Subsección a : El número real

1.- Sucesiones de números racionales. Limite.- Sea A un conjunto cualquiera y N el conjunto de los números naturales. Toda aplicación $f: N \rightarrow A$ se llama una sucesión de elementos de A. Todo elemento de A que sea imagen en f de un número natural, se llamará elemento o termino de la sucesión, y será representado afectandolo de un subindice igual al entero a que corresponde:

$$f(n) = a_n \tag{1}$$

~~Por lo tanto, ordenando los elementos de la sucesión en el mismo orden de los números naturales que les corresponde, se puede representar por~~

$$\cancel{\{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}}$$

o en forma abreviada

$$\{a_n\} \qquad n \in N$$

o ~~más abreviado aun, simplemente por:~~

$$\{a_n\}$$

que es como se representa comunmente en los tratados de análisis superior o en las memorias de investigación.

~~Es innecesario señalar que~~ Los elementos de una sucesión no ~~es necesario~~ tienen que se~~r~~ distintos; e incluso como caso particular, pueden ser todos iguales.

Ahora supondremos que A = Q, donde Q es el conjunto de los números racionales.

Una sucesión $\{q_n\}$, $n \in N$ de números racionales tendrá, por definición un ~~[illegible]~~ limite $q \in Q$ si para todo numero racional $\varepsilon > 0$ puede ~~definirse~~ clase un número natural $k = k(\varepsilon)$ tal que si $n > k$

$$(2) \qquad |q - q_n| < \varepsilon.$$

Cuando una sucesión $\{q_n\}$ tiene un ~~indice~~ limite q se expresa también diciendo que $\{q_n\}$ tiende a q cuando n crece indefinidamente. Además cuando no exista confusión posible se suprime la expresión "cuando n crece indefinidamente". Las sucesiones que tienen limite se llaman sucesiones convergentes.

Aqui se supone establecidas ya las nociones de orden y ~~módulo~~ valor absoluto en el campo racional. Además sin repetirlo se utilizará las propiedades que sean necesarias de los números racionales, cuyo enunciado y demostración el lector puede consultar en el articulo correspondiente.

~~Puede demostrarse facilmente:~~

Proposición 1.- El límite de una sucesión de números racionales si existe, es unico.

En efecto, si se supone que la sucesión tiene dos límites q y q', $q \neq q'$, eligiendo

$$(3) \qquad 0 < \varepsilon < \tfrac{1}{2}|q - q'|$$

según (2) de la definición de límite existirán dos números naturales k y k' tales que

$$|q - q_n| < \varepsilon \qquad \text{si } n > k$$

$$|q' - q_n| < \varepsilon \qquad \text{si } n > k'$$

y por lo tanto, si m es el mayor de los números k y k' de

$$q - q' = q - q_n + q_n - q'$$

se sigue

$$|q - q'| \leq |q - q_n| + |q_n - q'| < 2\varepsilon \quad \text{si } n > m$$

en contradicción con la (3). Esta contradicción demuestra la imposibilidad de la existencia de dos límites distintos.

2.- Sucesiones de Cauchy.- Una sucesión $\{q_n\}$ de números racionales se llama sucesión de Cauchy, si para todo $\varepsilon \in Q$, $\varepsilon > 0$ existe un número natural $k = k(\varepsilon)$ tal que

$$|q_n - q_m| < \varepsilon \qquad \text{cualesquiera que sean } m,n > k.$$

Proposición 2.- <u>Toda sucesión $\{q_n\}$ de números racionales que sea convergente, es una sucesión de Cauchy.</u>

En efecto, si la sucesión $\{q_n\}$ tiene límite $q \in Q$, según la condición (2) de la definición de limite, resulta que si $k = k(\eta)$ con $\eta = \varepsilon/2$ y $n,m > k$, tendremos

$$|q - q_n| < \eta, \qquad |q - q_m| < \eta$$

y por lo tanto,

$$|q_n - q_m| \leqslant |q - q_n| + |q_m - q| < 2\eta = \varepsilon$$

y como se puede suponer que ε es un número racional > 0 cualquiera, la proposición 2 queda demostrada

Se dice que dos sucesiones $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ de Cauchy de números racionales pertenecen a una misma clase, si y solo si, la sucesión $\{q_n - q'_n\}$ tiene por límite 0. Es facil demostrar que esta propiedad es reflexiva, simétrica y transitiva; y por lo tanto, es una relación de equivalencia. Una sucesión cualquiera que pertenece a una clase determinada será llamada un representante de la clase.

Proposición 3.- <u>Si dos sucesiones</u> $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ <u>pertenecen a la misma clase y una de ellas tiene límite</u> $q \in Q$, <u>la otra también tiene el mismo límite</u> q.

Observación.- Es evidente que la anterior proposición puede también enunciarse del siguiente modo: <u>Si un representante de una clase deter-</u>

minada tiene limite racional q todos los representantes de la misma clase tendran el mismo límite.

