31.- LIMITES FUNCIONALES. CONTINUIDAD.

CONCEPTO DE FUNCION DE UNA Y DE VARIAS VARIABLES.

REPRESENTACION GRAFICA, CURVAS Y SUPERFICIES DE NIVEL.

El concepto de función que se admite es el de aplicación de un conjunto (campo de definición) en otro conjunto (campo funcional).

O sea para dar una función lo primero que hay que dar es el conjunto D de definición o de existencia que también se llama de variables independientes.

Así obtenemos el F que es el conjunto de valores funcionales. Solo estudiaremos el caso en que el conjunto de valores funcionales sea el conjunto de números que en general pertenezcan a la recta acabada.

Es esencial decir a que campo nos referimos. Por ejemplo n! tiene sentido en el campo natural y también se ha extendido al cero $0! = 1$; en cambio $\pi!$ se obtiene solo cuando dicha función se ha interpolado o se ha prolongado al campo no tan sólo real sino complejo mediante la función $\Gamma(x)$, tal que resulta $\Gamma(x) = (x-1)!$ si $x \in N$.

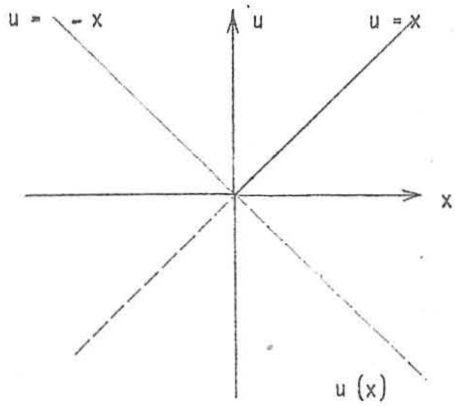
Igualmente hemos visto la función exponencial en que hemos definido la potencia de base por ejemplo e y exponente real y luego hemos prolongado al campo complejo la función exponencial.

Lo que importa es la correspondencia en sí y no la expresión que la misma pueda tener. Veamos ejemplos de funciones de una sola variable:

. Supongamos que tenemos $x \in R$. Una función muy importante es el valor absoluto de x: se puede representar de varias maneras.

$$u = |x| = +\sqrt{x^2} = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

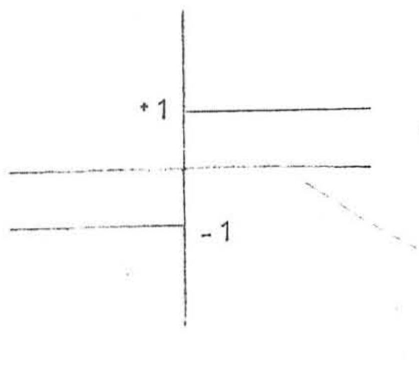
Para Euler esto estaba formado por dos trozos de funciones distintas: La parte de arriba de la recta $u = x$, y la de arriba de $u = -x$ (s. figura).



Una función muy importante es la de signo de x o función salto que es:

$$u: \text{sg } x = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

cuya gráfica es:



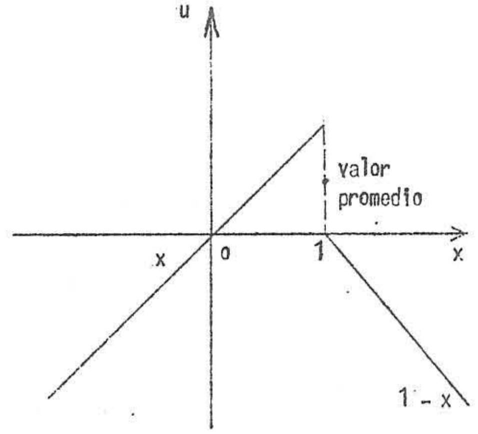
Lo que define el signo es la correspondencia en sí y no la manera de expresarla, pues hay varias maneras de representar la función:

$$u = \frac{2}{\pi} \lim_{n \to \infty} \text{Arc tg } nx$$

Esto es una expresión de la correspondencia indicada que no es la única, pues podría ser por ejemplo:

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2n+1]{x}$$

Esta función tiene muchas aplicaciones como por ejemplo dar $x = |x|\, sg\, x \ \wedge\ |x| = x\, sg\, x$, o para empalmar funciones en la siguiente forma. Si tenemos para $x < x_o$ una función cualquiera $g(x)$ y después del valor x_o otra función $f(x)$ y en el punto x_o el promedio de las dos, entonces resulta ser:



$$u(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x)\right] + sg(x - x_o)\,\frac{1}{2}\left[f(x) - g(x)\right] =$$

$$= \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x < x_o \\ \frac{1}{2}(f + g) & \text{si} \quad x = x_o \\ f(x) & \text{si} \quad x > x_o \end{cases}$$

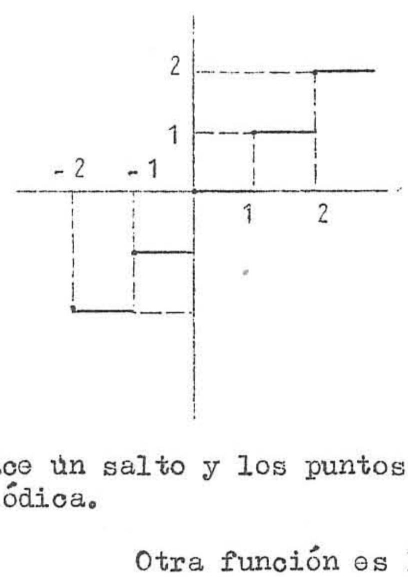
Así por ejemplo puede tomarse $x_o = 1$, para $g(x) = x$ y para $f(x) = 1 - x$; entonces esta expresión u vendrá dada por:

$$u = \frac{1}{2} + sg\,(x - 1)\,.\,\frac{1 - 2x}{2}$$

Otra función importante es la parte entera a que en los logaritmos se llama característica y es el número entero que queda a la izquierda, por ejemplo es -2 la parte entera de $\bar{2},371\ldots = -2 + 0,371\ldots$ Se llama parte entera a:

$$E(x) = [\,x\,] \leq x < [x] + 1 \in Z$$

La gráfica de esta función es:



A esta función se le llama también función escalón o función taxi. La parte entera de 1 es 1; el valor de la función parte entera entre 1 y 2 es 1 y al pasar al 2 hace un salto.

