28.- ESTRUCTURA Y POTENCIA DE UN CONJUNTO EN LOS ESPACIOS EUCLIDEOS.- Nº CARDINAL Y CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS.

El nº natural lo introdujimos anteriormente por los axiomas de Peano mediante el nº ordinal y lo podemos introducir también con el nº cardinal, y lo haremos en la siguiente forma:

Si dos conjuntos pueden ponerse en correspondencia biunívoca esto es (a cada elemento de un conjunto le corresponde uno y uno solo del otro y recíprocamente) $\langle = \rangle$ biyectiva $\langle = \rangle$ aplicación univalente esto es para dos distintos puntos le corresponden dos distintos valores y además es exhaustivista. Denominamos entonces a estos conjuntos coordinables y se suele designar por:

$$A \simeq B \; (\equiv)_{not} \; A \overline{\wedge} B \; (\equiv)_{not} \; A \longleftrightarrow B$$

Con la coordinación establecemos una relación entre los pares de los dos conjuntos del conjunto total que consideremos.

Esta relación es <u>reflexiva</u>: Cada conjunto es coordinable consigo mismo, basta hacerle corresponder a cada elemento el mismo.

Es <u>simétrica</u>: por serlo la correspondencia biunívoca. Si A es coordinable con B, es B coordinable con A.

Es <u>transitiva</u>: Si A es coordinable con B mediante la aplicación f y B es coordinable con C mediante la aplicación g. Mediante la aplicación sucesiva compuesta por f y g A será coordinable con C.

Por lo tanto es una <u>relación de equivalencia</u>, abstraemos de los conjuntos coordinables lo que tienen de común y esto es la <u>clase de equivalencia</u>, que es lo que denominaremos nº cardinal, queda así definido por abstracción el nº cardinal

$$A \simeq B \; (\equiv)_{def} \; n(A) = n(B) \text{. A y B tienen la misma potencia}$$

<u>Sección S_n de N es</u>: $S_n = \left\{ x \in N \ni x \leq n \right\}$, por lo que es un subconjunto $S_n \subseteq N$.

<u>Conjunto finito.</u> $A (\equiv)_{def}$. Si $\left(\exists\, n \in N \ni A \simeq S_n \right) \vee (A = \emptyset)$ consideramos aquí que el conjunto vacío también es finito. Así si A es finito no vacío es lo mismo que decir que se pueden contar sus elementos

$$A = \left\{ a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots, a_n \right\}$$

<u>Conjunto infinito</u> $(\equiv)_{def}$ es el conjunto no finito.

Todo conjunto B incluído en un conjunto finito A es finito.

$$(A \simeq S_n) \wedge (\emptyset \subset B \subseteq A) \; :\Longrightarrow: \; (\exists\, m \in N \ni B \simeq S_m)$$

Si A es finito no vacío y tampoco es vacío un conjunto contenido en A existe un m perteneciente a los núms. naturales tal que B es coordinable con S_m. Se demuestra por inducción respecto de n.

<u>Teorema fundamental de los conjuntos finitos.-</u>

Si un conjunto es finito y es parte propia de otro no puede ser coordinable con este otro.

$$(A \simeq S_n) \wedge (A \subset B) \; :\Longrightarrow: \; A \not\simeq B$$

Se demuestra esto por inducción reductiva al absurdo respecto a n (ver demostración en Análisis Matemático Rey Pastor, Pi Calleja, Trejo 1er.Volumen).

El corolario del teorema anterior es el teorema de Dedekind.

Si un conjunto es finito y tenemos otro conjunto contenido en él éste no es coordinable con ninguna de sus partes.

$$(A \simeq S_n) \wedge (C \subsetneq A) :\Rightarrow: A \not\simeq C$$

Se demuestra esto porque C incluído en un conjunto finito es también finito y basta aplicar el teorema fundamental.

Para conjuntos infinitos el corolario no se cumple. Así por ejemplo, sean las sucesiones 1,2,3,4 de los nº naturales y 2,4,6,8... de los nº pares.

Cada nº par está en correspondencia biunívoca con los nº naturales $2n \longleftrightarrow n$ y sin embargo 2,4,6,8... es parte propia de 1,2,3,4,5... Esto ocurre porque son conjuntos infinitos.

