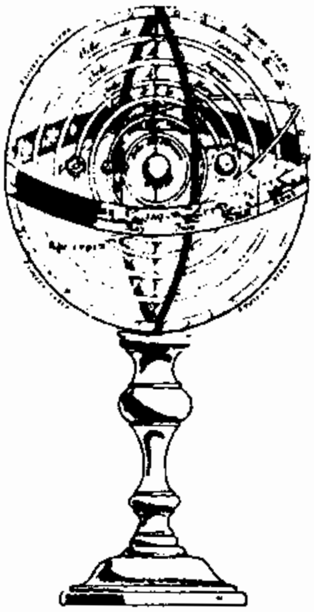
OTROS TRABAJOS



UNA INVESTIGACION DEL APRENDIZAJE DEL CALCULO ARITMETICO(*)

LAMARCA PARIS, J.Mª.
Grup Aresta. I.B. Sant Josep de Calassanç.

(*) Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que el Grupo Aresta está llevando a cabo con el soporte del ICE de la Universidad de Barcelona.

SUMMARY

The aim of this article is that of showing a specific approach in the Didactics of Arithmetic Calculus, and the results that have been achieved using it with about 300 students in the first year of BUP; we also want to show certain criteria which could allow us to improve our method.
Such criteria are based both on the realization of the didactic method itself and on the assumption of certain cognitive factors which have great influence on the learning of Arithmetic Calculus.
Throughout the developing of our approach in the Didactics of Arithmetic Calculus we have emphasized the sections devoted to the teaching of calculus, error analysis and calculus problem solving (according to Polya).

INTRODUCCION

En este artículo se pretende dar a conocer una aportación a la investigación de la enseñanza y del aprendizaje en el campo del cálculo aritmético. Concretamente, el *objetivo* del mismo consiste en la exposición de una *«Didáctica de cálculo aritmético»* específica (D.), de los *resultados* que con su aplicación se han obtenido y de unos *criterios de modificación* que permitan mejorarla.

Por cuestiones de espacio hemos creído conveniente efectuar un resumen de la D. y no detenernos en cuestiones de detalle (1). Interesa también observar que dicha D. se ha aplicado a unos *300 alumnos de 1° de B.U.P.* de tres Institutos de Barcelona (2) por miembros del Grup Aresta al comienzo del curso 83/84.

En lo referente a los criterios de modificación distinguimos dos tipos: por un lado, los que se desprenden de la propia experiencia realizada y que denominamos *criterios internos* (tales como, p.e., variaciones de tiempo, control del trabajo del alumno, etc.); por otro, aquellos que se obtengan de un conocimiento de los factores cognitivos que más influencia tienen en los resultados de la D. Estos últimos (que llamamos *criterios externos)*, por su propia naturaleza, podrán irse concretando a medida que avance la investigación específica que el Grup Aresta está llevando a cabo desde los inicios del presente curso (3); por el momento, sólo será posible adelantar un limitado número de conclusiones provisionales.

Llegados a este punto, podemos explicitar las tres características de la D. que consideramos más esenciales:

(A) En primer lugar, pretendemos que sea *transferible*, es decir, que pueda ser utilizada por cualquier profesor de Matemáticas; de ahí que, en la versión íntegra, se expongan con detalle las distintas fases de la misma, sus respectivas duraciones, etc.

(B) En segundo lugar, debe ser posible *evaluarla objetivamente;* así pues, se han diseñado pruebas paralelas (una inicial, que denominamos» Prueba m_O» — constituye el Ap. I — y otra final) a fin de poder disponer de algún tipo de medida de su efectividad (cf. 2.2.).

(C) En tercer lugar, se trata de una D. *esencialmente modificable;* esto significa que pretendemos aproximarnos en etapas sucesivas a un nivel óptimo de eficacia. En este punto es donde más se ve la necesidad de acceder a unos criterios, lo más objetivos posible de modificación (cf. 3.1. y 3.2.).

3. RESUMEN DE LA DIDACTICA PROPUESTA

1.0. Introducción

Con la presente D. se pretende alcanzar *tres objetivos* cuyos niveles de dificultad son, en principio, progresivamente crecientes (cf. 2.1).

En primer lugar, se intenta conseguir que los alumnos alcancen unos conocimientos y una seguridad mínimos en el cálculo aritmético elemental. Su grado de dificultad se concreta en la «Prueba m_O» (Ap. I).