Esta proposición se demuestra del siguiente modo: Si se supone que la $\{q_n\}$ tiene el limite $q \in Q$, entonces, por la definición de límite, dado un $\varepsilon \in Q$, $\varepsilon > 0$ arbitrario puede determinarse un k tal que, si $n > k$,

$$|q - q_n| < \varepsilon \tag{4}$$

Por otra parte, puesto que por hipó esis la sucesión $\{q_n - q'_n\}$ tiene 0 por límite, para el mismo ε será posible determinar un k' tal que, si $n > k'$,

$$|q_n - q'_n| < \varepsilon \tag{5}$$

Por lo tanto si m es el mayor de los números k y k', de (4) y (5) resulta que, cuando $n > m$,

$$|q - q'_n| \leq |q - q_n| + |q_n - q'_n| < 2\varepsilon$$

y la arbitrariedad de ε demuestra que la $\{q'_n\}$ tiende a q, o sea la proposición 3.

Como consecuencia de esta proposición se puede decir que si un representantede una clase (y por lo tanto todos) tiene limite $q \in Q$, esta clase representa o corresponde al número racional q.

Si el reciproco de la proposición 2 fuese cierto en el campo racional, este método de las sucesiones de Cauchy no nos permitiria ampliar el campo racional. Pero como, según demostraremos a continuación, existen sucesiones de Cauchy de números racionales que no tienen límite racional, ello permite ampliar el campo racional obteniendo el cuerpo de los números reales.

Para demostrar la existencia de sucesiones de Cauchy de números racionales que no tienen límite racional se puede proceder del siguiente modo: En primer lugar se demuestra que el número natural 2 no es cuadrado ningún número racional. Luego se define una sucesión $\{q_n^2\}$ de cuadrados de números racionales que tiende a 2, y finalmente veremos que la sucesión $\{q_n\}$ es de Cauchy y no puede tener límite racional.

Supongamos en primer lugar que contrariamente a lo que hemos dicho hace poco existe una fracción irreductible m/n con $m,n \in N$ tal que

$$(m/n)^2 = 2$$

de esto se deduce $m^2 = 2n^2$, y como suponemos que la fracción m/n es irreductible y que por consiguiente m es primo con n, tendremos que m debe dividir a 2, y por lo tanto m=1 o bien m=2. En el primer caso resultaría $2n^2 = 1$, y en el segundo $n^2 = 2$; ambos resultados son absurdos, y en consecuencia según hemos afirmado no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2.

Por otra parte, si $m,n \in N$ y $m < 2n$, es facil por la formula del cuadrado del binomio demostrar que

$$\frac{(m+1)^2}{n^2} - \frac{m^2}{n^2} < \frac{5}{n}$$

y por consiguiente para todo valor de n será posible hallar un valor m ~~xx~~ tal que

$$2 - \frac{5}{n} < \frac{m^2}{n^2} < 2$$

Por lo tanto, considerando una sucesión de valores de n ~~infinitamente~~ crecientes, y no acotados obtendremos una sucesión de números racionales que representaremos por $\{q_n\}$ tal que la sucesión $\{q_n^2\}$ de sus cuadrados tiene límite 2. La proposición 2 permite afirmar que $\{q_n^2\}$ es una sucesión de Cauchy. Y puesto que se puede determinar un valor k tal que para $n > k$ se cumplan

$$(6) \qquad 1 < q_n < 2$$

resulta que

$$|q_n - q_m| = \frac{|q_n^2 - q_m^2|}{|q_n + q_m|} < \frac{1}{2}\,|q_n^2 - q_m^2| \qquad \text{si } n,m > k$$

y por consiguiente como quiera que $\{q_n^2\}$ es una sucesión de Cauchy, también lo sera $\{q_n\}$.

Ahora vamos a demostrar finalmente que esta sucesión de Cauchy $\{q_n\}$ acabada de definir no puede tener limite (racional), lo cual demuestra que el reciproco de la proposición 2 no es cierto en el campo racional. Supongamos contrariamente que $\{q_n\}$ tiene límite $q \in Q$, entonces de (6) se sigue

$$1 \leq q \leq 2$$

y si $n > k$

$$(7) \qquad |q^2 - q_n^2| = |q + q_n|\,|q - q_n| < 4|q - q_n|$$

y puesto que suponemos que $\{q_n\}$ tiene límite $q \in Q$, para cualquier $\varepsilon > 0$ podremos determinar un k' tal que

$$|q - q_n| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{si} \qquad n > k'$$

y en consequencia de (7) resulta que si k'' es el mayor de los números k y k',

$$|q^2 - q_n^2| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad n > k''$$

lo cual demostraria que $\{q_n^2\}$ tiene por límite q^2, pero como habiamos demostrado que $\{q_n^2\}$ tiene límite 2, la proposición 1 nos permitiria escribir $q^2 = 2$, lo cual según vimos es imposible si $q \in Q$. Esta contradicción demuestra que la sucesión de Cauchy $\{q_n\}$ formada de números racionales no tiene límite racional.