La sucesión N es infinita, pues $S_n \simeq S_n$ lo cual significa que S_n es finita $\wedge$ $S_n \subset N$ (por el teorema que dice: que a cada nº natural le sigue otro distinto que los anteriores) y por el teorema fundamental esto $\Rightarrow \forall n$ es $S_n \not\simeq N$ lo cual indica que el conjunto N es no finito c.q.d.

Teorema de invariancia del nº ordinal.-

$(A \simeq S_n) \wedge (A \simeq S_m) \wedge (n < m) \Rightarrow$ (Por la propiedad transitiva en la coordinación) $\Rightarrow S_n \simeq S_m \wedge S_n \subset S_m$ lo cual es absurdo por el teorema fundamental.

Si A fuera coordinable con dos secciones distintas de la sucesión numérica natural S_n y S_m serían coordinables junto con que $n < m$ lo cual es absurdo.

Por tanto el número ordinal de los conjuntos finitos caracteriza precisamente su nº cardinal

$$(A \simeq S_m) \wedge (A \simeq B) \Rightarrow n(A) = n(B) = n(S_m) = m$$

CONJUNTOS NUMERABLES. EL CONTINUO.- Los conjuntos numerables los clasificaremos en:

- finitos
- infinito-numerables

$M \simeq N$, de modo que $n(M)$ es el número cardinal de la sucesión numérica natural $n(N) = \alpha_0 = \aleph_0$ (llamado así por G. Cantor, 1ª letra hebreo alef sub cero).

Mediante el axioma de Zermelo se demuestra que todo conjunto infinito contiene siempre un conjunto numerable.

Teorema:

$$\nexists n \ni S_n \simeq A \supset \emptyset :\Rightarrow: \exists M \subseteq A \ni M \simeq N$$

Se comprende esto, pues siendo el conjunto A infinito, se puede sacar un elemento y lo que queda es infinito, porque si fuera finito también lo será el total y así podemos sacar, elemento por elemento, indefinidamente, y lo que sacamos es una sucesión numerable de elementos. ¿Pero los elementos que sacamos dependen de los ya sacados? Esto es la parte discutible del razonamiento.

Teorema.- Todo conjunto infinito contiene un conjunto parcial coordinable con él, numerable o no. Este teorema es el contrario del de Dedekind $\Longleftrightarrow$ al recíproco de éste. Pues en esta forma caracterizó los conjuntos finitos como los no coordinables con ninguna de sus partes.

El teorema dice:

Si $(\forall n \in N \Rightarrow S_n \not\simeq A \supset \emptyset) : \Rightarrow : \exists\ A_p$ (parte propor. de $A \supset A_p) \ni A_p \simeq A)$.

Demostración: El conjunto de los núms. pares que está incluído propiamente en los naturales es tal que:

$$P\ \{2,4,6\ldots\ldots\} \subset N\ \{1,2,3,\ldots\ldots\ldots\} \ni P \underset{g}{\overset{\sim}{-}} N \ni 2n \longleftrightarrow n \wedge$$

$$\exists\ M \subseteq A \ni M \underset{f}{\overset{\sim}{-}} N \wedge B = A - M \quad \text{(caso } \emptyset \text{ o no numerable)}$$

$$P \underset{f^{-1}}{\overset{\sim}{\longrightarrow}} M_p \ \text{(elementos que corresponden a núms. pares)} \subset M \underset{f}{\overset{\sim}{-}} N \wedge$$

$$P \underset{g}{\overset{\sim}{-}} N \Rightarrow M_p \underset{f^{-1}\,g f}{\overset{\sim}{\longrightarrow}} M \Rightarrow A_p = M_p \cup B \subset A = M \cup B \wedge A_p \simeq A$$

queda demostrado así que todo conjunto infinito es coordinable con alguna de sus partes propias.

Si A es infinito por def su nº cardinal n(A) se llama trasfinito. Como todo conjunto infinito contiene un conjunto numerable resulta que el primer nº trasfinito es el alef sub cero $\aleph_0$.

Los conjuntos numerables no son conjuntos como por ejemplo: El conjunto Q tiene como número cardinal $n(Q) = \alpha_0 \Longleftrightarrow Q \simeq N$ o sea es numerable.