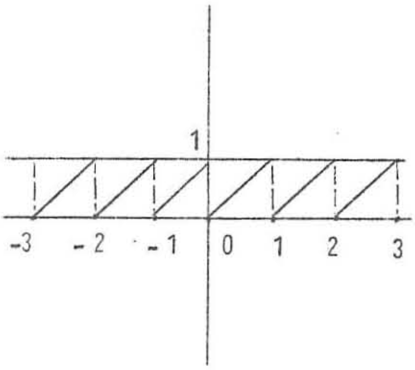
La función mantisa $M(x)$ que es la función (sobrante = mantisa en griego)

$$0 \leq M(x) = x - [\,x\,] < 1$$

su gráfica es: (ver pág. siguiente).

Al pasar de 0 a 1, cuando llega a 1 hace un salto y los puntos de salto se dan precisamente en $x \in Z$; es función periódica.

Otra función es la de Dirichlet.



$$u = f(x) = \begin{cases} +1 \text{ si } x = x_r & \text{racional} \\ 0 \text{ si } x = x_i & \text{irracional} \end{cases}$$

queda caracterizada por esta correspondencia. También existen varias representaciones, tal la

$$u = f(x) = \lim_{m \to \infty} \left[\lim_{n \to \infty} (\cos m!\, \pi\, x)^{2n} \right]$$

Es fácil ver que vale 0 cuando x irracional y 1 cuando x racional: en efecto supongamos que x sea racional: será de la forma,

$$x = \frac{p}{q} \wedge m > q$$

entonces $m!\,\pi\, x$, como $m!$ supera a q, $m!\,x$ se convierte en entero, y queda un número entero de π. Y el coseno de un número entero de π vale +1 ó -1 que elevado a 2n par es +1 y el límite vale +1. Cuando x irracional cualquier valor de $m!$ nunca será $m!\,x$ un número entero pues sería x racional o sea $m!\,x$ siempre será un número no entero que multiplicado por π dará un coseno que será en valor absoluto menor que 1 y las potencias sucesivas tendrán límite cero.

Representación gráfica y curvas de nivel de funciones de varias variables.-

Vamos a ver primero las notaciones:

Una función de varias variables será una aplicación de R^2 en $\overline{R}$ o bien de R^n en $\overline{R}$, función real, y también pueden darse en C (función compleja).

La misma correspondencia cuando la estudiamos en un campo nos da el campo en que tiene sentido esta correspondencia.

Ejemplo:

$$u^2 = x^2 + y^2 \; ; \qquad u = x - y \; ; \qquad u = x \cdot y \quad \text{definidas en } R^2 \text{ y } E_2$$

Otros casos puede ocurrir en el campo real. Así,

$$u = + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \in R$$

no de valores reales para todo $(x,y) \in E_2$ sino sólo para $x^2 + y^2 \leq 1$, mientras que

$$u = \ln (1 - x^2 - y^2) \in R \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 < 1$$

Nosotros vamos a representar las funciones de dos variables por $u = f(x,y)$. A veces, es cómodo emplear la misma letra para el valor funcional que para la característica.

$$u = f(x,y) = u(x,y) = u(x_1, x_2)$$

La u no es la misma; en un caso es un número y en el otro lo que hemos de hacer a las variables (x,y) para que nos dé la u. En tres variables será:

$$u = f(x,y,z) = u(x,y,z) = u(x_1, x_2, x_3)$$

y en n variables será:

$$u = u(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) = u(\overline{x}) \ni \overline{x} = (x_1 \ldots\ldots x_n) \in E_n$$

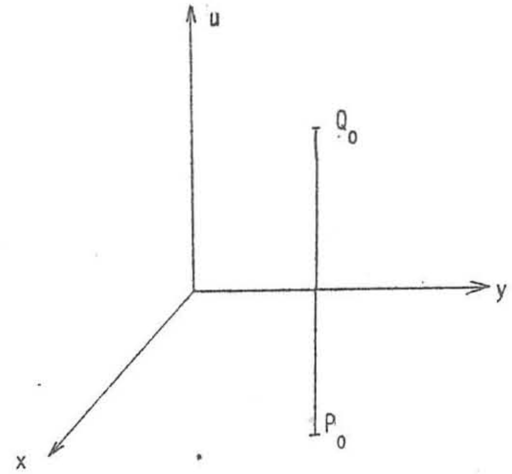
A veces para un punto determinado emplearemos,

$$\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$$

y también el punto $P_o = (x_o, y_o) \longrightarrow Q_o = (x_o, y_o; u_o)$

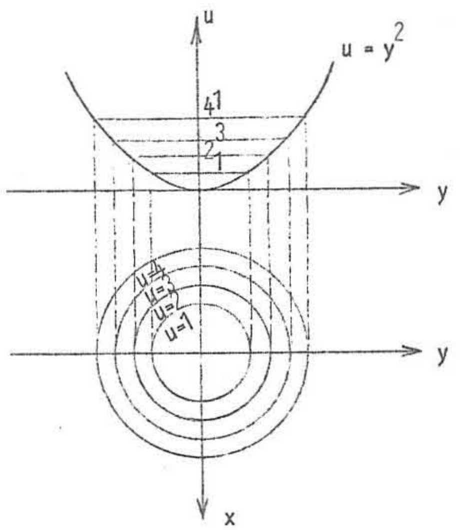
Representación gráfica. Curva y superficie de nivel.