En nuestra opinión, lo fundamental es que los alumnos adquieran un dominio satisfactorio del cálculo, aunque para ello debamos sacrificar, en cierta medida, el rigor conceptual en la presentación de los números racionales e irracionales. De hecho, una introducción adecuada de dichos números tampoco creemos que sea necesario realizarla en 1° de BUP, y más bien nos inclinamos a sostener que basta reafirmar sucintamente unos conceptos con los que el alumno está ya familiarizado desde la EGB, a fin de que aprendan a manejarlos con soltura.

No creemos, sin embargo, que se deban enseñar sólo unos mínimos rudimentos de cálculo; abandonar la aspiración de que los alumnos adquieran un dominio efectivo de técnicas de cálculo con un grado de complejidad más elevado, *lo cual constituye nuestro segundo objetivo,* es abonar las inseguridades del futuro alumno de COU que no se atreverá a simplificar una derivada o que vacilará en la resolución de los determinantes. De ahi pues, que se introduzcan ejercicios de longitud y dificultad considerable, que pueden verse reflejadas en la que denominamos «*Prueba de Nivel A*» (PRNA, y que figura en el Ap. II).

La realización de dichos ejercicios es, en muchos casos, extraordinariamente árida y engorrosa; obviamente, el alumno no está motivado para efectuar unos cálculos pesados e interminables cuya aplicación práctica considera, en el mejor de los casos, dudosa. Desde luego, parece bastante artificioso imaginar situaciones reales en las que tales cálculos fuesen necesarios; pero aún admitiéndolas no hay, desde la perspectiva del alumnos, argumentos que apoyen la penosa realización de los mismos frente al fácil uso de la calculadora de bolsillo.

Así pues, la conveniencia de incluir este objetivo en una didáctica de cálculo aritmético es discutible; en nuestra opinión, sin embargo, existen razones que *pueden* justificar su inclusión; concretamente, destacaremos dos:

(a) No es posible abordar problemas matemáticos de cierta envegadura si el cálculo constituye un obstáculo en el camino de su resolución, y el alumno debe ser plenamente consciente de este hecho.

(b) Parece razonable afirmar que los factores cognitivos que mayor relevancia tienen en la capacidad de calcular de un alumno van a ser desarrollados apreciablemente a través de un tratamiento suficientemente intensivo del cálculo aritmético. El conocimiento de algunos de estos factores (que podrá obtenerse con la investigación específica que está llevando a cabo el Grup Aresta —cf. nota (3)—) permitirá dar la suficiente relevancia a dicha afirmación (cf. 3.2).

Finalmente, deseamos alcanzar un *tercer objetivo.* Este se concreta en lograr que el alumno sea capaz de resolver cualquier *problema* de cálculo en el sentido de Polya, esto es, aquél cuya resolución se desarrolla en *cuatro fases* definidas: comprensión del enunciado, elaboración de un plan, ejecución del mismo y evaluación de todo el proceso (4).

Sin duda, esta meta es realmente ambiciosa. Creemos, sin embargo, que conviene tener en cuenta que la resolución de verdaderos problemas de cálculo está justificada no sólo por lo que observábamos anteriormente (cf. el comentario (b) precedente) sino también por tratarse de una inmediata aplicación de las técnicas de cálculo recientemente aprendidas (por lo que éstas se consolidan).

Desde el punto de vista *metodológico*, en la D. se distinguen *seis fases:* F. 1: Fundamentos teóricos, F.2: Enseñanza de técnicas de cálculo, F.3: Detección de errores aislados y dentro de un contexto de operaciones aritméticas, F.4: Tratamiento de la producción divergente y resolución de problemas, F.5: Consolidación y repaso y F.6: Realización de las pruebas de control.

Comentaremos cada una de ellas por separado. Se incluyen también unos apéndices en los que figuran las pruebas y los ejercicios y problemas más significativos para permitir una correcta comprensión de toda la D.

1.1. Fases de la Didáctica

1.1.1. Fase 1: Fundamentos teóricos

En nuestra opinión, la forma de presentar los contenidos teóricos básicos no es especialmente relevante, por lo que hemos omitido exponer un guión detallado de los conceptos fundamentales a tratar. Sin embargo, y a fin de que el profesor pueda tener un punto de referencia para futuras reflexiones, se ha incluido una colección exhaustiva de cuestiones, que cubre prácticamente todo el complejo de contenidos básicos que el alumno debe dominar antes de pasar a niveles superiores (véase en el Ap. III una muestra de las mismas). Dicha lista de preguntas cortas elementales se puede comentar en clase activamente, en base a las respuestas dadas por los propios alumnos a cada cuestión.

La duración total de esta fase es de unas seis horas.