Ejemplo, tomemos el conjunto de los racionales positivos y ordenémoslos en la siguiente forma.

$$\left\{\begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \end{array}\right.$$

METODO DIAGONAL

Tenemos así escritos con entrada doblemente infinita todos los racionales positivos. Para ponerlos en sucesión basta tomarlos en la ordenación llamada diagonal que es numerable.

Con los núms. negativos y el nulo, tomaremos primero el cero y luego uno positivo y otro negativo etc. etc. y así los tenemos ya ordenados en una sucesión numerable.

Así Q es numerable por el método diagonal.

Hay conjuntos que no son numerables, por ejemplo:

El nº cardinal de los núms. reales es el contínuo

$n(R) = C$ potencia del contínuo

Demostración: Si demostramos que el conjunto (0;1) no es numerable, menos lo será el total R.

Expresemos un nº real con una fracción decimal que no tenga todo ceros.

$$\left.\begin{array}{l} 0,75000 \\ 0,74999 \end{array}\right\} \text{Representan el mismo nº real}$$

O sea cada nº real tendrá una expresión decimal indefinida del siguiente tipo.

$$x_1 = 0,g_{11}\ g_{12}\ g_{13}\ \cdots\cdots$$
$$x_2 = 0,g_{21}\ g_{22}\ g_{33}\ \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = 0,g_{n1}\ g_{n2}\ \cdots\cdots\ g_{nn}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Vamos a demostrar que es un absurdo suponer que todos los núms. reales entre 0 y 1 pueden ponerse en sucesión de esta forma pues:

Siempre podemos hallar un nº real x que está entre 0 y 1 y no coincide con ninguno de la sucesión; basta tomar:

$$x = 0,\ g_1\ g_2 \text{ --- } g_n \text{ --- } \ni g_1 \neq g_{11} \wedge g_2 \neq g_{22} \wedge \text{---} \wedge g_n \neq g_{nn}$$

$\wedge$ de modo que $g_n \neq 0 \vee q$ para todo n.

El nº que tenemos es distinto de todos ellos, pues difiere del 1º en la primera cifra decimal del 2º en la segunda cifra decimal y del enésimo en la enésima cifra decimal y es un nº distinto de todos los de la sucesión; esto prueba que $R \not\simeq N$.

¿Existirá entre el nº cardinal de los numerables y de los núms. reales algún nº cardinal intermedio de manera que comprendan un conjunto numerable y esta contenido en la potencia del contínuo sin que coincida con él? Negar esta existencia es la hipótesis del contínuo y se desconoce su demostración.

Hipótesis del contínuo.- Dice: Todo conjunto infinito no numerable contendrá un conjunto con la potencia del contínuo.

$$(\emptyset \subset A \not\simeq S_n) \wedge (A \not\simeq N) : \Longrightarrow \exists B \subseteq A \ni B \simeq R$$

Esto es equivalente a decir:

Que un conjunto incluído en los núms. reales es o bien finito o numerable o tiene la potencia del contínuo.

$$\emptyset \subset C \subseteq R : \Longrightarrow (C \simeq S_n) \vee (C \simeq N) \vee (C \simeq R)$$

No quiere decir esto que no existan otras potencias distintas de las del contínuo y numerables, pues pueden existir.

El conjunto de todas las funciones de variable real es un conjunto de potencia superior al contínuo que no será coordinable con él y que incluye al anterior.

PRINCIPIO DE ENCAJE EN LOS ESPACIOS EUCLIDEOS.

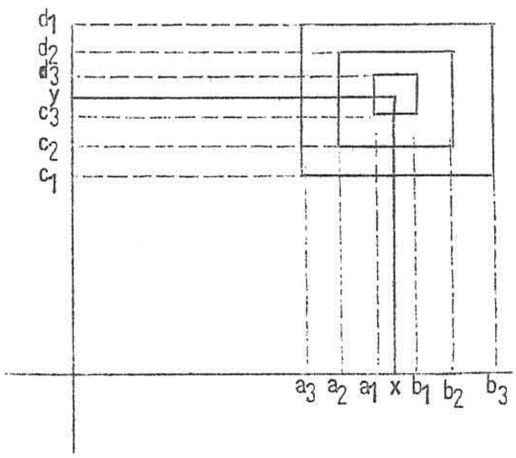
Si tenemos una sucesión de intervalos cerrados (ortoedros de n dimensiones) encajados de manera que su diagonal (diámetro) tienda a cero, entonces existe un único punto $\overline{x}$ que pertenece a $\overline{I}_m \ni \overline{x}$ es la intersección de todos los $\overline{I}_m$ desde 1 a ∞.