Para cada punto P_o de x, y le hacemos corresponder un punto de coordenadas (x, y, u) es decir una columna que tiene por altura el valor de la función.



Otro método para representar geométricamente la función $u = f(x,y)$ consiste en usar las llamadas curvas de nivel en el plano x, y es decir las curvas $f(x,y) = $ cte. Estas curvas de nivel son las proyecciones sobre el plano x, y de las curvas en que la superficie $u = f(x,y)$ es cortada por los planos u = const.

Por ejemplo para $u = x^2 + y^2$ será en el espacio un paraboloide de revolución obtenido girando la parábola $u = y^2$ alrededor del eje u.

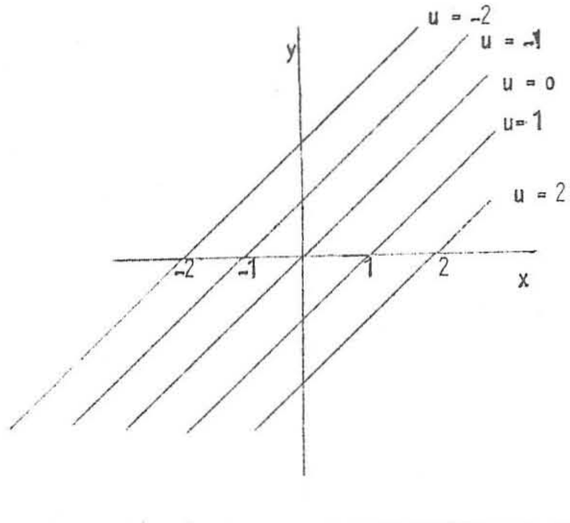


Las curvas de nivel son circunferencias concéntricas en el origen porqué es un paraboloide elíptico de revolución.

Entonces se da en la siguiente forma, dando la planta y el alzado:

Dando distintas alturas 1, 2, 3, 4, la sección permite obtener en planta las correspondientes curvas de nivel.

Veamos ahora $u = x - y$ representa un plano y sus curvas de nivel son.



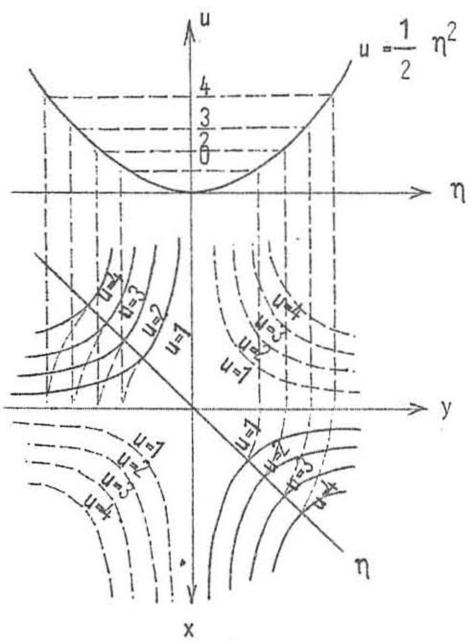
Esto es la representación de un plano: o sea que un plano tiene representado por rectas paralelas en las curvas de nivel.

La función $u = xy$ representada por un paraboloide tiene por curvas de nivel hipérbolas equiláteras referidas a sus asíntotas (silla de montar). Para el plano $u = 0$ tenemos el par de rectas x, y, para $u_o = xy$ tenemos las hipérbolas referidas a las asíntotas. Si cortamos por el plano $x = y$, abatiendo e introduciendo

$$x = y = \frac{\eta}{\sqrt{2}} \Longrightarrow u = \frac{1}{2}\ \eta^2$$

el alzado $u = \frac{1}{2}\ \eta^2$ nos permite trazar en planta las distintos curvas de nivel. Para la función de tres variables $f(x, y, z)$ necesitaríamos un espacio de cuatro dimensiones lo cual es imposible de representar; entonces se representa mediante las superficies de nivel, que a veces pueden ser muy sencillas.

La gráfica será:



$$u_o = \ln\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)$$

Esto es una superficie esférica.

$$1 > x^2 + y^2 + z^2 = 1 - e^{u_0} \geq 0$$

si $u_o \leq 0$.

Las superficies de nivel de esta función, son superficies esféricas cada vez de menor radio cuando u_o se acerca a cero negativamente. En cambio, cuando las superficies esféricas, todas ellas de radio menor que f se acercan a la de radio 1, el valor $u_o \rightarrow -\infty$.

<u>TIPOS ELEMENTALES DE FUNCIONES.</u>- Vamos a ver la nomenclatura de algunos tipos principales de funciones.

Funciones enteras: $u = P(x, y, \ldots\ldots t) \wedge P$ polinomios en particular la lineal:

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n + c_o$$

de dos variables será:

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_o \quad \text{(representando un plano no vertical);}$$

en el caso de polinomio de 2º grado,

$u = P_2(x, y)$ será un paraboloide de eje vertical (elíptico, hiperbólico o degenerado.) Luego hay las funciones racionales fraccionarias

$$u = \frac{P(x, y \ldots . t)}{Q(x, y \ldots . t)}$$

la lineal fraccionaria es la dada por el cociente de 2 polinomios de primer grado.

$$u = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_o}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_o} \quad ;$$

en este caso de dos variables su gráfica es un paraboloide hiperbólico o degenerado de eje vertical y tiene las líneas de nivel rectas horizontales.