1.1.2. Fase 2: Enseñanza de técnicas de cálculo

En esta fase se trata de proporcionar al alumno el dominio de las técnicas fundamentales de cálculo. Para ello se alterna la exposición de los ejemplos introductorios de cada técnica con ejercicios de consolidación, durante un máximo de once sesiones de una hora. Concretamente, se dedican seis de ellas a explicar seis ejemplos de cálculo con fracciones y cinco a detallar la resolución de cinco ejemplos de cálculo con radicales (ver el Ap. III).

Todos los ejemplos y ejercicios utilizados en esta fase se caracterizan por el hecho de que las técnicas de cálculo involucradas en ellos se desprenden del propio aspecto formal del enunciado o bien están explicitadas claramente en él (p.e., «Racionalizar la fracción...»).

1.1.3 Fase 3: Detección de errores (DDE) aislados y dentro de un contexto de operaciones aritméticas

La inclusión de esta fase tiene como finalidad última potenciar la capacidad de autocrítica del alumno. Sin duda, la aptitud de criticar unos resultados o unos cálculos intermedios es decisiva para la correcta realización de las operaciones: más que de evitar los errores, se trata de darse cuenta de los que ya se hayan podido cometer. En este sentido, alcanzar dicha meta es crucial para conseguir los tres objetivos propuestos en esta D.

El desarrollo de esta fase se lleva a cabo a través del tratamiento de dos tipos de ejercicios: los de DDE aislados y los de DDE dentro de un contexto de operaciones aritméticas. Ejemplos del primer tipo pueden observarse en la 2ª parte de la «Prueba m_0 (Ap.I.), dado que hemos considerado que la capacidad de detectar errores aislados forma parte de los conocimientos mínimos de cálculo que un alumno debe poseer; de ahí que intentar mejorar dicha capacidad forme parte de nuestro primer objetivo. Los resultados obtenidos en DDE, sin embargo, exigen un *replanteamiento* de dicho objetivo (cf. 2.1).

Ejemplos del segundo tipo figuran en el Ap. III; como se puede ver, son ejercicios cuyos cálculos están totalmente realizados, pero con alguna incorrección en ciertos pasos que el alumno debe descubrir. Su tratamiento se lleva a cabo a lo largo de tres sesiones, precedidas por otras dos en las que se ha puesto la atención en la DDE aislados. Básicamente, la metodología seguida en esta fase se fundamenta en un trabajo del propio autor (5).

En esencia, lo que se intenta es utilizar procedimientos específicos que, en nuestra opinión, intervienen decisivamente en la DDE de errores (esp. aislados):

(a) La tendencia a emitir respuestas incontroladas (6)
(b) La percepción del enunciado, influida fuertemente por su presentación formal, ya que ésta oscurece la auténtica dificultad del ejercicio.

Una justificación de la atención que dedicamos a la DDE la proporciona el hecho de que, en su realización, intervienen de forma preponderante factores íntimamente relacionados con la capacidad de autocrítica a la que antes nos referíamos (7) por lo que, lógicamente, un tratamiento adecuado de tales ejercicios de DDE debería potenciar dicha capacidad.

Por otra parte, es un error creer que el aprendizaje de las técnicas de cálculo implica la adquisición de una capacidad satisfactoria de detectar errores. Efectivamente, se ha comprobado repetidamente que los alumnos tienen unas especiales dificultades para detectar errores aislados (8); recientemente, además, hemos obtenido una corroboración de dicho aserto: el coeficiente de correlación obtenido entre los puntajes de técnicas de cálculo y de DDE aislados de una muestra de unos 300 alumnos de 1° de BUP ha sido de 0.37; dicho coeficiente ha subido sólo hasta 0'48 al cabo de tres meses de dedicación intensiva al tema del cálculo aritmético; como punto de referencia, téngase en cuenta que el coeficiente de correlación obtenido entre los puntajes de técnicas de cálculo y de la PRNA (cuya diferencia fundamental radica en su distinto grado de dificultad) ha sido 0.73.

Finalmente, la necesidad de efectuar una separación en dos partes (DDE aislados y DDE dentro de un contexto de operaciones aritméticas) se fundamenta no sólo en la experiencia adquirida como profesionales de la enseñanza, sino también en criterios psicológicos definidos (9).

