

RESULTADOS DE APLICABILIDAD PEDAGÓGICA DE UNA INVESTIGACIÓN COGNITIVA EN EL APRENDIZAJE DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

ÁLVAREZ, J.A. y PANIZZA, M.

Universidad de Belgrano, Facultad de Tecnología. Argentina.

Trabajo parcialmente subvencionado por PID 0384/85 - CONICET

SUMMARY

We review some results of an investigation on the cognitive process involved in situations of mathematical learning. The issues have been selected because of their importance on the development of a didactical teaching of mathematics, centered in the characteristics of the subject learning that particular domain. Following this criterium we present the most important features and applications that can be proposed by a cognitive study of: the influence of previous naïve concepts on the representation of a cognitive domain; aspects related to problem representation; and error as a diagnostic instrument.

RESUMEN

Se exponen algunos resultados de la investigación del proceso cognitivo involucrado en situaciones de aprendizaje de la matemática. Los temas han sido elegidos por su importancia para el desarrollo de una didáctica de la enseñanza de la matemática, centrada en las características del sujeto aprendiendo ese dominio particular. Siguiendo ese criterio se presentan las características más relevantes y las aplicaciones que puede ofrecer un estudio cognitivo: la influencia de conceptos ingenuos previos en la representación de un dominio cognitivo; aspectos relacionados con la representación de problemas; y el error como instrumento de diagnóstico.

El presente artículo expone ideas de aplicabilidad pedagógica, producto de un trabajo que intenta caracterizar los procesos de aprendizaje, pensamiento y resolución de problemas de distintos tipos de sujetos en el área de Análisis Matemático. Existen investigaciones cognitivas de aplicación en educación relativas a otros dominios temáticos, como son la física, el álgebra y la programación.

El área del Análisis Matemático nos resulta especialmente interesante para un estudio de este tipo, por poner en juego aspectos de la estructura cognitiva del sujeto ligados a la percepción del mundo físico y a la interacción que el sujeto realiza con él. A través de nuestra experiencia docente hemos observado a menudo di-

ficultades de aprendizaje que sugieren la influencia de las nociones intuitivas y operaciones asociadas a la percepción, así como del razonamiento propio del sentido común, y del lenguaje natural, sobre la conformación del concepto de espacio matemático y las operaciones y estrategias de razonamiento características del desempeño experto.

Las cuestiones aquí planteadas son a menudo intuitivas fragmentariamente por el docente, pero para abarcarlas en su totalidad y justificación se requiere un estudio cognitivo de los sujetos realizando tareas propias del dominio de interés. Ello constituye un área de complementariedad efectiva y provechosa entre el investigador en Psicología Cognitiva y el docente. De hecho, actualmente, investigaciones cognitivas en distintos dominios temáticos (física, álgebra, programación, etc.) están fundando una aproximación novedosa y aparentemente efectiva, a una didáctica científica de la enseñanza de las ciencias. (Resnick 1983, Glaser 1984, Reif 1986).

Consideramos que hay tres elementos de interés especial por sus aplicaciones a la educación, dentro del estudio cognitivo de la organización de un dominio conceptual:

— la influencia de conceptos ingenuos previos en la representación de dicho dominio,

- aspectos relacionados con la representación de problemas,
- el error como instrumento de diagnóstico.

A. LA INFLUENCIA DE CONCEPTOS INGENUOS PREVIOS EN LA REPRESENTACIÓN DE UN DOMINIO COGNITIVO

Al comenzar un estudio sistemático del Análisis Matemático en la universidad los sujetos poseen un conjunto de nociones ingenuas sobre los conceptos involucrados. Éstas son básicamente de dos tipos: ideas de naturaleza intuitiva y nociones teóricas presistemáticas (1).

Daremos algunos ejemplos que ponen en evidencia la influencia de dichas nociones cuando se constituyen en modelos para el aprendizaje de un concepto, especialmente su carácter *facilitador* o *perturbador* según el concepto, que hay que adquirir preserve o no las propiedades de la noción sobre la que se apoya el aprendizaje.