Después hay las algebraicas explícitas; que son aquellas en que la u viene dada por una expresión racional o irracional.

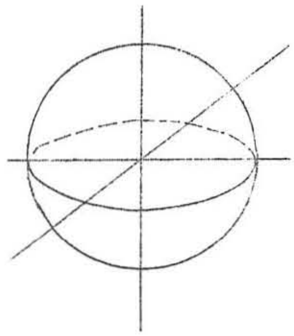
La algebraica en general es la que viene dada en forma implícita por un polinomio igualado a cero.

$$P(x_1, x_2, \dots\dots, x_n; u) = 0 \Longrightarrow m \text{ ramas si P es de grado m en u.}$$

Las funciones trascendentes son las no algebraicas que pueden ser las trascendentes analíticas desarrollables en series de potencias; y no analíticas.

Ahora bien: una función es una aplicación del conjunto de definición sobre el de valores funcionales: luego es siempre uniforme por ser una aplicación; no obstante, se habla de funciones multiformes; entonces el problema fundamental es clasificar en ramas la correspondencia dada en forma multiforme. Ejemplo:

Supongamos una esfera $u^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \Longrightarrow u = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ definido en $x^2 + y^2 \leq 1$.



O sea sólo existe valor cuando $x^2 + y^2 \leq 1$, pero entonces hay dos valores correspondientes a los dos signos. Lo natural sería tomar o bien siempre positivo (+), o siempre negativo (-). Pero esto es por convenio, también podríamos tomar el siguiente.

$$\begin{cases} (xy) \in Q \times Q \Longrightarrow u \geq 0 \\ (x,y) \notin Q \times Q \Longrightarrow u < 0 \end{cases}$$

Esta función no es ni contínua. Entonces es un problema fundamental clasificar las funciones en ramas de manera que cada rama sea analítica.

<u>LIMITES FUNCIONALES. CRITERIO GENERAL DE CONVERGENCIA</u>.- Para funciones de una o más variables los límites funcionales no son más que un caso particular del límite de aplicaciones dirigidas ya estudiados. De manera que la aplicación será el conjunto de las variables independientes en el conjunto funcional. Supondremos por ejemplo: La $u \in R$.

Para hallar el límite de la función será:

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} u(\bar{x}) = \lambda, \text{ con } \bar{x} \text{ que pertenece al espacio euclideo } E_n;$$

o también límite superior o límite inferior.

Hay que fijar un criterio de dirección. Será, si tomamos puntos $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in U\frac{r}{a}$ es

$$\bar{x}_2 \succ \bar{x}_1 \Longleftrightarrow 0\, |\bar{x}_2 - \bar{a}| < |\bar{x}_1 - \bar{a}|$$

o sea que $\bar{x}_2$ dista menos de $\bar{a}$ que $\bar{x}_1$ sin coincidir con él entonces diremos que $\bar{x}_2 \succ \bar{x}_1$ tendremos así el criterio de dirección y para este criterio de dirección, tendremos definido el límite en la siguiente forma:

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} u(\bar{x}) = \lambda \in R \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists U\frac{r}{a} \ni \bar{x} \in U\frac{r}{a} \Longrightarrow |u(\bar{x}) - \lambda| < \varepsilon$$

Igualmente tendríamos para el límite superior e inferior que también subsiste aquí.

En varias variables este límite se llama múltiple para distinguirlo de otro tipo de límite llamado sucesivo o reiterado. Podemos generalizar el concepto de límite tomando solamente los valores próximos del punto $\overline{x}$ al punto a que estén sobre un conjunto. Por ejemplo:

Conjunto $C \subseteq E_n \ni \overline{a} \in C'$ ($\overline{a}$ será punto de acumulación de C),

el criterio de dirección sólo rige para $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in U\frac{r}{a} \cap C$ y entonces es:

$$\overline{x}_2 \succ \overline{x}_1 \Longleftrightarrow 0 < |\overline{x}_2 - \overline{a}| < |\overline{x}_1 - \overline{a}|$$

o sea diremos que:

$\overline{x}_2$ sigue a $\overline{x}_1$ ambos pertenecientes a C, cuando su distancia a $\overline{a}$ es menor, entonces diremos que,

$$\underset{\substack{\overline{x} \to \overline{a} \\ C}}{\lim} u(\overline{x}) = \lambda \in R \Longleftrightarrow \forall > 0 \Longrightarrow \exists\, U\frac{r}{a} \ni \overline{x} \in U\frac{r}{a} \cap C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |u(x) - \lambda| < \varepsilon$$

cuando solo escogimos sobre C tenemos que u(x) ha de estar muy cerca de λ, pero sobre la curva C.

Ejemplo:

$$C \text{ curva } \overline{x} = \overline{\varphi}(t) \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases} \wedge \ \overline{a} = \lim_{t \to t_o} \overline{\varphi}(t) .$$

así tenemos el límite sobre la curva. Entonces solo se ha de cumplir la condición de límite para puntos del entorno que estén sobre la curva.

$$u(\overline{x}) \to \lambda \Longleftrightarrow u[x_1(t), x_2(t) \dots, x_n(t)] = F(t) \xrightarrow[t \to t_o]{} \lambda$$

Podemos tomar no tan solo los límites múltiples sobre una curva o sobre un conjunto cualquiera. Por ejemplo en el conjunto de los ejes,

$$\lim_{x_i \to a_i} u(a_1 \dots\dots x_i, a_{i+1} \dots\dots a_n)$$

así tendremos el límite a lo largo del eje x_1.

