

MEMORIA RELATIVA A LA INVESTIGACIÓN QUE ME
PROONGO REALIZAR SOBRE LA DISTRIBUCIÓN DE
LOS VALORES DE UNA FUNCIÓN HOLOMORFA REPRE-
SENTADA POR UNA SERIE DE DIRICHLET LAGUNAR

F. Sunyer Balaguer

Enunciado del tema de la investigación

Me propongo investigar la relación entre la distribución de los valores que toma una función holomorfa en un semiplano, y las lagunas que puedan existir en la serie de Dirichlet por la que la supondremos representada. En particular intentare hallar, si es posible, una condición lagunar que imposibilite la existencia de un valor excepcional.

Importancia de la investigación propuesta

El teorema de Picard, según se sabe, afirma, para las funciones enteras, que estas toman la totalidad de los valores finitos con solo una posible excepción. Esta posibilidad de valor excepcional ha dado lugar a infinidad de trabajos de eminentes matemáticos, y uno de los temas que han interesado e interesan es el hallazgo de condiciones suficientes que permitan afirmar, o negar, la existencia de dicho valor excepcional. Los resultados más antiguos en este sentido afirman que para las funciones de orden finito la excepción solo puede presentarse en el caso de orden entero.

J. Hadamard en una Nota publicada en los C.R. de la Academia de Paris [4] (6) fue quien primero abordó el mismo tema en otra dirección, señalando que debía existir una relación entre los valores excepcionales de las funciones enteras y las lagunas de las series de Taylor que las representan. Posteriormente Fejer [3], Biernacki [1] y Pólya [5] obtuvieron unas condiciones lagunares suficientes para que una función entera no pudiera tener un valor excepcional en el sentido de Picard, pero los métodos utilizados por estos autores no les permitieron obtener condiciones muy precisas.

En una serie de Notas y Memorias [6], [7] y [8], cuya publicación se inició en el año 1947, el autor de estas líneas obtuvo, utilizando un nuevo procedimiento, unos resultados en los que, para las funciones enteras, daba condiciones lagunares suficientes no solo para la no existencia de valores excepcionales en el sentido de Picard, sino en el sentido de Borel-Lindelöf. En algunos de estos resultados la condición era ~~no puede mejorarse~~ no solo suficiente sino necesaria. Además el mismo método me permitió obtener unos resultados sumamente interesantes sobre la distribución de los valores de una función holomorfa en un círculo representada por una serie de Taylor lagunar. Resultados que tienen como consecuencia generalizaciones de los teoremas de Schottky y de Landau en una dirección hasta entonces inexplorada.

Luego en una Memoria publicada en la Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza [9], extendí los resultados de las funciones enteras representadas por series de Taylor lagunares a las representadas por series de Dirichlet. Esta generalización,

(7) Los números entre parentesis angulares remiten a la bibliografía.

además de la importancia de demostrar que los primitivos resultados eran asimismo válidos para la serie de Dirichlet, tenía otro objetivo, a saber: Aplicando los resultados relativos a las series de Dirichlet suponiendo que los exponentes $\{\lambda_n\}$ eran enteros, y mediante la transformación $z = e^{-t}$, se obtienen unos teoremas que, en algunos aspectos, son más precisos que los obtenidos directamente para la serie de Taylor. Por ejemplo, aquellos teoremas nos permiten definir una cantidad que depende del orden de la función, y tal que en cualquier ángulo de abertura superior a esta cantidad la función no puede presentar ningún valor excepcional; mientras que los teoremas obtenidos directamente para las series de Taylor solamente permiten afirmar la no existencia de valores excepcionales en la totalidad del plano.

Después de lo que acabamos de exponer resulta evidente el gran interés que tendría la generalización a las funciones holomorfas en un semiplano representadas por series de Dirichlet lagunares, de los resultados obtenidos que obtuvimos para las funciones holomorfas en un círculo representadas por series de Taylor lagunares. Esta generalización presenta dificultades mucho mayores de las que se presentaron para la que obtuve para las funciones enteras. Es para ~~esta~~ la investigación dirigida a obtener estos resultados por lo que solicité la Beca de Estudios. Con su logro se añadiría a la teoría unos resultados sumamente interesantes, y en cierto sentido quedaría esta terminada.