1. La *noción (intuitiva)* del espacio y el tiempo como objetos continuos facilita la noción de completitud de los reales, a través de su isomorfismo con la recta «sin agujeros»: los sujetos poseen una representación interna del espacio que trasladan naturalmente a la recta, plano o espacio geométricos, por lo que se convencen de que la propiedad de completitud de los reales es válida mucho antes de estar en condiciones de comprender una demostración, y aun antes de poder entender o expresar formalmente dicha propiedad.

2. Otro tanto ocurre con la propiedad arquimediana de los números con el orden habitual: encuentra su *sopORTE intuitivo* en la representación interna de la recta geométrica (según la cual $a < b$ si a está a la izquierda de b) a la que el sujeto adjudica naturalmente las propiedades del mundo físico ligadas a la percepción (por ejemplo, la posibilidad virtual de concatenar objetos de determinada longitud hasta la superación de otra longitud dada). Ahora bien, este soporte intuitivo es tan fuerte, que se convierte en *perturbador del aprendizaje* del concepto de «conjunto de los números racionales con un orden no arquimediano», siendo para la formación matemática a un nivel superior tan importante la formalización de este concepto como el de conjunto de los números racionales con el orden habitual. Por ejemplo, consideremos el orden dado a los racionales positivos, tal que de dos fracciones irreducibles define como menor a aquella de denominador menor, y en el caso de igual denominador, a aquella de numerador menor. No es difícil para los sujetos describir o comprender la forma en que los números quedan ordenados según esta definición ($1/2$ menor que $1/3$, etc.). Sin embargo, aun aceptando la validez de que ningún múltiplo de $1/2$ superará a $1/3$, los sujetos buscan evidencia de ello en la recta, produciéndose las perturbaciones inherentes al conflicto entre el orden habitual, intuitivo, y el nuevo orden definido.

En realidad, deberíamos decir que el orden habitual es-

tan intuitivo, que en realidad perturba, psicológicamente, la comprensión de que el mismo es producto de una definición, y asimismo la concepción de otro orden posible.

3. Es característico de la práctica docente la utilización de nociones adquiridas a través de situaciones concretas como apoyo para la adquisición de conceptos que requieren capacidad de abstracción. Un ejemplo de ello es la *noción (presistemática)* de velocidad en relación al concepto de derivada.

4. El *conocimiento (presistemático)* de los números enteros favorece, por generalización, una representación interna de los conjuntos numéricos que *dificulta* la comprensión de que el concepto de inmediato superior no tiene sentido en los reales. Algunos sujetos construyen «siguientes» fabricando para cada número un conjunto numérico implícito relacionado con la notación, en el cual podrían «sumar 1» en algún sentido (en el último decimal, en el radicando, en el denominador, etc.). En entrevistas a sujetos observamos, por ejemplo, que dicen que el «número» siguiente de 3,002 es 3,003, el siguiente de $1/4$ es un $1/3$, el siguiente de $\sqrt{2}$ es $\sqrt{2+1}$, etc. (Álvarez y Panizza 1987).

Estas ideas ingenuas son interesantes desde el punto de vista pedagógico no sólo como descripción de un estado inicial de conocimiento, sino por la evolución de las mismas en el proceso de aprendizaje. Es sabido que durante dicho proceso el sujeto que aprende tiende a completar el conocimiento de alguna manera, en busca de un orden que le dé estructura. De esta manera se generan permanentemente ideas ingenuas que progresivamente se aproximan al concepto correcto (si hay aprendizaje).

En este contexto queda claro que la expresión «ideas previas» no tiene un carácter de absoluto que indique anterioridad al proceso de aprendizaje del dominio, sino que es relativa a los progresivos saltos cualitativos característicos de la adquisición del conocimiento.

Según esta óptica, el *conjunto de las ideas ingenuas de un sujeto en un momento particular, correctamente interpretado, da cuenta de algunos aspectos del estado de conocimiento del dominio (de ese sujeto) en ese momento particular* y debería ser un instrumento de ayuda al docente para facilitar el aprendizaje.

Hasta aquí señalamos particularidades de las ideas ingenuas previas, como facilitadoras o entorpecedoras del aprendizaje.