$$\text{Sea } \overline{I}_1 \supseteq \overline{I}_2 \supseteq \ldots\ldots \overline{I}_m \supseteq \ldots\ldots \ni d(\overline{I}_m) \to 0 \;:\Rightarrow:$$

$$\exists \; \overline{x} \in \overline{I}_m \; (m = 1, 2, \ldots\ldots) \ni \; \overline{x} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{I}_m$$

Para una dimensión es el postulado de Cantor en la recta según ya vimos en la introducción del nº real.

En dos dimensiones tendríamos proyectando sobre los ejes:



Son intervalos encajados y en proyección sobre el eje x, va a ocurrir,

$$a_1, b_1 \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots\ldots \supseteq [a_m, b_m] \ni b_m - a_m \to 0$$

Este par de sucesiones definen un nº real único $\underline{x}$, y del mismo modo en el eje $\underline{y}$.

Este teorema puede ser falso para intervalos abiertos. Por ejemplo sean los cuadrados

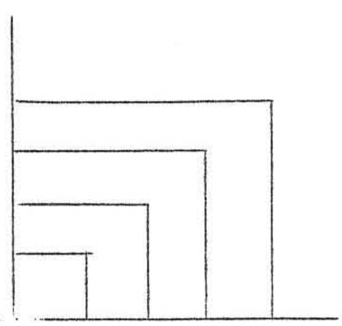
$$0 < x < \frac{1}{2^m} \;\wedge\; 0 < y < \frac{1}{2^m}, \quad m(1, 2, 3\ldots),$$

cuyas clausuras determinan el 0 (0,0), pero el cual por hipótesis no pertenece a ninguno de ellos.

<u>Conjuntos acotados.</u>

Si $\exists K \ni \forall \overline{x} \in X \Rightarrow |\overline{x}| < K$,

entonces X es acotado.



Existe una hiperesfera suficientemente grande de modo que todo punto esté dentro de ella y entonces diremos que el conjunto es acotado.

<u>TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL ANALISIS.</u>

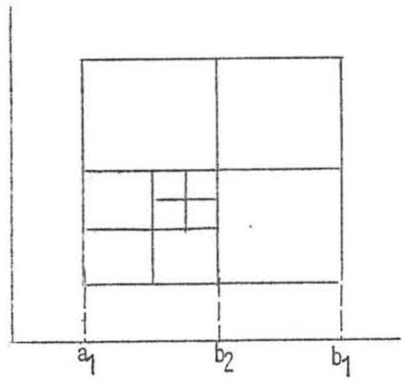
<u>TEOREMAS DE BOLZANO-WEIERSTRASS Y DE BOREL. COMPACIDAD. LA RECTA ACABADA.</u>

Todo conjunto acotado de infinitos puntos tiene un punto de acumulación que puede o no pertenecer al conjunto.

Puede formularse también, diciendo que: Si X es acotado y su conjunto derivado es vacío su nº cardinal pertenece al conjunto de los naturales.

$$\text{Si } X \text{ acotado } \wedge X' = \emptyset \implies n(X) \in N$$

Se demuestra por dicotomía eligiendo el intervalo que contiene infinitos puntos de X.



Si es acotado se puede encerrar en un cierto cuadrado suficientemente grande y entonces en este cuadrado están todos los puntos de X. Lo subdividiremos en $4 = 2^2$ partes iguales, que sean también cuadrados cerrados para poder aplicar el principio de encaje.

Si en cada uno de los cuatro hubiere sólo un número finito de puntos de X, éste no tendría infinitos puntos, así pues en alguno de ellos habrá un nº infinito y si hubiere más de uno elegiremos el de la izquierda y el de abajo y éste lo subdividimos y así sucesivamente, de modo que en cada cuadrado habrá infinitos puntos y por el principio de encaje va a resultar que en cada proyección:

$$[a_1,b_1] \supseteq [a_1,b_2] \supseteq \ldots\ldots \supseteq [a_m,b_m] \supseteq \ni b_m - a_m = \frac{b_1 - a_1}{2^m} \to 0$$

Son dos sucesiones monótonas convergentes que definen un número, coordenada de un punto de acumulación del conjunto X, porque en todo entorno de él habrá uno de estos cuadrados que contiene infinitos puntos de X.