1.1.4. Fase 4: Tratamiento de la producción divergente y resolución de problemas

Ante todo, conviene efectuar una distinción precisa entre *problema* de cálculo y *ejercicios* de cálculo. En éste, el alumno debe limitarse a utilizar un conjunto de técnicas de cálculo explícita o implícitamente indicado en el propio enunciado; en un *ejercicio* de cálculo la dificultad esencial consiste en saber utilizar unas herramientas de cálculo específicas. En un *problema* de cálculo, en cambio, el alumno debe hacer uso de su potencial de recursos ya que la dificultad primordial se centra en la elaboración del plan destinado a resolver (2ª fase en la nomenclatura de Polya), esto es, en el *qué* hay que hacer más que en el *cómo* hay que hacerlo. En un *problema* de cálculo, además, no es posible establecer un proceso general algorítmico de resolución, contrariamente a lo que ocurre en un *ejercicio* de cálculo; de hecho, el *problema* se convierte en un *ejercicio* (o conjunto de ejercicios) de cálculo en la tercera fase (o fase de resolución), una vez determinado el plan de resolución, pero no antes.

Para abordar la enseñanza de la resolución de problemas de cálculo se ha dedicado un tiempo a familiarizar al alumno con unos ejercicios en los que la producción divergente interviene de manera primordial, debido a la íntima conexión existente entre los principales factores involucrados en dichas operaciones mental y las aptitudes relacionadas con la creatividad (10).

Por lo que se refiere directamente a la enseñanza de la resolución de problemas de cálculo se ha elaborado una «*directriz*» específica, o conjunto sistemático de indicaciones heurísticas (en el sentido de Landa, o sea, en contraposición a algorítmicas (11)), que se consideran útiles para resolver problemas de cálculo aritmético. Dicha *directriz* pretende ser un estímulo para el alumno interesado en reflexionar sobre el problema propuesto y no un conjunto de limitaciones a la actividad del alumno imaginativo, por lo que no se debe usar con rigidez. En su confección se han tenido en cuenta las cuatro fases de resolución de un problema; concretamente: (a) Se hace hincapié en la *comprensión del enunciado* (1ª fase) a través de poner el acento en la *estructura aritmética* del enunciado, o armazón operatorio, a fin de asimilar correctamente la jerarquía de las operaciones. (b) Se dan varias ideas que pueden conducir a la *elaboración de un plan* (2ª fase). (c) Se dan algunas fórmulas que pueden ser útiles en la *ejecución del plan* (3ª fase). (d) Se insiste en la necesidad de efectuar una *evaluación* completa de todo el cálculo (4ª fase).

A fin de que el alumno adquiera un dominio suficiente en la utilización de la *directriz*, se resuelven varios ejemplos reflexionando en voz alta, en base a interrogaciones progresivas sugeridas por la *directriz*. Seguidamente, se abre una «etapa de entrenamiento» durante la cual el alumno debe ejercitarse a resolver problemas con la ayuda de la *directriz*, mientras que el profesor debe limitarse a proporcionarle sólo indicaciones que la propia *directriz* propone. Esta fase 4 se cierra con una etapa de consolidación en la que se refuerza el uso de la *directriz* mediante la resolución de distintos problemas (ver Ap. IV). En total, la duración de esta fase es de siete horas de clase.

1.1.5. Fase 5: Consolidación - Repaso

Durante dos o tres sesiones se resuelven diversos ejercicios y problemas a fin de volver a insistir en los puntos cruciales y de repasar sucintamente las principales directrices que se han ido dando durante el desarrollo de la D.

1.1.6. Fase 6: Realización de las pruebas

Mediante la realización de tres pruebas (que se llevan a cabo en sendas sesiones de una hora), se pretende obtener una valoración mínimamente objetiva de los resultados obtenidos en cada uno de los tres objetivos iniciales de la presente D. Dichas pruebas son, respectivamente: «Prueba m_F», que consta de dos partes: técnicas de cálculo (TDCF) y detección de errores (DDEF) y constituye una réplica prácticamente idéntica a la «Prueba m_0 inicial» (realizada inmediatamente antes del comienzo de la Fase 1) que figura en el Ap. I; «Prueba Nivel A» (PRNA), que constituye el Ap. II, y «Prueba de Nivel B» (PRNB), una muestra cuyo contenido se encuentra en el Ap. IV.

2. RESULTADOS Y VALORACIONES DE LA DIDACTICA

2.1. Resultados de la Didáctica

Ofrecemos a continuación un cuadro en el que se detallan los resultados finales obtenidos en cada una de las pruebas de control realizadas en la Fase 6, junto con otros datos estadísticos de interés; asimismo, se han incluido los datos correspondientes a la «Prueba m_o».