Expondremos ahora otras interpretaciones que realizamos en el curso de nuestra investigación y que consideramos relevantes por sus aplicaciones a la pedagogía:

Las *nociones intuitivas* de conceptos como los de espacio físico, recta, continuidad, etc. están ligadas a la experiencia perceptivo-motriz del sujeto, son adquiridas tempranamente y constituyen el basamento de invariantes de la estructura cognitiva como son las di-

versas nociones de constancia. Desde el punto de vista de su influencia en el aprendizaje superior es importante destacar que si bien esas nociones se encuentran representadas mentalmente, no lo están mediante formalismos característicos de etapas posteriores (por ejemplo, representaciones operatorias formales o lógicas piagetianas), razón por la cual son difícilmente accesibles de modo consciente por parte del alumno (Piaget 1965, 1972, 1975, 1977, 1980, Beth y Piaget 1980, Ericson y Simon 1980, Carey 1982).

Las *nociones presistemáticas*, como las relativas a los distintos conjuntos numéricos, operaciones y propiedades, han sido adquiridas paulatinamente en estadios previos de aprendizaje, y están representadas mentalmente mediante formalismos más o menos rigurosos. A pesar de ello, en la medida en que esas nociones se encuentren automatizadas, comparten con las nociones intuitivas la *dificultad para acceder a ellas de modo consciente*.

Llegamos así a determinar *dos aspectos relevantes de un estudio cognitivo que interprete y sistematice las nociones ingenuas o previas características de un dominio*, por sus aplicaciones pedagógicas:

— en tanto una correcta interpretación *da cuenta del estado de conocimiento de un sujeto particular* en un momento determinado, y de los posibles estados anteriores y posteriores, es fuente para una *conducción personalizada* del aprendizaje;

— en tanto dicha sistematización *hace explícitos aspectos de las ideas ingenuas* que por su naturaleza son un fenómeno no observable y no consciente, ofrece tanto al alumno como al docente una herramienta para *hacerlas revisables y contrastables*. Esto es de especial interés cuando dichos aspectos de las ideas ingenuas interfieren en el aprendizaje de los conceptos formales correctos.

B. ASPECTOS RELACIONADOS CON LA REPRESENTACIÓN DE PROBLEMAS

Cuando un sujeto lee un problema construye una representación del mismo, que está dada por un conjunto de datos (objetos, propiedades y relaciones), una meta y un conjunto de operaciones y procedimientos que le permiten, o no, llegar de los datos a la meta. Se observa un espectro amplio de posibilidades entre las situaciones extremas de no resolución del problema y resolución correcta (comparable a la experta) (Chi, Feltoch y Glaser 1981).

Expondremos algunas de las hipótesis provisionales relativas a la representación de problemas basadas en nuestro estudio:

La representación interna que un sujeto construye frente a un problema busca configurar a éste con dos características, las que dependen de la estructura cognitiva particular (del sujeto),

- *ser un problema (para ese sujeto);*
- *ser resoluble.*

La primera de estas hipótesis acerca del funcionamiento de los sujetos podría expresarse más fácilmente diciendo que si algo es *presentado como un problema* el sujeto trata de *configurarlo* como tal. Para ello utiliza como *estrategia metacognitiva* el mantenimiento de un nivel de dificultad esperado (para considerar a «algo» como un problema).

Esto es, si un sujeto interpreta un problema de modo que su resolución es obvia, o sea, su dificultad inexistente, toma esta información como indicio de que ha obtenido una representación errónea, lo que lo motiva a intentar una nueva representación.

La *segunda de estas hipótesis* expresa que los sujetos suelen *forzar la representación* de manera que ésta haga posible la *resolución* del problema.