Por ejemplo en el caso de dos variables, el límite múltiple es cuando del entorno reducido considero todos los puntos próximos al punto a, entonces tendremos el límite doble. Si yo considero un conjunto de puntos contenido en el entorno que estén sobre una curva entonces solo me interesará que la $\overline{x}$ se acerque al punto a siguiendo la curva.

Puede no haber límite, pero siempre habrá límite superior o inferior. Para $x \in R$ es $\overline{\lim}_{x \to x_o} f(x)$ = máx. de los límites laterales; o sea:

$$\text{máx} \left\{ \overline{\lim_{x \to a_o^-}} f(x) , \overline{\lim_{x \to a_o^+}} f(x) \right\}$$

Ejemplo: $L_d \geq L_i \Longrightarrow L = L_d$

<u>Ejemplos de límite</u>. Sea la función siguiente:

$$u = \frac{x\,y}{+\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; \quad \lim_{P \to 0} u = 0$$

en efecto basta ver que para

$$x \neq 0 \Longrightarrow |u| = \left| \frac{y}{+\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \right| < |y|$$

la u se puede hacer tan pequeña como se quiere con la y.

Para $x = 0$ siendo $y \neq 0$ la u ya vale cero. En todo caso u está en el entorno. Vemos que existe el límite y vale cero.

En el caso de $\lim_{P \to 0} \frac{2\,xy}{x^2 + y^2}$ esto vamos a ver que no tiene límite y es fácil verlo considerando sobre la curva C) $y = mx$.

$$\lim_{P \to 0} \frac{2\,xy}{x^2 + y^2} = \frac{2\,m}{1 + m^2} \quad \text{que varía con m}$$

sobre los ejes los límites valen cero.

Es fácil ver que los máximos y mínimos serán para $m = 1$ y para $m = -1$ y que el límite superior de u será,

$$\overline{\lim_{P \to 0}} \; u = +1$$

y el inferior:

$$\underline{\lim_{P \to 0}} \; u = -1$$

que es el caso de tomar los límites sobre las bisectrices.

Criterio general de convergencia de Cauchy.

Este criterio ya demostrado para aplicaciones dirigidas. Se puede enunciar para el caso de convergencia sobre un conjunto C, porque el límite múltiple es un caso particular de éste cuando se toma para C todo el espacio. El criterio dirá lo siguiente:

$$\lim_{\substack{\overline{x} \to \overline{a} \\ C}} u(x) \in R \text{ finito} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, U_{\overline{a}}^{r} \ni \overline{x}', \overline{x}'' \in U_{\overline{a}}^{r} \cap C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |u(\overline{x}') - u(\overline{x}'')| < \varepsilon$$

Si C es todo el espacio estaremos en el caso de límite múltiple.

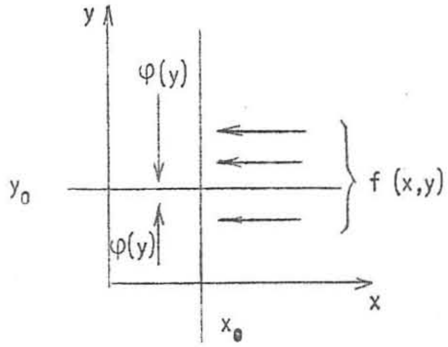
LIMITES SUCESIVOS (O REITERADOS), EN UNA DIRECCION Y MULTIPLES.

Podemos considerar cuando tenemos $u = f(x,y)$ (lo mismo para más de dos variables) los siguientes límites:

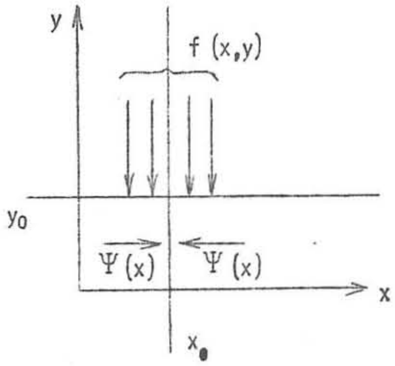
$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) = \lim_{y \to y_0} \left[\lim_{x \to x_0} f(x_0, y_0) \right] = \lim_{y \to y_0} \varphi(y)$$

primero se hace tender a su límite, una variable y luego la otra en la fun - ción resultante de manera que conservando para cada y determinada de un cierto entorno tomamos el límite x tendiendo a x_o y se llama función $\varphi(y)$, lo âual será;

$$\lim_{x \to x_o} \lim_{y \to y_o} f(x,y) = \lim_{x \to x_o} \left[\lim_{y \to y_o} f(x,y) \right] = \lim_{x \to x_o} \Psi(x)$$



1º caso



2º caso

Esto es el concepto de límite sucesivo, en realidad es jymuy distinto del límite múltiple, porqué exigimos por un lado, que exista límite sobre cada una de las paralelas al eje de las x y que estos límites tengan a su vez un límite podría ocurrir que acercándonos superficialmente podría tener límite doble y no tener límites sucesivos o al revés aproximándonos sucesivamente no quiere decir que tengan límite.

1º) $u = y \cdot \text{sen} \dfrac{\pi}{x} \wedge u(0,y) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{P \to 0} u = 0$

es fácil ver esto pues el seno está siempre entre +1 y -1 y ocurrirá q $|u| \leq$ $\leq |y|$ veamos lo que pasa con los límites reiterados.

