

MEMORIA RELATIVA A LA INVESTIGACION QUE ME  
PROPONGO REALIZAR SOBRE LA DISTRIBUCION DE  
LOS VALORES DE UNA FUNCION HOLOMORFA REPRESENTADA  
POR UNA SERIE DE DIRICHLET LAGUNAR  
=====

por F. Sunyer Balaguer

J. Hadamard en una Nota publicada en los C.R. de la Academia de Paris [4] (1) fue quien primero señaló que debía existir una relación entre los valores excepcionales de las funciones enteras y las lagunas de las series de Taylor que las representan. Posteriormente Fejér [3], Biernacki [1] y Pólya [5] obtuvieron unas condiciones lagunares suficientes para que una función entera no pudiera tener un valor excepcional en el sentido de Picard.

En una serie de Notas y Memorias [6], cuya publicación se inició en el año 1947, el autor de estas líneas obtuvo, utilizando un nuevo procedimiento, unos resultados en los que, para las funciones enteras, daba condiciones lagunares suficientes no solo para la no existencia de valores excepcionales en el sentido de Picard, sino en el *En algunos de estos resultados la condición era no solo suficiente sino necesaria* sentido de Borel-Lindelöf. Además, el mismo método me permitió obtener unos resultados sumamente interesantes sobre la distribución de los valores de una función holomorfa en un círculo representada por una serie de Taylor lagunar; resultados que tienen como consecuencia generalizaciones de los teoremas de Schottky y de Landau en una dirección hasta entonces inexplorada.

~~En algunos de estos resultados la condición lagunar no solo era suficiente sino necesaria para la validez de los teoremas. Además~~

---

(1).- Los números entre parentesis angulares remiten a la bibliografía

~~estos resultados indicaban que la condición lagunar depende del orden de la función.~~

Luego, en una Memoria publicada en la Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza [7], extendí los resultados de las funciones enteras representadas por series de Taylor lagunares a las representadas por series de Dirichlet. Esta generalización, además de la importancia de demostrar que los primitivos resultados eran asimismo válidos para las series de Dirichlet, tenía otro objetivo, a saber: Aplicando los resultados relativos a las series de Dirichlet suponiendo que los exponentes  $\{\lambda_n\}$  eran enteros, y mediante la transformación  $z = e^{-\lambda}$ , se obtienen unos teoremas que, en algunos aspectos, son más precisos que los obtenidos directamente para la serie de Taylor. Por ejemplo, aquellos teoremas nos permiten definir una cantidad que depende del orden de la función, y tal que en cualquier ángulo de abertura superior a esta cantidad, la función no puede presentar ningún valor excepcional, mientras que los teoremas obtenidos directamente para las series de Taylor solamente permiten afirmar la no existencia de valores excepcionales en la totalidad del plano.

Después de lo que acabamos de exponer resulta evidente el gran interés que tendría la generalización a las funciones holomorfas en un semiplano representadas por series de Dirichlet lagunares, de los resultados que obtuvimos para las funciones holomorfas en un círculo representadas por series de Taylor lagunares. Esta generalización presenta dificultades mucho mayores que la que obtuve para las funciones enteras. Es para la investigación dirigida a obtener esta generalización por lo que solicito la beca de estudios. Con su logro se añadiría a la teoría unos resultados sumamente interesantes, y en cierto sentido quedaría esta terminada.

Además, una vez obtenidos estos resultados, y particularmente una



vez obtenidas condiciones lagunares suficientes para afirmar que una función holomorfa en un semiplano  $\sigma < a$  representada por una serie de Dirichlet que cumple dichas condiciones lagunares no puede tener valores excepcionales en una semifaja  $\{\sigma < a, b_1 < t < b_2\}$ , nos será posible, mediante la hipótesis de que la sucesión  $\{\lambda_n\}$  está formada por enteros, y empleando de nuevo la transformación  $z = e^{-t}$ , estudiar las condiciones para que una serie de Taylor lagunar tome la totalidad de los valores finitos en la proximidad de cualquier punto de la circunferencia que limita su círculo de convergencia. Si los resultados que se obtengan demuestran que los conjuntos donde la función toma un valor determinado cualquiera tienen una densidad suficiente, entonces se habrá demostrado que bajo las mismas condiciones todos los puntos de la circunferencia son puntos de Borel sin valor excepcional. En este caso sería interesante investigar, e intentaremos hacerlo, si todos estos puntos son puntos directos de Borel, o en caso negativo, estudiar la distribución de las dos clases de puntos de Borel sobre la circunferencia.

Estas investigaciones tendrían asimismo el interés que podrían relacionarse con los resultados obtenidos ultimamente por Collingwood [2]. Este autor estudia particularmente las propiedades de los conjuntos de la circunferencia en los que el conjunto de acumulación de los valores de la función (cluster set) es máximo. Pero incluso cuando el conjunto de acumulación es total, la función puede presentar alguna excepción. Por lo tanto, cuando la función toma la totalidad de los valores finitos en la proximidad de un punto, este punto tiene una propiedad mas fuerte que cuando solamente sabemos que el conjunto de acumulación es total en el mismo. Esto podría dar lugar a una clasificación de estos ultimos puntos, y al estudio de las relaciones que los pueden ligar con las lagunas de la serie de

Taylor cuando la función es holomorfa en el círculo.

La investigación que nos proponemos realizar, además de las consecuencias interesantes tendría y que ~~que~~ hemos señalado anteriormente, requerirá, con toda seguridad, la demostración de teoremas auxiliares que tendrán interés en si mismos y podrán ser útiles en otras investigaciones. 1

### BIBLIOGRAFIA

- 1.- Biernacki (M) - Sur les equations algebriques contenant des parametres arbitraires. (These Paris 1928)
- 2.- Collingwood (E.F.) - Cluster sets and prime ends (Annales Acad. Scientiarum Fennicae serie A, I. 250/6, 1958)
- 3.- Fejer (L.) - Uber die Wurzel vom Kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung (Math. Annalen t.65, 1908)
- 4.- Hadamard (J.) - Sur les fonctions entieres (C.R. Paris t.136, 1903)
- 5.- Polya (G.) - Untersuchungen uber Lucken und Singularitäten von Potenzreihen (Math. Zeitschrift, t. 29, 1928)
- 6.- Sunyer Balaguer (F.) - Sur la substitution d'une valeur exceptionnelle par une propriete lacunaire (2 Notes) (C.R. Paris t. 224 y 225, 1947) - Sobre la sustitución de una función excepcional por una propiedad lagunar (Mem. R.Acad. Ci. Barcelona vol. 29, nº 16, 1948) - Sur la substitution d'une valeur exceptionnelle par une propriete lacunaire (Acta Math. t.87, 1952)
- 7.- Sunyer Balaguer (F.) - Sobre la distribución de los valores de una función entera representada por una serie de Dirichlet lagunar Rev.Acad.Ci.Zaragoza, serie 2 t, 5, 1950)

Barcelona 1 de marzo de 1959.