Por ejemplo, en un estudio que realizamos para caracterizar los conocimientos previos de Análisis Matemáticos, buscamos determinar si de manera intuitiva los sujetos tenían representada la propiedad arquimediana de los números. Preguntamos a un conjunto de sujetos que si teniendo segmentos de dos longitudes a y b (con a más pequeño que b) sería posible superar la longitud b del segmento mayor, colocando consecutivamente un cierto número de segmentos de longitud a . No se pedía una demostración, sino solamente una opinión. Algunos sujetos contestaron que «sí, colocando un número suficientemente grande de veces al segmento de longitud a se logrará superar la longitud del segmento b », lo que era de esperar. Sin embargo, un conjunto muy numeroso de sujetos recurrió a una categoría no estipulada: «depende». Las respuestas de este tipo fueron:

«depende, porque si a no es mucho más pequeño que b , sí; ahora, si no, no»

«depende de a , de b y del cierto número, porque si el número es grande, sí; ahora, si no, no».

El primer grupo de respuestas del tipo «depende» nos hizo pensar que o bien los sujetos no tenían la propiedad arquimediana representada intuitivamente, o bien la pregunta era tan obvia que necesitaban algún nivel de dificultad para considerarla como un problema. Dado que no existía evidencia en favor de una u otra explicación realizamos entrevistas clínicas a sujetos individuales, indagatorias sobre este punto (registrando todos los comentarios que hacían sobre el problema y sobre su propia conducta). Constatamos que varios sujetos esperaban, efectivamente, un nivel de dificultad determinado y operaban en consecuencia.

Al segundo grupo de respuestas del tipo «depende», corresponden representaciones que, según nuestro análisis, consideran al «cierto número» como un *dato* (que viene dado, o que falta), según el cual la respuesta es (sería) sí, o no. Es decir los sujetos consideran que si

ese «dato» lo conocieran, podrían responder por sí, o por no, es decir, podrían *resolver el problema*. Presumimos que caben distintas explicaciones para que el sujeto «necesite» representar el problema de esa manera:

— el problema ha sido presentado por nosotros sin la rigurosidad que posibilita una formulación matemática, por razones de fuerza mayor, dado que debían reducirse en lo posible las perturbaciones producidas por la no comprensión de un lenguaje formal por parte del sujeto. Esto es algo difícil de lograr sin que las ambigüedades semánticas del lenguaje natural hagan lo suyo produciendo sus propias perturbaciones;

— la segunda explicación supone que no hay influencia especial debida a la formulación del problema y que entonces la representación del «cierto número» como un dato obedece a que el sujeto no es capaz de realizar algunas o todas las operaciones que hace un experto, o no posee el sistema inferencial adecuado para las deducciones que constituyen la justificación:

1) transformar los datos y operaciones del problema (longitudes y concatenación), en datos y operaciones numéricos (números reales y producto)

2) determinar un n adecuado, (dentro de un conjunto que es infinito)

3) determinar que, como existe un n adecuado, la afirmación es válida.

La reflexión acerca de estas hipótesis nos hizo pensar que *la representación de problemas constituye un dominio particular dentro de la estructura cognitiva del sujeto*, lo que sugiere la importancia de estudiarlo como tal, buscando determinar sus *elementos, relaciones y reglas de operación*.

Pensamos que el conocimiento de dicho dominio facilitaría el proceso de enseñanza-aprendizaje al *objetivar un fenómeno no observable y generalmente no consciente* que constituye la etapa inicial en la resolución de un problema, y que cumple un papel determinante en dicha resolución. Las decisiones acerca de qué considerar como un problema, cuándo considerarlo bien representado, y el análisis de qué estrategias usar para intentar una resolución constituyen, todos, aspectos de la aplicación de las habilidades metacognitivas en la resolución de problemas. Estos aspectos metacognitivos están siendo actualmente investigados y aplicados en relación con diversas áreas educativas (Álvarez 1987-88, Chadwick 1986).

C. EL ERROR COMO INSTRUMENTO DE DIAGNÓSTICO

En el intento de realizar un estudio sistemático de los procesos de aprendizaje con el objeto de contribuir al desarrollo de una técnica de enseñanza que la tenga en cuenta, *el error adquiere valor instrumental en el diagnóstico del dominio cognitivo del sujeto*. Existen dos

tipos de diagnósticos interesantes: uno, *propio del área de conocimiento particular* en el que se evidencian dichos errores y otro, *general de la estructura cognitiva del sujeto*.

El primero de estos diagnósticos es característico de la práctica docente.