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} u \right) = 0 \quad \wedge \quad \nexists \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} u$$

2º)

$$u = x \cdot \text{sen} \frac{\pi}{y} + y \cdot \text{sen} \frac{\pi}{x}, \text{ para } xy \neq 0$$ no se necesita

definirlo en el punto (0,0), pero si para $x^2 + y^2 > 0$, entonces $u = 0$, si $xy = 0 \Longrightarrow \exists \lim\limits_{P \to 0} u = 0 \wedge \nexists$ límites sucesivos.

Porque por ejemplo: Para cualquiera de los dos, haciendo x constante y tendiendo la y a cero, el primer sumando de u oscila entre +xy - x, mien - tras que el segundo sumando se anula, luego no habrá límite sucesivo.

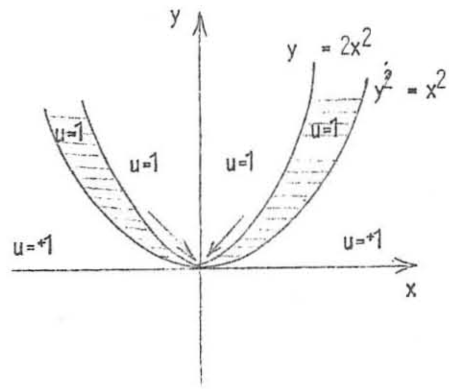
3º) $u = \text{sen} \dfrac{1}{+\sqrt{x^2 + y^2}} \ni P \to 0 \Longrightarrow \nexists$ límite doble ni reiterados.

4º) $u = \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} u = 0 \wedge \nexists$ límite doble.

5º) No basta que exista límite en cada dirección para que exista límite doble.

Sea la función $z = \text{sg} \left\{ (y-x^2)\,(y-2\,x^2) \right.$

En la región rayada los signos serán distintos y la función valdrá -1. En el resto, por encima de la segunda parábola y por debajo de la primera, serán del mismo signo, y la función vale +1.



Vemos que sobre cada raya C_m $y = mx$ es

$\lim_{\substack{P \to 0 \\ C_m}} u = +1$, mientras que $\nexists \lim_{P \to 0} u$

Al tener un rayo siempre habrá un trozito que estará en la región +1, que cada vez será menor, aunque siempre existirá, pero éstos tienen siempre un ínfimo que será cero. Para $m = 0$, es sobre todo la recta $y = 0$ que $u = +1$.

<u>Límites sucesivos y límite doble.</u>

$$\lim_{y \to y_0} \left[\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right] = \lim \varphi(y)$$

Pueden existir estos límites y no ser el límite doble. Vamos a ver que si son distintos los límites reiterados ya no puede existir límite doble porque cuando existe límite doble y existe $\varphi(y)$ que es el límite interior, entonces existe el límite exterior y es igual el límite doble.

Teorema 1º:

$$\exists \wedge = \lim_{P \to P_0} f(x,y) \in \overline{R} \wedge \exists\, \varphi(y) \Rightarrow \exists \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \wedge$$

La demostración es inmediata porqué en el entorno reducido de P_0 ocurre

$$E_n\, U^{r}_{P_0} \text{ es } |f(x,y) - \wedge| < \varepsilon \wedge x \to x_0 \Rightarrow |\varphi(y) - \wedge| \leq \varepsilon. \quad \text{c.q.d.}$$

Vemos que $u = y \text{ sen } \pi/x$ en $P_0 = 0 \;\wedge\; \exists \wedge = 0 \;\wedge\; \nexists \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} u \right)$

parece que contradiga al teorema; lo que pasa es que $\varphi(y)$, que es el límite interior, no existe.

Mediante la existencia del límite sucesivo se puede asegurar, con ciertas condiciones suplementarias la existencia del límite doble, para esto necesitaremos el concepto de convergencia uniforme.

<u>Convergencia uniforme</u>.- <u>Definición</u>. Consideremos $f(x,y)$ como función de <u>x</u>, tomando y como parámetro.

Diremos que $f(x,y)$ converge uniformemente respecto al parámetro si se cumple

$$f(x,y) \underset{Y}{\cup\!\!\!\longrightarrow} \varphi(y) \text{ (uniformemente en } Y) \; (\equiv)_{\text{not.}} \lim_{x \underset{Y}{\cup\!\!\to} x_0} f(xy) = \varphi(y) \; (\equiv)_{\text{de}}$$

$$(\equiv)_{\text{def.}} \; \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists \delta(\varepsilon) \text{ indep. de } y \in Y \ni \; 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |f(x,y) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

o sea para todo valor de la y como parámetro, tenemos una función x distinta que corresponden a las secciones de la superficie $u = f(x,y)$ por los planos $y = k$ (constante).

Respecto a este concepto demos el teorema segundo.

Teorema 2º.

$$\text{Si } \exists \; U^r_{P_0} \ni f(x,y) \underset{y \in U^r_{P_0}}{\cup\!\!\!\longrightarrow} \varphi(y) = f(x_0,y) \text{ para } x \to x_0 \; \wedge$$

$$\wedge \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \Lambda \Longrightarrow \exists \lim_{P \to P_0} f(x,y) = \Lambda$$

Demostración:

$$\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists \delta_1(\varepsilon) \text{ independiente de } y \in U^r_{P_0} \ni |x - x_0| < \delta_1(\varepsilon) \wedge P \in U^r_{P_0} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 \to 0 < |y - y_0| < \delta_2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |f(x_0,y) - \Lambda| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \exists \text{ mínimo } \{\delta_1, \delta_2\} = \delta\{\varepsilon\} > 0 \ni |P - P_0| < \delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |f(x,y) - \Lambda \; |f(x,y) - f(x_0,y)| + |f(x_0,y) - \Lambda| < \varepsilon$$

Veamos un contraejemplo: Habíamos visto que,

$$\nexists \lim_{P \to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \wedge \exists \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} u = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} = u = 0.$$ Pero por ejemplo el $\lim_{x \to 0} u = 0$ <u>no es uniforme</u> respecto de $y \in U^r_0$, pues $\forall \, U^r_0$, si se toma $y = x \Longrightarrow u(x,x) = 1$.