Escala: De 0 a 10	MEDIA	Mediana	% Alumnos Nota $\geq$ 4'5	% Alumnos Nota $\geq$ 7	% Alumnos Nota $<$ 3
TDCI	0'533	0'200	3'6 %	0'3 %	96'7 %
DDEI	0'490	0	1'3 %	0 %	95 %
TDCF	5'614	5'5	67'1 %	38'2 %	16'6 %
DDEF	3'242	2'66	27'2 %	10'6 %	56'6 %
PRNA	3'739	3'5	37'2 %	15 %	37'2 %
PRNB	1'478	0'5	9'7 %	2'7 %	80'9 %

Un primer análisis del cuadro anterior nos permite hacer las observaciones siguientes:

(1) Nótese que la media de DDEF es inferior a la media de la PRNA. Una simple ojeada a las pruebas correspondientes pone de manifiesto la existencia de dificultades especiales en la DDE que no podemos dejar de lado puesto que repercuten en los dos primeros objetivos a los que nos referíamos en la introducción. En efecto, cuando afirmábamos que un primer objetivo consistía en conseguir que el alumno alcanzase un «nivel mínimo» de conocimiento en el cálculo aritmético, presuponíamos que la DDE formaba parte de dichos conocimientos básicos (cf. 1.1.3.) y que, además, su dificultad se mantenía en un primer nivel. Asimismo, considerábamos que la realización de cálculos más complejos (ver Ap. II) poseía un segundo nivel de dificultad y constituía pues, un objetivo más ambicioso.

La realidad, sin embargo, es que la DDE se sitúa en un nivel de dificultad más alto que la realización de dichos cálculos más complejos si bien éstos, por su parte, constituyen un segundo grado de complejidad respecto a las técnicas de cálculo en sí (el primer grado vendría determinado por la 1ª parte de cualquiera de la pruebas paralelas m_o y m_F, o sea, TDCI y TDCF).

Así pues, la distinción entre los dos primeros objetivos es confusa ya que se entrecruzan sus niveles de dificultades, por lo cual deberán replantearse o reformularse adecuadamente.

(2) Por lo que se refiere al tercer objetivo, es obvio que estamos lejos aún de alcanzar unos resultados satisfactorios: la media de la PRNB (1'478) y el porcentaje de alumnos que la superan (9'7 %) así lo indican.

Las principales razones que, a nuestro juicio, explican este hecho son:

A) El poco tiempo empleado en la Fase 4, especialmente si tenemos en cuenta el notable grado de dificultad de los *problemas* de cálculo.
B) El hecho de que *todos* los alumnos fueron tratados con la misma metodología, a pesar de que la mayoría de ellos (el 62'8 %) no había superado la PRNA.

(3) En lo referente al segundo objetivo, el porcentaje de alumnos que superan la PRNA no es tampoco suficientemente elevado (37'2 %) mientras que, por el contrario, el de los alumnos que no alcanzan el 3 es aún excesivamente alto (37'2 %).

Creemos que hay que destacar, de entre las causas que permiten explicar estos resultados, las siguientes:

A) El hecho de que sólo unos pocos alumnos realizaron efectivamente un mínimo número de ejercicios.

B) Al igual que en el apartado (2), el hecho de que todos los alumnos fueron sometidos al mismo ritmo de trabajo, con una misma metodología, a pesar de que el 33% no había superado la prueba correspondiente a las técnicas de cálculo de nivel mínimo (TDCF).

(4) En cuanto al primer objetivo, hay que distinguir la DDE de las TDC; sólo el 27'2 % superó la prueba de la DDEF, lo que da una medida de la dificultad que entraña la realización de este tipo de pruebas; deberemos pues revisar el tratamiento de la Fase 3 (cf. 3.1).

Finalmente, en TDC podemos afirmar que se ha alcanzado un nivel suficientemente satisfactorio (que, no obstante, esperamos incrementar), puesto que casi el 70 % de los alumnos supera la prueba de TDCF y sólo un 16'6 % no alcanza el 3, mientras que casi un 40 % obtiene una nota superior o igual a 7.

2.2 Eficacia de la Didáctica

Es evidente que el análisis de unos resultados no es suficiente para determinar la eficacia de una Didáctica. En efecto, hay que tener en cuenta también el nivel inicial del alumnado.

Así, y a fin de cuantificar en lo posible dicha eficacia, se han definido tres índices en función de las notas finales (f) e iniciales (i); concretamente:

$I1 = f\text{-}i$; $I2 = (f\text{-}i).(f+i) / f$; $I3 = (f\text{-}I) / (M\text{-}i)$;

donde M es la nota máxima que se puede obtener en la prueba.