El segundo, en nuestra opinión, es tan importante como el primero, si se pretende mejorar la calidad de la enseñanza puesto que pone en evidencia leyes de comportamiento interno del sujeto, como la coherencia, la regularidad y la economía. Éstos y otros mecanismos, si bien son independientes del contenido aprendido, al ser analizados en un sujeto determinado en el contexto de una tarea particular, son indicativos del *conocimiento que el sujeto posee y es capaz de actualizar para esa tarea*.

Por ejemplo, cuando un sujeto responde que el mínimo de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $(0,1)$ se alcanza «en el valor más cercano a 0», podemos realizar dos aproximaciones:

— desde el punto de vista del contenido el problema está mal resuelto, al no existir tal número;

— desde el punto de vista de los mecanismos cognoscitivos empleados, el sujeto parece *estar operando coherentemente* con la representación mencionada más arriba según la cual cada número tiene un «número que le sigue». Esto coincide con una hipótesis de la Psicología Cognitiva, según la cual los sujetos tienen sus propios conceptos y leyes internas y operan *coherentemente* con ellos aunque las reglas en sí sean erróneas desde el punto de vista de otros dominios externos al cognoscitivo del sujeto (lógica, matemática, contenido específico, etc.).

Esto significa que *las nociones están estructuradas de manera más o menos consistente desde el punto de vista del sujeto, aunque no sean consistentes desde el punto de vista del dominio de contenido particular*.

Creemos que no se intenta, habitualmente, descubrir la *regularidad y consistencia* interna del sujeto que aprende. Motivados por la convicción señalada arriba de que el error tiene valor instrumental como diagnóstico, nos pareció fundamental indagar en este tema en nuestra investigación. Encontramos un conjunto de ideas relevantes que son las siguientes:

1. Incoherente no es sinónimo de arbitrario

Este tema es muy amplio y abarcarlo en su totalidad excede el marco de este trabajo, aun restringiéndonos a los aspectos relevantes por sus aplicaciones pedagógicas. Nos referiremos a un aspecto específico que relaciona el error con la representación de problemas, a modo de ejemplificación.

Es habitual que un experto, frente a la situación de tener que resolver dos tareas distintas, detecte y expli-

te la circunstancia de que ambas «constituyen el mismo problema» o «básicamente involucran la misma propiedad dentro de su resolución». Sabemos a partir de la práctica docente que ésta y otras (meta) valoraciones distan mucho de ser las apreciaciones de un novicio. Es más, muchas veces este tipo de sujetos en tales condiciones *parecen tener una conducta incoherente*, dado que los resultados en ambas tareas no coinciden con la característica de isomorfismo o «proximidad» detectada por el experto (Hinsley, Hayes y Simon 1977, Hayes y Simon 1974, Simon y Hayes 1976)

Explicaciones posibles hay muchas y cubren una amplia gama de posibilidades. Sin pretensión de ser exhaustivos, podemos señalar algunas posibilidades: i) aunque dos problemas sean «el mismo» desde el punto de vista de su estructura lógica, el novicio puede no detectarlo porque (por ejemplo) uno de ellos está presentado de manera formal y el otro, con elementos concretos; ii) aunque los problemas (siendo distintos) se basen principalmente en la misma (única) propiedad, la actualización de la propiedad puede ser inmediata a la formulación de uno de los problemas pero no a la del otro, de manera tal que requiera que el sujeto sea capaz de clasificar a este último como un «tipo de problema» en el que se aplica tal propiedad, o bien de poner en marcha un mecanismo inferencial complejo, a fin de resolverlo. Es evidente que desde el punto de vista de los mecanismos cognoscitivos involucrados, y aun desde el punto de vista del conocimiento de dominio, ambas tareas resultan «distintas», dado que una es más compleja que la otra.

Desde el punto de vista del experto las conductas que resultan de este tipo de situaciones suelen ser consideradas *arbitrarias o incoherentes*. Nosotros sugerimos que no se trata de arbitrariedad sino de incoherencia (externa), si por incoherencia se entiende que dos problemas equivalentes desde el punto de vista lógico, o «cercaños», no sean resueltos concordantemente por el sujeto.