FUNCION SUPERIOR Y FUNCION INFERIOR. OSCILACION EN UN PUNTO. CONTINUIDAD Y SEMICONTINUIDAD FUNCIONAL.

Dada la función $u = f(\overline{x})$ con $\overline{x} \in E_n$ entonces suponiendo que la función existe en $\overline{x}$, siempre existe el límite superior y el inferior. Entonces llamamos función superior a la siguiente, designada por

$$\overline{f}(x) = \text{máx} \left\{ f(\overline{x}), \underline{\lim}_{\overline{t} \to \overline{x}} f(\overline{t}) \right\} = \inf_{h > 0} \left\{ \sup_{|\overline{t} - \overline{x}| < h} f(\overline{t}) \right\} = \lim_{h \to 0^+} \left\{ \sup_{|\overline{t} - \overline{x}| < h} f(\overline{t}) \right\}$$

función inferior,

$$\underline{f}(\overline{x}) = \min \left\{ f(\overline{x}), \underline{\lim}_{\overline{t} \to \overline{x}} f(\overline{t}) \right\} = \sup_{h > 0} \left\{ \inf_{|\overline{t} - \overline{x}| < h} f(\overline{t}) \right\} = \lim_{h \to 0^+} \left\{ \inf_{|\overline{t} - \overline{x}| < h} f(\overline{t}) \right\}$$

Por ejemplo: En la función de Dirichlet $\overline{f}(\overline{x}) \equiv +1 \wedge \underline{f}(\overline{x}) \equiv 0$

Se llama oscilación en el conjunto X de la función $u = f(\overline{x})$ a:

$$\omega_f(X) = \sup_{\overline{x} \in X} f(\overline{x}) - \inf_{\overline{x} \in X} f(\overline{x}) = \sup_{\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in X} |f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_2)| = s - i$$

La última igualdad se demuestra comprobando las dos condiciones que corresponden a la definición de supremo. Hemos de ver que se cumple s_1 y s_2.

s_1) Hemos de ver que $s - i$ es cota superior de los valores absolutos de las diferencias

$$\forall\ \overline{x}_1 \in X \Longrightarrow f(\overline{x}_1) \leqslant s \wedge \forall\ \overline{x}_2 \in X \Longrightarrow i \leqslant f(\overline{x}_2) \Longrightarrow |f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_2)| \leqslant s - i$$

s_2) Hemos de ver ahora que dicha cota superior es mínima:

$$\forall > 0 \Longrightarrow \exists\ \overline{x}_1 \in X \ni f(\overline{x}_1) > s - \frac{\varepsilon}{2} \wedge \exists\ \overline{x}_2 \in X \ni f(\overline{x}_2) < i + \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists\ \overline{x}_1 \overline{x}_2 \in X \ni |f(x_1) - f(x_2)| > s - i - \varepsilon$$

luego es el supremo y por tanto la cota superior es mínima.

Llamamos <u>oscilación en un punto</u> (se designa $\omega_u(\overline{x})$ al:

$$\omega_u(\overline{x}) = \lim_{h \to 0^+} \omega\left(\left\{\overline{t} \ni |\overline{t} - \overline{x}| < h\right\}\right) = \overline{f}(\overline{x}) - \underline{f}(\overline{x}) \geq / \overline{\lim_{\overline{t} \to \overline{x}}} f(\overline{t}) -$$

$$- \underline{\lim_{t\ x}} f(\overline{t}) \geq 0$$

todo esto se hace igual a cero cuando la función es contínua.

<u>Salto de una función.</u>- Carathéodory llama salto de una función a

$$\overline{f}(x) - \underline{f}(\overline{x}) ,$$

es decir a lo que hemos llamado oscilación en $\overline{x}$. En cambio Hobson llama salto a la diferencia

$$\overline{\lim_{\overline{t} \to \overline{x}}} f(F) - \underline{\lim_{\overline{t}\ \overline{x}}} f(F) \geq 0$$

Si $x \in E \wedge \exists f(x^+) \wedge f(x^-)$ otros autores llaman salto de $f(x)$ a la diferencia $f(x^+) - f(x^-) \gtreqless 0$.

<u>Continuidad y semicontinuidad funcional.</u>- Que una función $f(x)$ sea contínua en un punto a significa intuitivamente que cuando <u>x</u> se acerca al punto <u>a</u>, entonces $f(x)$ se aproxima a $f(a)$.

Entonces es:

$$u = f(\overline{x}) \text{ contínua en } \overline{a}\ (\equiv)_{\text{def.}} \exists \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = f(\overline{a}) \in R \Longleftrightarrow$$

no tan solo que exista límite sino que valga $f(\overline{a})$ y este valor sea finito.