Igual que anteriormente se dirá que dos sucesiones de Cauchy $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ pertenecen a una misma clase, si la $\{q_n - q'_n\}$ tiene por límite 0, sin tener en cuenta si las $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ tienen límite (~~racional~~). Según se ha indicado si un representante de la clase (y por consiguiente todos) tiene límite ~~racional~~ q, diremos que representa o corresponde a este número q; pero incluso cuando ningún representante de la clase tiene límite ~~racional~~ se dirá que la clase representa o corresponde a un número p; a estos números se les llama números irracionales. El conjunto formado por los números racionales y irracionales se llama conjunto de los números reales. En este conjunto vamos a establecer un orden y dos operaciones de modo que sea un cuerpo ordenado .

3.- Ordenación de los números reales.- Proposición 4.- Dada una sucesión $\{q_n\}$ de Cauchy de números racionales que no tiene por límite 0, existe un número racional $\eta > 0$ y un número natural k tales que, si $n > k$, se cumple una y solo una de las desigualdades

$$q_n > \eta, \qquad\qquad q_n < -\eta.$$

En efecto, si para cualquier $\eta > 0$ existiera siempre un $k = k(\eta)$ tal que

$$|q_n| \leq 2\eta \qquad \text{si} \qquad n > k$$

la sucesión tendria por límite 0 contrariamente a la hipotesis. Por lo tanto, existirá un $\eta > 0$ tal que existe una sucesión infinitamente creciente de valores de n para los cuales

$$|q_n| > 2\eta$$

Y por lo tanto para una infinidad de estos valores tendremos, o bien

$$q_n > 2\eta \tag{8}$$

o bien

(9) $$q_n < -2\eta$$

Supongamos que sea (8) la que sea satisfecha para una infinidad de valores de n, entònces, puesto que $\{q_n\}$ es una sucesión de Cauchy se podra determinar un k tal que

$$|q_n - q_m| < \eta \quad \text{si} \quad n,m > k$$

Por lo tanto puesto que (8) se verifica para una infinidad de valores de n ~~xxxx~~ , evidentemente se verificará para valores de $n > k$, de lo cual resulta

(10) $$q_m < \eta \quad \text{si} \quad m > k.$$

Si en lugar de la (8) fuese la (9) la que se cumple para una infinidad de valores de n, se hubiese encontrado que

(11) $$q_m > -\eta \quad \text{para} \quad m > k.$$

Y como es evidente que solo una de las (10) y (11) es satisfecha, queda demostrada la proposición.

Proposición 5.- Si $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ son dos sucesiones de Cauchy de números racionales que no pertenecen a la misma clase, entonces existe un k y un $\eta > 0$ tales que para $n > k$ se cumple una y solo una de las desigualdades

(12) $$q_n > q'_n + \eta$$

(13) $$q'_n > q_n + \eta$$

En efecto, en primer lugar es facil demostrar que la sucesión $\{q_n - q'_n\}$ es de Caubhy: Puesto que por hipotesis las $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ son de Cauchy, por definición para cualquier $\varepsilon > 0$ es posible determinar dos números naturales k y k' tales que

$$|q_n - q_m| < \varepsilon/2 \qquad \text{para} \qquad n,m > k$$

$$|q'_n - q'_m| < \varepsilon/2 \qquad \text{para} \qquad n,m > k'$$

y si k" es el mayor de los números k y k', tendremos

$$|(q_n - q'_n) - (q_m - q'_m)| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad n,m > k''$$

y por lo tanto, $\{q_n - q'_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Aplicando pues a $\{q_n - q'_n\}$ la proposición 4, lo cual es posible por no tener límite 0 puesto que hemos supuesto que $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ son de diferente clase, resulta inmediatamente la conlusión de la proposición 5

Además la elección de los representantes $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ no influye en que sea la (12) o bien la (13) la que se verifique, pues puede demostrarse facilmente que el hecho que se verifique la una o la otra depende unicamente de las clases a que pertenecen dichos representantes.

Será pues correcta la siguiente definición del orden entre números reales: Sean ~~XXXX~~ r y r' dos números reales distintos, representados por lo tanto por clases de sucesiones de Cauchy de números racionales asimismo distintas. Sea $\{q_n\}$ un representante de la clase que representa r y $\{q'_n\}$ un representante de la correspondiente a r'. Entonces, si es posible determinar un k y un $\eta > 0$ tales que

$$(14) \qquad q_n > q'_n + \eta \qquad \text{para} \qquad n > k$$

~~dixxxxxxque~~ se dice que $r > r'$. Puesto que las dos clases son distintas si no es posible verificar (14) se podrá determinar $\eta > 0$ de modo que se verifiquen

$$(15) \qquad q'_n > q_n + \eta \qquad \text{para} \qquad n > k$$

según la proposición 5, y entonces se escribirá $r < r'$ (o lo que es lo mismo $r' > r$). De lo anterior se sigue (tricotomia) ~~Se puede demostrar~~, que con esta definición dos números reales verificarán siempre una y solo una de las tres relaciones

$$r = r', \qquad r > r' \qquad \text{o bien} \qquad r < r'.$$

En efecto según hemos visto si no se verifica la primera, es decir si los dos números son distintos, y por tanto son representados por clases tambien distintas, se verificara una y solo una de las dos restantes.