Esto que es cierto para los conjuntos acotados puede no ser cierto para los no acotados.

Por ejemplo para el N. Pues es un conjunto de infinitos puntos sin ningún nº real En E, que sea punto de acumulación, todos sus puntos son aislados en la recta.

<u>Teorema de Borel</u>

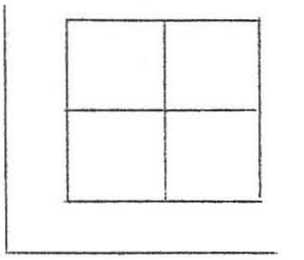
Dado un conjunto cerrado y acotado F en E_n, si lo cubrimos mediante entornos abiertos (hacemos corresponder a cada uno de los puntos del conjunto un entorno que lo cubra) basta entonces un nº finito de estos entornos para cubrir dicho conjunto.

$$F \text{ cerrado y acotado en } E_n \wedge \forall \bar{x} \in F \implies (\exists\, U_{\bar{x}} \ni \bar{x} \in U_{\bar{x}}) :\implies:$$

$$\exists m \in N \ni F \subseteq U_{\bar{x}_1} \cup \ldots\ldots \cup U_{\bar{x}_m}$$

Se demuestra por reducción al absurdo si es falso por encaje (razonamiento análogo al de Bolzano).

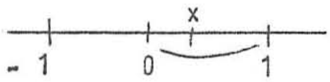
Si el teorema es falso para F también lo es para cada una de las 4 partes subdividiendo sucesivamente obtenemos así un punto de acumulación y como F es cerrado, pertenecerá al conjunto y en él le corresponderá un cierto entorno que cubra el punto.



Y por ser abierto habrá uno de esos cuadraditos en que el teorema es falso, y estos cuadrados estarán dentro de un solo entorno, en contra de la supuesta falsedad del teorema.

Falso si son cerrados los entornos $\overline{U}_x$ del cubrimiento, por ejemplo, [0,1] y hacemos el siguiente cubrimiento.

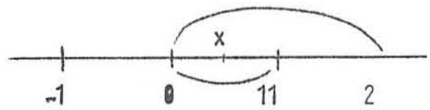
$$\begin{cases} \overline{U}_x = \left[\dfrac{x}{2} ; 1 \right] & \text{si } x > 0 \\ \overline{U}_0 = [-1,0] & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



No nos basta un nº finito de estos intervalos para cubrirlo todo, pues habrá x suficientemente próximos al cero que no quedarán cubiertos por el nº finito que tomemos.

Así también es falso si el conjunto no es cerrado. Por ejemplo, sea el conjunto [0; 1].

$$\mathcal{U}_x = \left(\frac{x}{2} ; 2 \right)$$



Ningún nº finito de estos entornos podrán cubrir a (0; 1], pues el 0 no pertenece al conjunto. Si lo incluyéramos su entorno posibilitaría el cubrimiento finito.

Se enuncia el teorema de Borel diciendo que todo cubrimiento abierto de F acotado y cerrado tiene un subcubrimiento finito.

El cubrimiento abierto de X es una familia de abiertos.

$$\left\{ G \right\} \ni \forall \overline{x} \in X \Rightarrow \exists \; G \in \left\{ G \right\} \Rightarrow \overline{x} \in G$$

tenemos así un cubrimiento de conjuntos abiertos.

Un subcubrimiento es una familia parcial de éstos que también es cubrimiento.

Cubrimiento finito, que el nº de elementos de la familia es finito el nº de G es finito.

Compacidad.- X será compacto si todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento finito.

El espacio euclídeo E_n no es compacto, tampoco lo es la recta real.

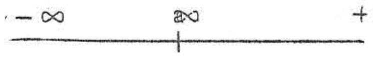
Si F es cerrado y acotado $\Rightarrow$ F es compacto (teorema de Borel).

Los espacios donde se verifica el Teorema de Borel se denominan compactos.

