\ - u_{\alpha''}| &\leq |u_{\alpha'} - c| + |c - u_{\alpha''}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

En la suficiente veremos que si se cumple la condición, existe el c . Vamos a demostrar que existe un límite de oscilación y que cumple la condición de ser límite (o sea, que es único).

$$\text{Hip.} \Rightarrow \forall \varepsilon \Rightarrow \alpha_0(\varepsilon) \in D \exists \alpha' > \alpha_0 \wedge \alpha'' > \alpha_0 \Rightarrow |u_{\alpha'} - u_{\alpha''}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

si como α'' fijo, por ejemplo igual a α_0 será:

$$\alpha'' = \alpha_0 \Rightarrow \forall \alpha' > \alpha_0 \Rightarrow |u_{\alpha'} - u_{\alpha_0}| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |u_{\alpha'}| \leq |u_{\alpha_0}| + \frac{\varepsilon}{2} \text{ o sea}$$

que los u_α están acotados; luego por dicotomía $\Rightarrow$ existe un límite de oscilaciones que llamo c , dentro del círculo de radio $|u_{\alpha_0}| + \varepsilon/2$.

Vamos a ver finalmente que c cumple la condición de ser límite: Aplicando por una parte la definición de que sea límite de oscilación, o sea que hay alguna α' para la que $u_{\alpha'}$ esté en el entorno de c y otra parte, de

que para todo α', α'' los $u_{\alpha'}, u_{\alpha''}$ difieren en tan poco como se quiera, voy a demostrar que cumple la condición de límite. En efecto, que sea límite de oscilación finito $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \wedge \forall \beta \in D \Rightarrow \exists \alpha' > \beta \ni |u_{\alpha'} - c| < \varepsilon/2 \wedge \forall \alpha'' > \beta = \alpha_0$, esto es, tomando β como α_0 va a ocurrir que $\Rightarrow |u_{\alpha''} - c| \leq |u_{\alpha'} - c| + |u_{\alpha'} - c| < \varepsilon$ que por la hipótesis se cumple $\forall \alpha''$ lo que significa que c es límite.

APLICACIONES DIRIGIDAS MONOTONAS.

Las aplicaciones dirigidas monótonas, al igual que ocurría con las sucesiones monótonas, tendrán siempre límite, que coincide con el supremo en las crecientes y con el ínfimo en las decrecientes. Vamos a demostrarlo viendo que el límite superior de oscilación y el inferior coinciden.

Que sea una aplicación dirigida monótona significa:

$\alpha > \beta \Rightarrow u_{\alpha} \geq u_{\beta}$ si es creciente. En cambio si es decreciente será $u_{\alpha} \leq u_{\beta}$.

Teorema: Para una aplicación creciente se cumple:

$$\exists c = \lim_{\alpha} u_{\alpha} = \sup_{\alpha} u_{\alpha} \in \bar{\mathbb{R}} \quad (\text{acaso sea } +\infty)$$

El caso de que sea $-\infty$, por ser creciente es mínimo, porque es el caso de que siendo creciente todos los elementos u_{α} fueran $-\infty$.

Demostración:

$$i_{\beta} = \inf_{\alpha > \beta} u_{\alpha} \wedge u_{\alpha} \geq u_{\beta} \Rightarrow \text{siendo } u_{\beta} \text{ una cota inferior de todos los } (I_2)$$

u_{α} , por ser creciente la aplicación dirigida, el ínfimo que es cota inferior máxima (o sea por la condición I_2) ocurrirá:

$$i_{\beta} \geq u_{\beta} \Rightarrow l = \sup_{\beta} i_{\beta} \geq \sup_{\beta} u_{\beta} \geq L \geq l \Rightarrow L = l = c = \lim_{\alpha} u_{\alpha} = \sup_{\beta} u_{\beta}$$

pues como el supremo de las u_{β} está entre L y l , si todo esto coincide, será igual al supremo de u_{β} .

Lo mismo tendríamos para una aplicación dirigida decreciente;

$$\exists c = \lim_{\alpha} u_{\alpha} = \inf_{\alpha} u_{\alpha} \in \bar{\mathbb{R}} \quad \text{en que acaso puede ser } -\infty.$$

Corolario: Funciones monótonas de una variable $\Rightarrow$ existen límites laterales en cada punto.

Entonces va a ocurrir que es una función monótona creciente cuando:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow u(x_1) \geq u(x_2)$$

Es inmediato porque por ejemplo una función monótona creciente, cuando nos acercamos dirigimos la variable independiente, acercándonos por la derecha. Entonces tenemos una aplicación dirigida decreciente, luego tiene límite por la derecha que es el ínfimo de los valores de la función por la derecha. Lo mismo sería por la izquierda y entonces es creciente, y el límite es el supremo de los valores que toma la función por la izquierda.

Generalización de las propiedades de una sucesión contenida en otra:

Si una sucesión determinada tiene límite, una sucesión contenida en ésta tiene siempre límite y es el mismo dado. El recíproco no es cierto.

Introducimos el concepto de conjunto dirigido cofinal. Supongamos:

$D_f \subseteq D \ni \alpha \in D = \alpha' \in D_f \ni \alpha' > \alpha$ en el conjunto dirigido D . Entonces se introduce el orden dirigido subordinado en D_f , que es transitivo y también dirigido (pruébese).

Teorema: Si $\exists \lim_{\alpha} u_{\alpha} = c \in \bar{R} \text{ ó } \bar{C} \Rightarrow \exists \lim_{\alpha' \in D_f} u_{\alpha'} = c$
 pues por hipótesis: $\exists \alpha_0 \in D \ni \alpha > \alpha_0 \Rightarrow u_{\alpha} \in U_c \wedge \exists \alpha'_0 > \alpha_0 \ni \alpha'_0 \in D_f \Rightarrow \alpha' > \alpha'_0 > \alpha_0 \Rightarrow u_{\alpha'} \in U_c$ (c.q.d.)

En la lección siguiente veremos como se aplica esto a límites funcionales.