Por otra parte si los números no son distintos, según la definición de número real dada al principio, seran representados por la misma clase de sucesiones de Cauchy y entonces por la definición de clase cualesquiera que sean los representantes elegidos $\{q_n - q'_n\}$ tendrá por límite 0, y ni las (14) ni las (15) pueden verificarse, y por lo tanto, no se cumplirá ni la segunda ni la tercera relación entre r y r'.

En particular si sabemos que la tercera relación no se verifica se puede afirmar que se verificará la primera o la seguncay entonces se escribe $r \geqslant r'$. Del mismo modo si se sabe que es la segunda la que no se verifica entonces se puede afirmar que se verifica la primera o la tercera y se escribe $r \leqslant r'$ (o lo que es equivalente $r' \geqslant r$). Finalmente si lo unico que sabemos es que no se cumple la primera relación se escribe simplemente $r \neq r'$(que se lee r diferente de r').

Proposición 6.- La relación $\geqslant$(o bien $\leqslant$) es una relación de orden total en el conjunto de los números reales.

En efecto es facil, si bien resulta laboriosa, establecer que dicha relación es transitiva y antisimetrica, y como según se ha visto dicha relación existe siempre entre dos números reales, la proposición resulta demostrada

Proposición 7.- La restricción a Q de la relación $\geqslant$ definida en el conjunto de los números reales R coincide con la ordenación $\geqslant$ del campo racional utilizada, (que el lector puede encontrar en el articulo correspondiente).

En efecto sea $r = q \in Q$ y $r' = q' \in Q$ dos números racionales,; como representantes de las clases correspondientes a r y a r' podremos utilizar dos sucesiones que tengan todos sus elementos, respectivamente, iguales a q y a q'. Entonces por las definiciones establecidas resultara

$$r = r' \text{ en } R \text{ si } \quad q = q' \text{ en } Q$$

$$r > r' \text{ en } R \text{ si } \quad q > q' \text{ en } Q$$

$$r < r' \text{ en } R \text{ si } \quad q < q' \text{ en } Q$$

lo qual demuestra la proposición.

4.- Módulo.- Para cualquier número real se puede definir un módulo (o valor absoluto) que será la extensión a R del módulo definido en Q.

Sea r un número real cualquiera y sea $\{q_n\}$ un representante de la clase de sucesiones de Cauchy que corresponde a r. Entonces el módulo de r, que se representa por $|r|$ será el número que corresponde a la clase de sucesiones de Cauchy uno de cuyos representantes es $\{|q_n|\}$, donde $|q_n|$ es el módulo definido en la sección correspondiente al número racional.

Es facil demostrar que esta definición del módulo es correcta e independiente del representante elegido. En efecto, para los números racionales es conocida la siguiente desigualdad $||q_n| - |q_m|| \leq |q_n - q_m|$, y por lo tanto si $\{q_n\}$ es una sucesión de Cauchy también lo es $\{|q_n|\}$. Por otra parte si $\{p_n\}$ es otro representante de la misma clase que $\{q_n\}$ la desigualdad

$$||q_n| - |p_n|| \leq |q_n - p_n|$$

permite afirmar que la definición del módulo no depende del representante elegido para representar el número.

Por otra parte, si r es un número real cualquiera correspondiente a una clase uno de cuyos representantes es $\{q_n\}$ se representa por -r el número que corresponde a la clase que contiene el representante $\{-q_n\}$. Esta definición es correcta pues si $\{q_n\}$ es una sucesión de Cauchy también lo es la $\{-q_n\}$, además es facil demostrar que la clase que corresponde a $\{-q_n\}$ es independiente del representante $\{q_n\}$ elegido en la clase que [illegible] r representa r.

Con esta definición es evidente que $r = -(-r)$ y teniendo en cuenta las relaciones correspondientes para los números racionales se demuestra facilmente

1º Si $r \geq 0$ entonces $|r| = r$ y reciprocamente

2º Si $r \leq 0$ entonces $|r| = -r$ y reciprocamente

3º Si $r = 0$ entonces $|r| = 0$ y reciprocamente

4º Si $r > 0$ entonces $-r < 0$ y reciprocamente

5º Si $r < r'$ entonces $-r > -r'$.

Igual que para los números racionales, los números reales > 0 se llaman positivos; mientras que los < 0 se llaman negativos.

5.- Suma de números reales.- ~~XXXXX~~ Se puede extender la operación suma del campo racional Q al campo real R, es decir, es posible definir una operación que cuando los núameros son racionales coincide con la suma definida en el campo racional (vease la sección correspondiente) y además que en R cumple las mismas leyes formales que la suma utilizada en el campo racional.

En efecto sean r y r' dos números reales, y sean $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ un representante de cada una de las clases que corresponden a r y r' respectivamente. Entonces la suma de r y r' que se representa por $r + r'$ será el número correspondiente a la clase de sucesiones de Cauchy que contiene el representante $\{q_n + q'_n\}$, donde $q_n + q'_n$ tiene el significado el usual del campo racional.

Para probar que esta definición es correcta es suficiente demostar que $\{q_n + q'_n\}$ es una sucesión de Cauchy y que la clase que la contiene es independiente de los representantes elegidos en las clases que representan r y r'.