En el siguiente cuadro pueden observarse algunos datos relevantes referentes a los dos primeros índices:

Escala: De 0 a 10	Media	Mediana	% Alumnos con I ≥ 4	% Alumnos con I ≥ 7	% Alumnos con I < 3
I1TDC	5'08	5	64 %	28 %	23 %
I1DDE	2'76	2'4	26 %	7 %	63'5 %
I2TDC	5'56	5'5	71 %	33'5 %	18'5 %
I2DDE	3'47	2'67	34 %	11 %	42'5 %

Interesa sólo remarcar algunos aspectos:

1) Estos índices son, esencialmente, medidas de contrastación; deberemos pues disponer de los datos correspondientes a otras Didácticas (en particular, a modificaciones de ésta) antes de emitir juicios de valor definitivos de los actuales datos.

2) En este sentido, el primer índice no es muy adecuado, puesto que identifica progresos claramente no equivalentes, (p.e., el paso de 1 a 4 y el paso de 6 a 9).

3) A simple vista se observa una diferencia notable entre los índices de TDC y de DDE, lo que pone de manifiesto, una vez más, las dificultades inherentes al aprendizaje de la DDE.

4) Finalmente, y teniendo en cuenta lo que hemos observado en 1), queremos destacar el alto valor de I2TDC; significa que un alumno medio con nota inicial $N_0 \in I_i$ alcanza una nota final $N_f \in I_{i+2}$, donde $I_0 = (0,3)$, $I_1 = (3,5)$ $I_2 = (5,7)$, $I_3 = (7,8'5)$, $I_4 = (8'5,10)$,, $0 \leqslant i \leqslant 2$.

3. CRITERIOS DE MODIFICACION

3.1. Criterios internos de modificación

Tanto el anterior análisis de los resultados obtenidos como el propio desarrollo de la D. nos permiten disponer de unos criterios para modificarla en una dirección que, en principio, parece adecuada. Creemos pues oportuno destacar tres aspectos que deberán ser objeto de revisión en una próxima versión de dicha D.:

1) El control efectivo del trabajo del alumno

Tal y como estaba concebida esta D., se dejaba un amplio margen de responsabilidad al alumno para la realización de su trabajo; la realidad, sin embargo, se impone y obliga a replantearse algún tipo de control más continuado y profundo. Deberíamos, en efecto, poder distinguir objetivamente aquellos alumnos que se autoexcluyen del seguimiento de la D. de aquellos que no pueden, pese a intentarlo, mantener el ritmo.

2) La atención a los casos particulares

De acuerdo con lo que observábamos en un punto anterior (cf. 2.1. (2) B) y (3) B), nos parece imprescindible conocer (mediante algún tipo de prueba de control) qué alumnos no están aún capacitados para acceder a niveles superiores de dificultades (especialmente a la F.4).

Ello nos obligará a elaborar metodologías específicas que permitan atender especialmente a dichos alumnos.

3) La reformulación de los objetivos 1° y 2°

Hemos insistido suficientemente ya en este aspecto (cf.1.1.3. y 2.1. (1)); aquí sólo nos interesa destacar el hecho de que dicha reformulación está íntimamente ligada tanto a las respectivas duraciones de las fases centrales (cf. 2.1 (2) A) como a la articulación entre las mismas (especialmente la Fase 3 con las Fases 2 y 4).

3.2. Criterios externos de modificación

Un primer análisis de los resultados de la investigación que el Grup Aresta está llevando a cabo para determinar, en lo posible, algunos de los factores cognitivos más relevantes en el aprendizaje de ciertas áreas de la Matemáticas (cf. nota (3)) se sintetiza en el siguiente cuadro: (Recuérdese que TDCF significa «Técnicas de cálculo final» — 1ª. parte de la prueba «Prueba m_F» —; DDEF, «Detección de errores final» — 2ª. parte de la «Prueba m_F» —; PRNA, «Prueba de Nivel A» y PRNB, «Prueba de Nivel B» — véanse los Apéndices —):

	Múltiple R	Múltiple R^2	Factores que intervienen más significativamente (incrementan R^2 en más de 2%)	F (*)
TDCF	.56	.31	Cs$, Er$, Dr$, Mi$	24.26
DDEF	.49	.24	Er$, Cs$	21.28
PRNA	.48	.23	Cs$, Er$, Mi$	13.33
PRNB	.47	.22	Cs$, Er$, RuS, Dr$	19.12

(*) Es significativo a un nivel de confianza de 0.05

Una explicación más detallada de esta investigación no tiene cabida aquí; (véase a este respecto el artículo de J. Gascón (1984) que aparece en esta misma publicación).