Además, una vez obtenidos estos resultados, y particularmente una vez obtenidas condiciones lagunares suficientes para afirmar que una función holomorfa en un semiplano $\sigma > \alpha$ representada por una serie de Dirichlet que cumple dichas condiciones lagunares no puede tener valores excepcionales en ninguna semifaja ($\sigma > \alpha, b < t < b_2$)

4

Será posible, mediante la hipótesis de que la sucesión $\{\lambda_n\}$ está formada por enteros, ~~y mediante~~ y empleando de nuevo la transformación ~~de~~ $z = e^{-\lambda_n}$, estudiar las condiciones para que una serie de Taylor lagunar tome la totalidad de los valores finitos en la proximidad de cualquier punto de la circunferencia que limita su círculo de convergencia. Si los resultados que se obtengan demuestran que los conjuntos donde la función toma un valor determinado cualquiera tienen una densidad suficiente, entonces se habrá demostrado que bajo las mismas condiciones todos los puntos de la circunferencia son puntos de Borel sin valor excepcional. En este caso sería interesante investigar, e intentaremos hacerlo, si todos estos puntos son puntos directos de Borel, o en caso negativo, estudiar la distribución de las dos clases de puntos de Borel sobre la circunferencia.

Estas investigaciones tendrían asimismo el interés que podrían relacionarse con los resultados obtenidos ultimamente por Collingwood [2]. Este autor estudia particularmente las propiedades de los conjuntos de la circunferencia en los que el conjunto de acumulación de los valores de la función (Cluster set) es máximo. Pero incluso cuando el conjunto de acumulación es total, la función puede presentar alguna excepción; por lo tanto, cuando la función toma la totalidad de los valores finitos en la proximidad de un punto, este punto tiene una propiedad más fuerte que cuando solamente sabemos que el conjunto de acumulación es total en el mismo. Esto podría dar lugar a una clasificación de estos últimos puntos, y al estudio de las relaciones que los pueden ligar con las lagunas de la serie de Taylor cuando la función es holomorfa en el círculo.

5

La investigación que nos proponemos realizar, además de las consecuencias interesantes que ~~extendría~~ y hemos señalado más arriba, requerirá, con toda seguridad, la demostración de teoremas auxiliares que tendrán interés en sí mismos y podrán ser útiles en otras investigaciones. En particular creé será necesaria la construcción de productos canónicos semejantes a los de Weierstrass, pero completamente distintos de estos. Además tendrá que definirse el orden de crecimiento de la función y muyprobablemente construir órdenes precisadas a fin de poder formular y demostrar los resultados con la mayor generalidad posible.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Biernacki (M) - Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires. (These, Paris 1928)
- 2.- Cellringwood (E.F.) - Cluster sets and prime ends (Annales Acad. Scientiarum Fennicae serie A, I. 250/6, 1958)
- 3.- Fejer (L.) - Über die Wurzel vom Kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung (Math. Annalen t. 65, 1908)
- 4.- Hadamard (J.) - Sur les fonctions entières (C. R. Acad. Sci. Paris t. 136, 1902)
- 5.- Pólya (G.) - Utersuchungen über Lucken und Singularitäten von Potenzreihen (Math. Zeitschrift, t. 29, 1928)
- 6.- Sunyer Balaguer (F.) - Sur la substitution d'une valeur exceptionnelle par une propriété lacunaire (C.R. Acad. Sci. Paris t. 224 y 225, 1947)

- 7.- Sunyer Balaguer (F.) Sobre la sustitución de una función excepcional por una propiedad lagunar (Mem. R. Acad. Ciencias Barcelona, vol. 29, nº 16, 1948)
- 8.- Sunyer Balaguer (F.) - Sur la substitution d'une Valeur exceptionnelle par une propriété lacunaire (Acta Math t. 87, 1952)
- 9.- Sunyer Balaguer (F.) Sobre la distribución de los valores de una función entera representada por una serie de Dirichlet lagunar (Rev. Acad. Ciencias de Zaragoza, serie 2, t. 5, 1950)

Barcelona 9 julio de 1960

F. Sunyer Balaguer