La demostración del primer punto es casi igual a la del principio de la demostración de la proposición 5, y para demostrar la independencia respecto a los representantes elegidos se procede como sigue: Sea

$\{p_n\}$ otro representante de la clase que corresponde a r y $\{p_n'\}$ otro representante de la clase correspondiente a r'. Por definición las sucesiones $\{q_n - p_n\}$ y $\{q_n' - p_n'\}$ tienen límite 0. Por consiguiente es facil demostrar que tambien tendrá límite 0 la sucesión

$$\{(q_n + q_n') - (p_n + p_n')\}$$

lo que equivale a decir que la sucesiónes

$$\{q_n + q_n'\} \qquad y \qquad \{p_n + p_n'\}$$

pertenecen a la misma clase, esto es lo que se queria demostrar.

La suma que acabamos de definir es asociativa y conmutativa por serlo la de los números racionales que intervienen al sumar los terminoa de los diefrentes representantes. Por otra parte el número cero es neutro respecto a ella, según puede comprobarse facilmente. Además cada número r que se supone corresponde a una clase que contiene el representante $\{q_n\}$ tiene un opuesto -r que corresponde a la clase que contiene el representante $\{-q_n\}$ y el cual verifica evidentemente $r + (-r) = 0$.

Por lo tanto los números reales con la suma que acabamos de definir forman un grupo abeliano.

Proposición 8.- <u>La restricción al campo racional</u> Q <u>de la suma que acabamos de definir en el campo real</u> R <u>es la suma empleada en anteriormente a los números racionales</u>.

La demostración se efectua de manera semejante a la de la proposición 7.

Finalmente de las definiciones de orden y suma se sigue inmediatamente que de $r > r'$ se deduce $r + r'' > r' + r''$, donde r'' es un número real arbitrario, y de ello se puede deducir tambien que si $r \geq r'$ entonces $r + r'' \geq r' + r''$. Asimismo facilmente se deduce de la definición de módulo que $|r + r'| \leq |r| + |r'|$.

6.- Producto de los números reales.- Antes de dar la definicion del producto es necesario demostrar dos proposiciones que permitirán de-

demostrar que la definición que daremos es correcta, o mejor dicho que el producto de los números reales es siempre otro nu'mero real completamente determinado.

estudiar

Propósición 9.- Los terminos de una sucesión de Cauchy son acotados superior e inferiormente

En efecto, sea $\{q_n\}$ la sucesión de Cauchy dada. Por definición para cualquier $\varepsilon > 0$, puede determinarse un número k tal que

$$|q_n - q_m| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad n,m > k$$

por lo tanto, de la identidad

$$q_m = q_{k+1} + (q_m - q_{k+1})$$

se sigue

$$|q_m| \leq |q_{k+1}| + \varepsilon \qquad \text{para} \qquad m > k$$

y si suponemos que M es un número ~~cantidad~~ superior al mayor de los números $|q_1|, |q_2|, \ldots, |q_k|, |q_{k+1}| + \varepsilon$, para todo valor de n se verificará

$$|q_n| < M$$

o lo que es equivalente

$$-M < q_n < M \qquad \text{para todo} \qquad n \in N.$$

Proposición 10.- Sean $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ dos sucesiones de Cauchy, entonces la sucesión $\{q_n q'_n\}$ es también de Cauchy.

En efecto, sean M y M' las cotas que según la proposición 9 corresponden respectivamente a las sucesiones $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$, Además por hipotesis y para cualquier $\varepsilon > 0$ sera posible determinar los números naturales k y k' tales que

(16) $$|q_n - q_m| < \varepsilon/(2M') \qquad \text{para} \qquad n,m > k$$

(17) $$|q'_n - q'_m| < \varepsilon/(2M) \qquad \text{para} \qquad n,m > k'$$

Por otra parte de la identidad

$$q_n q'_n - q_m q'_m = (q_n - q_m)q'_n + (q'_n - q'_m)q_m$$

se deduce

$$|q_n q'_n - q_m q'_m| \leq |q_n - q_m||q'_n| + |q'_n - q'_m||q_m|$$

y de (16),(17) y el significado de M y M', se sigue

$$|q_n q'_n - q_m q'_m| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad n,m > k''$$

donde k" es el mayor de los números naturales k y k'.

Definición del producto de dos númeroa reales.- Sean r y r' dos números reales cualesquiera, y sean $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ un representante de cada una de las clases de sucesiones de Cauchy que representan r y r'. Entonces el producto rr' será el número representado por la clase de sucesiones de Cauchy uno de cuyos representantes es el $\{q_n q'_n\}$.

En primer lugar la proposición 10 demuestra que $\{q_n q'_n\}$ es una sucesión de Cauchy que podemos tomar como representante de una clase y que por lo tanto corresponderá a un número real determinado. Para probar que esta definición determina efectivamente el número producto, basta demostarr que este es independiente de los representantes elegidos. Sea pues $\{p_n\}$ otro representante de la misma clase que $\{q_n\}$. Por definición la sucesión $\{q_n - p_n\}$ tiene pues limite 0, y por consiguiente, para todo $\varepsilon > 0$ es posible determinar un número real k tal que

$$|q_n - p_n| < \varepsilon/M' \qquad \text{para} \qquad n > k,$$

donde M' es la cota que con la proposición 9 puede determinarse para los módulos de los terminos de las sucesiones $\{q'_n\}$. Por lo tanto de esta desigualdad se deduce

$$|q_n q'_n - p_n q'_n| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad n > k.$$

Como ε es arbitrario, esto demuestra que $\{q_n q'_n\}$ y $\{p_n q'_n\}$ pertenecen a la misma clase y puesto que lo mismo puede demostrarse cambiando el representante elegido en la clase que determina r', queda demostrado que la definición del número producto es independiente de los representantes elegidos para representar las clases correspondientes a los números factores.