Unicamente nos limitaremos a resumir sucintamente el significado de aquellos factores que presentan un particular interés.

Así, llamamos *«Coverger sistemas simbólicos»* (Cs$) a la aptitud de generar la respuesta determinada por un conjunto de información, cuando esta respuesta consiste, por su parte, en un conjunto, estructura u organización de partes en interacción de carácter simbólico.

Entendemos por *«Evaluar relaciones simbólicas»* (Er$) la capacidad de emitir juicios correctos, en base a criterios prefijados, sobre operaciones fundamentales entre números, vínculos de igualdad y desigualdad y, en fin, todo tipo de enlaces o puentes entre conceptos expresados simbólicamente o, incluso, entre grupos de simbolos con un significado arbitrario conocido de antemano.

Por *«Diverger relaciones simbólicas»* (Dr$ entendemos la capacidad de generar, a partir de una información previa de tipo simbólico, una diversidad de relaciones cualitativamente diferentes (entendidas éstas como nexos o enlaces en el sentido apuntado anteriormente).

Interpretamos *«Memorizar implicaciones simbólicas»* (Mi$)como la capacidad de recordar consecuencias determinadas y conocidas a partir de una información dada, de tipo simbólico.

Para una ampliación del significado de todos estos factores, así como de su papel en la Estructura de la Inteligencia, debemos remitirnos a la bibliografía (véase Guilford (1977)).

Creemos oportuno efectuar algunas observaciones:

(A) Un punto de referencia para comprender el alcance de estos resultados lo proporciona un trabajo de Guilford y dos de sus colaboradores, en el cual se intenta conocer en qué medida un conjunto de 20 factores (entre los que se encuentran los 9 factores utilizados en nuestros análisis) puede predecir el éxito de un curso de noveno grado (13-14 años) en «Basic Mathematics» (definido como «aritmética avanzada» y otros campos de las Matemáticas. El coeficiente de correlación múltiples *(ccm)* obtenido en dicho estudio es R = 0'48 (cf. Guilford, Hoepfner y Petersen (1965), especialmente pp. 660-61 y 671-72).

Se observará que, en nuestro caso, el *ccm* en TDCF es ligeramente superior (R = 0'56) y sensiblemente idéntico en DDEF, PRNA Y PRNB.

Así pues, se confirma el hecho de que los factores escogidos son insuficientes para explicar el rendimiento en cálculo aritmético (medido, claro está, con nuestras pruebas de control — cf. Fase 6—), lo que está de acuerdo con la interpretación de Guilford de sus propios resultados (cf. Guilford (1977), p.48) y, por lo tanto, sería conveniente introducir nuevos factores en análisis posteriores.

(B) La inclusión de otros factores (en nuestro análisis), concretamente: TDCI, DDEI, Sexo, Situación de paro del cabeza de familia y Condición de repetidor de 1° eleva el *ccm* en TDCF a R = 0'64, en DDEF y PRNA a R = 0'58 y en PRNB a R = 0'57, con niveles de significancia elevados de TDCI, y DDEI (espc. en DDEF, PRNA y PRNB). Ello hace pensar que si se hubiesen incluido factores de conocimiento adecuados en un principio (de un nivel *efectivamente elemental*, dada la situación inicial del alumno) muy probablemente se explicaría un porcentaje elevado de la variabilidad total de las pruebas finales (cf., a este respecto, el trabajo de N.Webb (1979), o también el artículo citado anteriormente).

(C) La distribución de los factores en cada una de las variables finales nos proporciona unos criterios externos (no inherentes a la propia D.) de modificación, si no absolutamente definitivos, sí por lo menos con más base que meras intuiciones arriesgadas. En concreto resaltaremos los siguientes puntos:

1) El hecho de que precisamente en DDEF (Detección de errores final) al factor Er$ (Evaluar relaciones simbólicas) adquiera mayor relevancia que el factor Cs$ (Converger sistemas simbólicos) y, por otra parte, la importante participación de dicho factor Er$ en todas las variables finales, nos permite afirmar que deberemos potenciar la Fase 3 a fin de incrementar las habilidades cognitivas referentes a la evaluación.

2) En vista de la participación significativa del factor Dr$ (Diverger relaciones simbólicas), deberemos poner más énfasis en los ejercicios de diverger (cf. Ap. III) a fin de desarrollar las habilidades relacionadas con la producción divergente.