Para hacer compacta la recta le agregaremos dos puntos, el $+\infty$ y el $-\infty$ y tendremos así la recta acabada; esto fué introducido por H. Hahn y la recta real que resulte se llama recta acabada por Bourbaki.

$R \rightarrow \overline{R}$. La recta acabada está definida por el conjunto siguiente

$$\overline{R} = \left\{ -\infty, \; a \in R, \; +\infty \right\} \ni a \in R \Rightarrow -\infty < a < +\infty \;\wedge\; -(+\infty) = -\infty \;\wedge$$



$-(-\infty) = +\infty \wedge |-\infty| = |+\infty| = +\infty$

Cumple todas las operaciones y sigue todas las leyes que corresponden a los resultados conocidos sobre el cálculo de límites infinitos.

La operación de sumar es conmutativa:

$a + (+\infty) = +\infty \wedge a + (-\infty) = -\infty \wedge (+\infty) + (+\infty) = +\infty \wedge (-\infty) + (-\infty) = -\infty$

La sustracción se da por la ley de inversión. Pero sin sentido en algunas operaciones, por ejemplo $(+\infty) - (+\infty) \wedge (+\infty) + (-\infty)$ y por lo tanto no forma grupo aditivo.

El producto también es conmutativo:

Si $a > 0$

$a(+\infty) = (-a)(-\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty \wedge$

$(-a)(+\infty) = (a)(-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$

No tienen sentido los productos

$0(+\infty) \wedge 0(-\infty)$

La división por la operación inversa $\wedge \dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

Sin sentido el divisor nulo $\wedge \dfrac{+\infty}{+\infty}, \dfrac{+\infty}{-\infty}, \dfrac{-\infty}{+\infty} \wedge \dfrac{-\infty}{-\infty}$

El entorno de $+\infty$ abierto será el fijado por un nº real cualquiera. Todos los que quedan a la derecha de <u>a</u> serán el entorno de $+\infty$ Sea el conjunto de núms. reales tales que $x > a$ análogamente el de $-\infty$.

$$\mu_{+\infty} = \{ x \in R \ni x > a \}$$

$\overline{U}_{-\infty} - \infty = \{ x \in R \ni x \leq b \wedge x = -\infty \}$ Entorno cerrado de $+\infty$

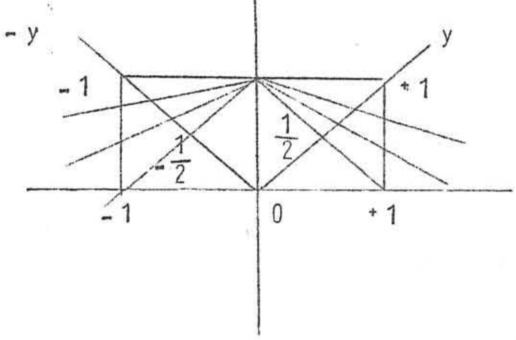
La métrica y topología de $\overline{R}$ puede referirse a.. la del segmento $[-1; 1]$ mediante la siguiente correspondencia.

$$y(x) = \frac{x}{1 + |x|} \left\{ \begin{array}{l} -\infty < x < +\infty \\ -1 < y < |x| \\ y(+\infty) \to 1 \wedge y(-\infty) \to -1 \end{array} \right.$$

Para $x = 1$ es $y = \dfrac{1}{2}$ y el

$+\infty$ se proyecta sobre el $+1$.

Es equivalente a tomar la operación inversa despejando la x.

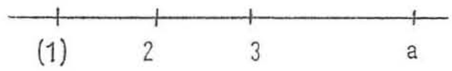


$$x(y) = \frac{y}{1 - |y|} \qquad \begin{cases} -1 < y < +1 \\ -\infty < x < +\infty \\ x(-1) = -\infty \wedge x(+1) = +\infty \end{cases}$$

Entonces la recta acabada $\overline{R}$ y completa es compacta y Borel dice que $\forall$ F cerrado $\Longrightarrow$ compacto.

Si consideramos N que es cerrado en R y no compacto. El N ya no es cerrado en $\overline{R}$, pero si le agregamos el punto impropio $+\infty$ lo tendremos compactificado y se cumple el T. de Borel por ser cerrado.

Podemos compactificar el plano complejo C, se asimila el infinito a un punto el plano tiene como imagen estereografia una superficie esférica de Riemann.