Expondremos algunas *hipótesis* resultantes de la investigación, relacionadas con esas conductas:

Cuando un sujeto resuelve tareas de distinta complejidad (aunque para el experto sean iguales o «cercañas»), la falta de coherencia puede deberse a la conjunción de:

1. El conocimiento que el sujeto tiene del dominio y las estrategias de que dispone pueden facilitarle una representación adecuada para un problema y una no adecuada para el otro.

Por ejemplo contrastamos las respuestas de diversos sujetos a distintos problemas que involucraban la noción de densidad de los racionales. Algunos respondían de forma consistente con la propiedad de densidad diciendo: «entre *a* y *b* existen infinitos racionales», pero «calculando» el siguiente *a* en un problema posterior. La segunda tarea era más compleja que la primera y, aunque la imposibilidad de la existencia de siguiente

en los racionales es consecuencia directa de la propiedad de densidad, los sujetos no actualizaban la propiedad para dicha tarea, aunque, dada la respuesta al problema anterior, la conocían.

2. La resolución de cada problema, el sujeto la realiza de acuerdo con cada una de esas representaciones y en ese sentido corresponde hablar de coherencia.

La *síntesis* de esta descripción nos lleva a describir tal tipo de conductas diciendo:

— *hay inconsistencia desde el punto de vista del contenido,*

— *no la hay desde el punto de vista del sujeto.*

Esto debe ser considerado especialmente por el docente, ya que es motivo de frecuente perplejidad en el educando, quien no comprende «qué es lo que hizo mal».

2. Consistencia global versus consistencia local

Cuando un dominio de conocimiento no se encuentra estructurado totalmente, es habitual encontrar respuestas inconsistentes. Sin embargo, los sujetos intentan ser consistentes pero lo logran de manera local, debido a que sus conductas son pautadas por una comprensión fragmentaria del dominio, de sus propiedades y relaciones, y también por aspectos superficiales, ligados a la percepción y a una interpretación no rigurosa del lenguaje formal.

En experiencias destinadas al estudio de la noción de densidad, algunos sujetos dicen que «entre $1/5$ y $3/5$ hay un número (el $2/5$)» y «entre 0,2 y 0,6 hay infinitos».

Este par de respuestas ejemplifica la utilización de la propiedad de densidad en situaciones particulares, así como la habilidad con que es recuperada en los contextos correctos de su utilización (Álvarez y Panizza 1987).

Según el enfoque que damos en este trabajo, caracterizar los errores posibles o habituales *a partir de un estudio cognitivo de los sujetos, realizando tareas en un dominio dado, constituye una doble aportación a la pedagogía:*

— desde el punto de vista del dominio, debería dar al docente una visión en perspectiva que señale no solamente lo que el sujeto «no conoce» o «no es capaz de hacer» en dicho dominio, sino también el significado que ese estado de imperfección tiene en la conformación del dominio en ese sujeto. Pensamos que esa visión facilita al docente la tarea de encontrar caminos alternativos para acercar al sujeto al estado de conocimiento experto;

— desde el punto de vista de la estructura cognitiva del sujeto, debería dar una descripción psicológica (no

sólo lógica) de la relación del alumno con el objeto de conocimiento: sus mecanismos de recuperación y utilización de propiedades, sus posibilidades de hacer inferencias en contextos específicos; su capacidad para construir la representación de un problema de manera más o menos compleja, más o menos redundante, más o menos económica, etc.

Una herramienta que tiene el docente para tratar de llenar el vacío existente entre inconsistencia, desde el punto de vista del contenido, y consistencia desde el punto de vista del sujeto es trabajar sobre la consistencia local del mismo, tratando de saber qué tal local es, por qué y cómo ampliarla para producir en el sujeto inconsistencias que él mismo pueda percibir y estar motivado para remediar.

CONCLUSIÓN GENERAL

Los tres temas abordados en este trabajo constituyen una parte de nuestra investigación, que hemos resumido aquí seleccionando los aspectos más relevantes por sus aplicaciones pedagógicas.