La asociatividad del producto y la distributividad del mismo respecto a la suma en Q implican para los números reales que el producto es asociativo y además distributivo respecto a la suma en R. Por otra parte, también es facil ver que el producto tal como se ha definido es conmutativo.

Las propiedades demostradas hasta ahora de que los números reales forman un grupo abeliano respecto la suma, y la asociatividad y distributividad del producto permiten afirmar que los números reales con estas definiciones de sumas y de producto forman un ~~xxxxxx~~ un anillo conmutativo Pero ~~con un razonamiento bastante facil~~ se puede enunciar y demostrar uno de los principales resultados de esta sección, a saber:

Proposición 11.- <u>Los números reales con la definición de sumas y producto dados forman un cuerpo.</u>

Para probar que es un cuerpo unicamente se debe demostrar que todo nupmero $r \neq 0$ tiene un inverso respecto al producto, pues según acabamos de indicar el conjunto de los números reales con las definiciones de suma y de producto dadas es un anillo con la propiedad conmutativa en el producto.

Según la proposición 4 pra todo representante $\{q_n\}$ de una clase de sucesiones de Cauchy que corresponde a un número $r \neq 0$ es posible determinar un $\eta > 0$ y un número natural k tales que

$$|q_n| > \eta \qquad \text{para} \qquad n > k$$

si variamos este representante de manera que para los valores de $n \leq k$ tomamos $q_n = \eta$ el nuevo representante no tendrá ningún termino nulo, y además pertenecerá a la misma clase que el anterior por tener los elementos iguales a partir de un cierto valor de n. Continuaremos representando por $\{q_n\}$ a la nueva sucesión; entonces se demuestra facilmente que la sucesion

$$(18) \qquad \left\{\frac{1}{q_n}\right\}$$

es también una sucesión de Cauchy. En efecto, en primer lugar puesto que suponemos que la $\{q_n\}$ tiene todos sus terminos no nulos, la sucesión (18) esta correctamente definida. Por otra parte la igualdad

$$\left|\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_m}\right| = \frac{|q_n - q_m|}{|q_n q_m|} \leq \frac{|q_n - q_m|}{\eta^2}$$

permite demostrar facilmente que la sucesión (18) es una sucesión de Cauchy que se puede considerar como un representante de una clase que corresponde a un número r'. Además es facil ver que el número r' es independiente del representante elegido para representar la clase correspondiente a r.

Por otro lado la definición de producto nos permite afirmar sin más que rr' = 1;y por lo tanto representaremos el inverso r' de r por 1/r. Asimismo se puede demostrar facilmente que el inverso del número real r es el unico número cuyo producto por r es igual a 1.

Proposición 12.- <u>La restriccióna l subcuerpo</u> Q <u>del producto que acabamos de definir en el cuerpo real</u> $\mathbb{R}$ <u>es simplemente el producto habitual para los números racionales.</u>

La demostración es casi igual a la de la proposición 8 para la suma.

Por otra parte introduciendo el ~~xxxxxxx~~ orden es facil demostrar que, si $r > r'$ y $r'' > 0$, resulta $rr'' > r'r''$, y del mismo modo, si $r \geq r'$ y ~~xxxxxxxxxxxx~~ $r'' \geq 0$, se sigue $rr'' \geq r'r''$.

Además la relación Or =0, donde r es un número real arbitrario, es casi evidente, y su demostración utilizando representantes de las clases correspondientes no ofrece dificultad alguna utilizando la proposición 9 y un razonamiento sumamente sencillo.

Finalmente, es también facil ver que el opuesto del número r, o sea -r, es igual al producto de r por el opuesto de 1, o sea

$$-r = (-1)r.$$

Por otra parte también son evidentes las relaciones

$$-(-r) = r, \quad (-r)r' = -(rr') \quad (-r)(-r') = rr', \quad |rr'| = |r||r'|.$$

7.- ~~Diferencia, notación,~~ sucesiones y límite de números reales .- ~~La expresión r - r',~~ el número r+(-r') donde r y r' son números reales cualquiera, ~~representa el número que sumado a r' da como resultado r. Es facil demostrar que se puede escribir~~ es el que sumado a r' da como resultado r. Por lo tanto lo representaremos por r-r' (r - r' = r + (-r')), como se hace en el subcuerpo racional

~~(19)~~

~~En efecto, por la propiedad asociativa de la suma resulta~~

$$\cancel{(r + (-r')) + r' = r + ((-r') + r') = r + 0 = r}$$

~~lo cual demuestra que r + (-r') es un número que sumado a r' da r. Además puesto que según lo dicho al final del número 5, de $r_1 > r_2$, se sigue $r' + r_1 > r' + r_2$, resulta que existe un solo número que sumado a r' da r. Y por consiguiente es el dado por (19).~~