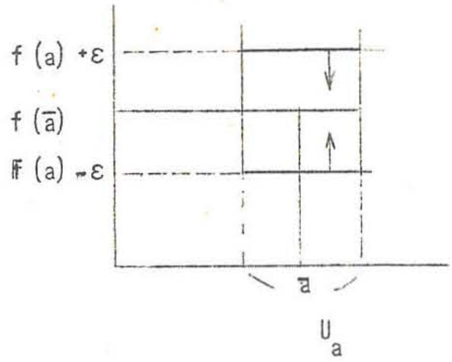
$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists\ U_a \ni \overline{x} \in U_a \Longrightarrow |f(\overline{x}) - f(\overline{a})| < \varepsilon \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(\bar{a}) - \varepsilon < f(\bar{x}) < f(\bar{a}) + \varepsilon$$

No es necesario excluir el punto $\bar{a}$ pues $f(\bar{a}) - f(\bar{a}) = 0$

Esto significa.

La función estará por encima de $f(\bar{a}) - \varepsilon$ y por debajo de $f(\bar{a}) + \varepsilon$.



Boire separó las dos condiciones cuando sólo se emplea la primera $f(\bar{a}) - \varepsilon < f(\bar{x})$ lo llama semicontínua inferiormente y cuando emplea solo la segunda

$$f(\bar{x}) < f(\bar{a}) + \varepsilon$$

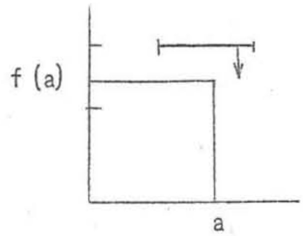
lo llama semicontínua superiormente.

Continuidad sobre un conjunto $C \subseteq \bar{E}_n \ni \bar{a} \in C$ será entonces que exista el límite sobre el conjunto C.

Entonces $\bar{x} \in U_{\bar{a}} \cap C$ y con ello exigimos menos. Si se trata de límites laterales diremos que es contínua a la derecha o contínua a la izquierda. Por ejemplo, las funciones $E(x)$ y $M(x)$ no son contínuas para $x \in Z$, y sin embargo, para todo $x \in R$ son ambas contínuas a la derecha.

Así una función se llama semicontínua superiormente cuando se cumple:

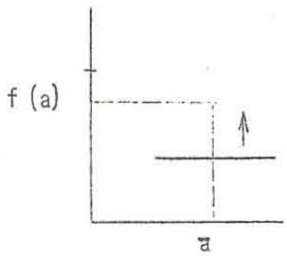
$$f(\bar{a}) = \bar{f}(a) \in R \text{ (finito)} \Longleftrightarrow \overline{\lim_{\bar{x} \to \bar{a}}} f(\bar{x}) =$$



$$= L \leq f(\bar{a}) \in \bar{R} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists U_{\bar{a}} \ni \bar{x} \in U_{\bar{a}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(\bar{x}) < f(\bar{a}) + \varepsilon$$

lo cual es la semicontinuidad inferior, que será,



$$f(\bar{a}) = \underline{f}(\bar{a}) \in R \text{(finito)} \Longleftrightarrow \underline{\lim_{\bar{x} \to \bar{a}}} f(\bar{x}) =$$

$$= l \geq f(\bar{a}) \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists U_{\bar{a}} \ni \bar{x} \in U_{\bar{a}} \Longrightarrow f(\bar{a}) -$$

$$- \varepsilon < f(\bar{x})$$

Si esto ocurre el límite inferior no puede ser menor que $f(\bar{a})$, por lo tanto $f(\bar{a})$ coincide con la función inferior.

Una función es contínua en un punto, en el caso de que la función inferior y la superior coincidan y sean finitas. Es decir, la función $f(\bar{a})$ es contínua en $\bar{x} = \bar{a}$ si y sólo si:

$$\bar{f}(\bar{a}) = \underline{f}(a) \in R \text{(finito)} \Longleftrightarrow \omega_f(\bar{a}) = 0 \Longleftrightarrow \overline{\lim_{x \to \bar{a}}} f(\bar{x}) = \underline{\lim_{x \to a}} f(x) = f(\bar{a}) \in R \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists \lim_{x \to a} f(\bar{x}) = f(\bar{a}) \in R \Longleftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists U_{\bar{a}} \ni \omega_f(U_{\bar{a}}) \leq \varepsilon\right] \Longleftrightarrow$$

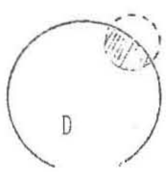
$$\Longleftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists\, U_{\bar a} \ni \bar x \in U_{\bar a} \Longrightarrow |\, f(\bar x) - f(\bar a) < \varepsilon \right]$$

El cálculo de límites $\Longrightarrow$ operaciones con funciones contínuas.

La suma de dos funciones contínuas en un punto $\bar a$, es una función contínua en $\bar a$. Con el producto lo mismo. El cociente lo es siempre que sea de divisor ni nulo. Una función de función también lo es, o sea que una función racional es contínua salvo los ceros del denominador.

El concepto de función contínua es muy importante, en intervalo cerrado en funciones de una sola variable, o de varias variables en un recinto cerrado, que dice que $f(\bar x)$ es contínua en $[a, b]$ $(\equiv)_d$ es contínua en $x \in (a, b) \wedge$ contínua izquierda $\wedge$ contínua derecha de b.

En función de dos variables es contínua en $\bar D$ (recinto cerrado) si contínua interior $D \wedge$ contínua en puntos frontera $\bar D$ sobre $\bar D$.



SeLa reserva el nombre de superficie uniforme aquella en que u viene dada como función de (x, y) pero que sea contínua y uniforme. Para estas funciones contínuas en un recinto cerrado y acotadas se cumple el teorema de Cauchy o Bolzano.