RECINTO: ORDEN DE CONEXION.

Un conjunto es conexo cuando y solo cuando dos puntos cualesquiera de él se pueden unir mediante una quebrada que podemos suponer de un nº finito de lados tales que pertenezcan toda la quebrada a él.

X conexa si $\forall$ $(\overline{a}, \overline{b}) \in X \times X \Longrightarrow \exists$ quebrada finito nº de lados que une A y B tal que la quebrada toda ella pertenece a X.

Ejemplo. Si tenemos dos círculos tg. Si los círculos son abiertos (sin sus contornos) no es conexo. Si uno o los dos círculos son cerrados es ya conexo.

Recinto. Es un conjunto abierto y conexo $D = D^{o}$ coincide D con su interior.

En algunos libros se hace la siguiente notación:

Al agregar al recinto los puntos frontera tenemos el dominio. O Recinto cerrado $\overline{D} = D \cup D' = D \cup \text{fr } D$.

Si un intervalo es abierto es un recinto y si es un intervalo cerrado (con su contorno) es un recinto cerrado.

Si al X se le añaden solo parte de sus puntos frontera se denomina región. La región se forma al agregar a un recinto parte de sus puntos frontera.

$$D \cup F \ni F \subseteq \text{frontera } D$$

Arco simple de Jordan:

Son el conjunto de puntos del espacio que están en correspondencia biunívoca y contínua con los puntos de un segmento.

$$X = \overline{x}(t) \ni t_0 \leq t \leq t_1 \quad \text{biunívoca y contínua}$$

Las componentes de esta función vectorial forman funciones contínuas y a 2 distintos ξ corresponden 2 distintos x.

La unión de varios arcos de Jordan le denominaremos curva de Jordan.

Corte de un recinto.

Es la exclusión de un arco simple de Jordan.

Los puntos frontera que pueden ser extremos de un corte se llaman accesibles y los otros son inaccesibles.

Ejemplo:

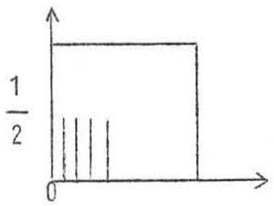
Supongamos el siguiente recinto.

$$D = \left\{ (x,y) \ni 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1 \right\} \text{ (excluímos los siguientes segmentos)}$$

$$\left\{ x = \frac{1}{2^m} \wedge 0 < y < \frac{1}{2} \ni m = 1,2,3,\ldots\ldots \right\}$$

Los puntos frontera son accesibles, excepto los que corresponden a $x = 0$, $0 \leq y < 1/2$ que son inaccesibles, aun siendo puntos frontera, pues cualquiera que sea la curva de Jordan que los tenga por extremo siempre será cortada por uno de los puntos frontera.

El contorno de un recinto está formado por los puntos frontera accesibles desde el exterior.

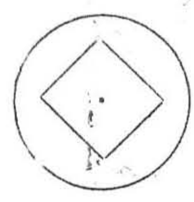


Recinto simplemente conexo.-

Supongamos un espacio $E_2 \vee \overline{C}$.

Podemos ahora introducir el orden de conexión. Diremos que un conjunto es simplemente conexo, si siendo conexo ocurre que toda quebrada cerrada de lados pertenecientes al conjunto $\Longrightarrow$ encierra sólo puntos pertenecientes al conjunto

Un recinto doblemente conexo es aquel que por un corte se puede hacer simplemente conexo.



No cumple

Como por ejemplo:

Simplemente conexo

Un recinto será de orden n de conexión si con n-1 cortes lo hacemos simplemente conexo.

Contínuo es un conjunto compacto conexo y no vacío. Por ejemplo un punto.

El orden de conexión de un recintos acotado es el nº de componentes contínuas que tiene su frontera. Esto será cierto para recintos acotados o para $\overline{C}$ compacto. Por ejemplo, el recinto

$$\left\{ y^2 < 1-x \right\} - \left\{ y = 0 \wedge x < 0 \right\}$$

Tenemos un recinto que es simplemente conexo.

Parece que tiene dos contínuos de frontera pero en $\overline{C}$ es uno solo, porque se unen en el punto impropio del plano complejo el semieje negativo y la parábola.