Entonces la ~~Por otra parte la~~ monotonia de la suma ~~xxxxxxxxxx~~ (indicada al final del nº 5) permite afirmar que si $r > r'$ de $(r - r') + r' = r$ se sigue $r - r' > 0$,. Por el contrario si $r < r'$, entonces $r - r' < 0$. Además también es facil demostrar las siguientes afirmaciones :

$$-(r - r') = r' - r$$

Si $r' < r''$ entonces $r - r' > r - r''$

Si $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq r_4$ entonces $r_1 - r_4 \geq r_2 - r_3$

Si $r_1 \geq r_2 \geq r_4$ y $r_1 \geq r_3 \geq r_4$ entonces $|r_2 - r_3| \leq r_1 - r_4$

Para todo número natural k y para cualquier número real positivo r es posible determinar un número positivo r_1 tal que $r_1^k = r$. Este número r_1 se llama la raiz k-esima aritmetica de r.

En efecto sea $\{q_n\}$ un representante de la clase que define r. En el subcuerpo de los númeroa racionales según la aritmética es posible determinar una sucesión $\{q'_n\}$ tal que para todo n se verifique

$$|q'^k_n - q_n| < 1/n$$

(suponemos que todos los q_n son positivos cosa posible puesto que r es positivo) de esta desigualdad se sigue que $\{q'^k_n\}$ es un representante de la clase que define r. Y puesto que es facil demostrar que $\{q'_n\}$ es una sucesión de Cauchy, el número r_1 definido por la clase que contiene el representante $\{q'_n\}$ verificará

$$r_1^k = r$$

como se queria demostrar. Esta igualdad también se representa por

$$r_1 = \sqrt[k]{r}.$$

Cuando k es un número natural impar no es necesario suponer r positivo, entonces la radicación aritmética es posible también para números [illegible].

Si en lugar de tomar como en el nº 1, A = Q se toma A = R se puede definir sucesiones de números reales del mismo modo que alli se definen sucesiones de números racionales, es decir, se habra ampliado la noción de sucesión del campo racional al cuerpo real. Como hemos definido el orden, el módulo y la diferencia en el campo real, podremos asimismo ampliar la noción de límite que dabamos para sucesiones de números racionales dandola para sucesiones de números reales, a saber: Sea $\{r_n\}$ $n \in N$ una sucesión de números reales, si existe un número $r \in R$ tal que para todo $\mathcal{E} \in R$, $\mathcal{E} > 0$ es posible determinar un número natural $k = k(\mathcal{E})$ de modo que

$$|r - r_n| < \mathcal{E} \qquad \text{para} \qquad n > k$$

se dirá que la sucesión $\{r_n\}$ tiene límite r.

Igual que en Q en R si existe el límite es unico. Además toda sucesión que tiene límite se llama convergente.

Puesto que según la definición de orden dado un $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$ es posible determinar un $\varepsilon' \in Q$, $\varepsilon' > 0$ tal que $\varepsilon' < \varepsilon$ podremos demostrar facilmente.

Proposición 13.- <u>Si una sucesión de números racionales $\{q_n\}$ tiene límite q según la definición en R tendrá el mismo límite q según la definición dada en Q, e inversamente.</u>

Ahora se puede demostrar una proposición que dara mayor unidad a la definición de número real dada más arriba.

Proposición 14.- <u>Sea r un número real cualquiera y $\{q_n\}$ un representante de la clase de sucesiones de Cauchy de números racionales que corresponde a r, entonces el límite en R de $\{q_n\}$ es r</u>

En efecto, el número $r - q_m$, donde se supone que m toma un valor que de momento supondremos fijo, correspondera a la clase de sucesiones de Cauchy uno de cuyos representantes es $\{q_n - q_m\}$ $n \in N$. Además puesto que $\{q_n\}$ es una sucesión de Cauchy, para cualquier $\varepsilon > 0$ es posible determinar un número natural k tal que

$$|q_n - q_m| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad n, m > k$$

Por lo tanto segun las definiciones de orden y módulo es facil ver que

$$|r - q_m| \leq \varepsilon \qquad \text{para} \qquad m > k;$$

la arbitrariedad de ε , según la definición de límite dada en este mismo nº, permite afirmar que $\{q_n\}$ tiene límite r.

En el nº 2 hemos dicho que cuando en una clase de sucesiones de Cauchy de números racionales sus reppesentantes tienen límite racional q esta clase representa a este número q, ahora acabamos de ver que con la ampliación de las definiciones de orden, módulo, suma, producto y límite a R la clase de sucesiones de Cauchy de números racionales que representa un número real r cualquiera tiene también la propiedad de que sus representantes tienen todos límite r. De esto se sigue que Q es denso en R, lo que quiere decir que para todo $r \in R$ puede hallarse un número $q \in Q$ de modo que el módulo de la diferencia $r - q$ sea inferior a cualquier número > 0 dado.