La idea central ha sido la selección de aquellos aspectos que hasta el momento han resultado pertinentes para el desarrollo de una didáctica científica de la enseñanza de la matemática, centrada en el sujeto que aprende.

Desde un punto de vista general este trabajo constituye una aportación a la corriente de aplicación de la Psicología Cognitiva a la Educación, que ha surgido en años recientes y que mencionábamos al principio.

Nota.

Utilizamos en este trabajo la siguiente definición: *noción*: representación interna de un concepto por parte de un sujeto en un momento dado.

Por «naciones teóricas presistemáticas» no queremos significar de ningún modo conceptos no sistematizados, sino solamente conceptos que han sido adquiridos (incluso a través de un aprendizaje formal) previamente al estudio sistemático del dominio de conocimiento involucrado, en nuestro caso previamente al estudio de la materia de Análisis Matemáticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ÁLVAREZ, J.A., 1987. El rol de la computadora en la enseñanza de la lectoescritura, *Lectura y Vida*, Año VIII, Vol. (4), pp. 26-34.
- ÁLVAREZ, J.A. y PANIZZA, M., 1987. Aprendizaje de la noción de densidad y características de su aplicación. *Informe IAC 13-87*, Universidad de Belgrano, Facultad de Tecnología, Instituto de Investigación de Enseñanza no Convencional.
- BETH, E.W., PIAGET, J., 1980. 2a. ed. *Epistemología, matemática y psicología*. (Crítica: Barcelona).
- CAREY, S., 1982. Semantic development: The state of the art, en Wanner, E., Gleitman, L.R. (eds.), *Language acquisition. The state of the art*. (Cambridge Unit Press: Cambridge), pp. 347-389.
- CHADWICK, C.B., 1986. Estrategias cognitivas, metacognición y el uso de los microcomputadores en la educación, *Revista del IIE*, Año 12, No. 55, pp. 21-36.
- CHI, FELTOVICH y GLASER, 1981. Categorization and representation of physics problems by experts and novices, *Cognitive Science*, Vol. 5(2), pp. 121-152.
- CHI, GLASER, y REES, 1981. Expertise in problem solving, en Sternberg, R. (ed.), *Advances in the psychology of human intelligence*, Vol. 1. (LEA: Hillsdale).
- ERICSSON, SIMON, 1980. Verbal reports as data, *Psychological Review*, Vol. 87(3), pp. 215-251.
- GLASER, R., 1984. Education and Thinking-The role of knowledge, *Am Psychologist*, Vol. 39(2), pp. 93-104.
- HAYES, J.R., SIMON, H.A., 1974. Understanding written problem instructions, en L. Gregg (ed.), *Knowledge and cognition*. (LEA: Hillsdale), pp. 167-201.
- HINSLEY, D.A., HAYES, J.R., SIMON, H.A., 1977. From words to equations meaning and representation in algebra word problems, en Carpenter y Just, M.A. (eds.), *Cognitive processes in comprehension*. (LEA: Hillsdale), pp. 89-106.
- PIAGET, J., 1965. *The child's conception of number*. (Norton: New York).
- PIAGET, J., 1972. 2a ed. *Essai de logique opératoire*. (Dunod: Paris).
- PIAGET, J., 1975. *Introducción a la Epistemología Genética I— El pensamiento matemático*. (Paidós: Buenos Aires).
- PIAGET, J., 1977. Intellectual evolution from adolescence to adulthood, en Johnson-Laird, Wason (eds.), *Thinking* (Cambridge Univ. Press: Cambridge), pp. 158-165.
- PIAGET, J., 1980. The psychogenesis of knowledge and its epistemological significance, en Piatelli-Palmarini, M., (ed.), 1980. *Language and Learning*, (RKP: London), pp. 23-34.
- REIF, F., 1986. Scientific approaches to science education, *Physics Today*, Vol. 39(11), pp. 48-56.
- RESNICK, L.B., 1983. Mathematics and science learning: A new conception, *Science*, Vol. 220, pp. 477-478.
- SIMON, H.A., HAYES, J.R., 1976. The understanding process: Problem isomorphs, *Cognitive Psychology*, Vol. 8, pp. 165-190.