Igual que para los números racionales puede darse la definición de sucesión de Cauchy de números reales, y, lo mismo que en Q, en R toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy pues

$$|r_n - r_m| \leq |r - r_n| + |r - r_m|$$

según la relación del final del nº 5.

Pero al contrario de lo que sucedia en Q, en R es valido el reciproco, es decir: ~~podemos enunciar y demostrar~~

7 Proposición15.- <u>En R la condición necesaria y suficiente para que una sucesión sea convergente, ~~es~~ que sea una sucesión de Cauchy.</u>

Como ya hemos probado que toda sucesión convergente de números reales es una sucesión de Cauchy, para demostrar la preposición 15 es suficiente demostrar que toda sucesión de Cauchy tiene un límite.

Sea $\{r_n\}$ una sucesión de Cauchy de números reales, por definición para cualquier $\varepsilon > 0$ puede determinarse un número natural $k = k(\varepsilon)$ tal que

$$|r_n - r_m| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad n, m > k.$$

Por otra parte si $\{\varepsilon_n\}$ es una sucesión de números positivos que tiene límite 0, puesto que según hemos dicho todo número real es límite de una sucesión de números racionales, para cada r_n se puede determinar un q_n tal que

$$|r_n - q_n| < \varepsilon_n.$$

Además puesto que suponemos que $\{\varepsilon_n\}$ tiene límite cero podremos determinar un k' de modo que

(20) $\qquad \varepsilon_n < \varepsilon \qquad$ para $\qquad n > k'$

y por lo tanto si k" es el mayor de los números naturales k y k' resultará

(21) $\quad |q_n - q_m| \leq |q_n - r_n| + |r_n - r_m| + |r_m - q_m| < 3\varepsilon \quad$ si $\quad n,m > k''$

esta desigualdad resulta como en otras ocasiones de la relación del final del nº 5.

De (21) dada la arbitrariedad de ε se sigue que la sucesión $\{q_n\}$ es una sucesión de Cauchy de números racionales. Por lo tanto puede tomarse como representante de una clase que define un número real r. Según la proposición 14 la sucesión $\{q_n\}$ tiene límite r, o sea, es posible para cualquier $\varepsilon > 0$ determinar un número natural k''' tal que

$$|r - q_n| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad n > k'''$$

y si suponemos que k' verifica (20) para este valor de ε, y si k_1 es el mayor de los números naturales k' y k''' tendremos

$$|r - r_n| \leq |r - q_n| + |r_n - q_n| \leq 2\varepsilon \qquad \text{si} \qquad n > k_1$$

y la arbitrariedad de ε demuestra que $\{r_n\}$ tiene límite $r \in R$. que es lo que se queria demostrar.

En consecuencia el metodo de las sucesiones de Cauchy que nos ha permitido ampliar el cuerpo Q no permite ampliar el cuerpo R. Esta propiedad se expresa diciendo que R es completo.

Teniendo en cuenta el orden y la monotonia respecto a la suma y al producto expresadas por

de $r \geq r'$ se sigue $r + r'' \geq r' + r''$ $\qquad$ (r'' arbitrario)

de $r \geq r'$, si $r'' \geq 0$, se sigue $rr'' \geq r'r''$,

que son las propiedades que definen un cuerpo ordenado,) la proposición 11 puede completarse de la siguiente forma:

Proposición 16.- R <u>es un cuerpo completo y ordenado.</u>

Podria demostrarse que todo cuerpo completo y ordenado es isomorfo al cuerpo de los números reales pero como este resultado no nos ~~xxx~~ seria de utilidad para la continuación de esta sección y puesto que además su demostración es algo complicada no lo haremos.

Por el contrario vamos a demostrar otra propiedad del cuerpo R

Proposición 17.- El cuerpo R es arquimediano.

Sean r y r' dos nu'meros reales positivos y $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$ dos representantes pertenecientes respectivamente a la clase que corresponden a r y r'. Supongamos que $r < r'$, para demostrar la proposición es suficiente probar la existencia de un número natural k tal que $kr > r'$.

En primer lugar según la proposición 4, alterando los primeros terminos de la sucesión $\{q_n\}$, lo cual no cambiara la clase a que pertenece, puede determinarse un número racional $\eta > 0$ tal que para todo valor de n se cumpla $q_n > \eta$.

En segundo lugar por la proposición 9 podremos determinar un número racional M' tal que para todo valor de n

$$q'_n < M'$$

y puesto que el cuerpo racional Q es arquimediano, se podrá determinar un número natural k de modo que

$$k\eta > M'$$

y con mayor motivo para todo valor de n

$$kq_n > q'_n$$

y según la definición de orden y producto resultará finalmente

$$kr > r'$$

que es lo que se queria demostrar

para todo n exista por lo menos un punto $x_n \neq x_0$ y $x_n \in E(x_0, 1/n)$ para el cual

$$|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$$

por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ no verificaría la condición supuesta.

4.- Continuidad.- Si x_0 es un punto perteneciente al campo de definición C de f y además es un punto de acumulación del mismo entonces cuando

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

diremos que f es continua en x_0.

Si f es continua en cualquier punto de su campo de definición se dice simplemente que f es continua