3) Habrá que introducir algún tipo de ejercicio de memorización, de acuerdo con la especial aportación del factor Mi$ (Memorizar implicaciones simbólicas).

4) Si observamos los factores que intervienen en la PRNA nos daremos cuenta de que no aparecen factores distintos de los que se encuentran en TDCF. Con ello, nuestro 2° objetivo (a saber, el propósito de que el alumno domine unas técnicas de cálculo con un nivel de complejidad elevado-cf Ap. II-) queda bastante en un segundo término, ya que su consecución no aporta un desarrollo de nuevos factores cognitivos (del tipo de habilidades primarias), con lo que uno de los principales argumentos que proporcionaba («a priori») una justificación de dicho objetivo (cf. 1.0. (b)) no tiene base.

5) La anterior objeción no es válida, en cambio, para el tercer objetivo de nuestra D., puesto que aparece un nuevo factor, el RuS (Reconocer unidades semánticas, también denominado Comprensión verbal, cf. Guilford, (1965) p. 665), sin duda de difícil interpretación. Por otra parte, nótese que la aportación de Dr$ es relevante en comparación con su influencia en DDEF y en PRNA.

4. CONCLUSIONES

Si bien con carácter provisional, creemos estar en condiciones de destacar algunas conclusiones:

(1) La separación en distintas fases obedece, fundamentalmente, a la necesidad de poner un particular énfasis en los factores especialmente involucrados en los distintos aspectos del cálculo; es decir, en la Fase 2 acentuamos el factor Cs$ (Converger sistemas simbólicos) en la Fase 3, el factor Er$ y en la Fase 4, el factor Dr$ (lo que no significa que cada factor intervenga sólo en las actividades que se realizan en las respectivas fases). Esta necesidad, a su vez, proviene de la relativa independencia de dichos factores (cf. Guilford (1977)).

(2) La capacidad de detectar errores está íntimamente asociada a la capacidad de autoevaluación. Así, el desarrollo de una implica, en cierta medida, el de la otra, por lo que la Fase 3 adquiere especial relevancia.

(3) La distinción entre *ejercicio* de cálculo y *problema* de cálculo permite dedicar una atención a tareas en las que las aptitudes de creatividad puedan manifestarse con una mayor intensidad por lo que la Fase 4 adquiere una especial significación.

(4) Aunque no definitivos, los resultados obtenidos en técnicas de cálculo elementales han sido mínimamente satisfactorios, especialmente en lo que refie-

re al incremento de los conocimientos iniciales. Por el contrario, en detección de errores elementales no se ha alcanzado un nivel mínimo, por lo que deberemos esforzarnos en comprender más profundamente los procesos internos que se llevan a cabo en esta actividad.

(5) De acuerdo con lo que hemos reiterado en el punto anterior (cf. 3.2. 4/) nuestro segundo objetivo deberá ser replanteado, mientras que el tercer objetivo, en cambio, recibirá un nuevo impulso para su reafirmación.

Por último, queremos poner de manifiesto que todo el trabajo realizado tiene como fin último elevar el nivel de aprendizaje del alumno a través de nuestro propio perfeccionamiento como enseñantes, por lo que agradecemos de antemano todas las sugerencias, indicaciones y críticas que nos permitan progresar en esta tarea.

NOTAS

(1) La versión íntegra forma parte de la Memoria de Final de Curso presentada por el Grup Aresta al I.C.E. de la Universidad de Barcelona (Junio, 1984).

(2) Concretamente, «Jaume Balmes», «Sant Josep de Calassanç» y «Vall d'Hebron».

(3) Con ella se pretende llegar a conocer la influencia de diversos factores cognitivos del tipo de habilidades primarias (en el sentido de Guiford) en el aprendizaje de diversos campos de la Matemática. Dichos factores tienen su interpretación en el marco teórico de la Estructura de la Inteligencia de J.P. Guilford y se han obtenido a través de las técnicas del análisis factorial aplicadas a un conjunto de 30 pruebas iniciales pasadas a los alumnos durante la primera semana del presente curso. Dichas pruebas deberán ser refinadas antes de poder dar las conclusiones por definitivas.

(4) Véase, p.e., Polya (1981).

(5) Véase Lamarca (1982).

(6) «No cabe duda de que las dificultades (...) para vencer la tendencia a emitir respuestas incontroladas (...) están entre las más importantes que debe afrontar todo pedagogo (...)» (A.R.Luria (1981), p. 239).

(7) Cf. Guilford (1977), cap. VIII.

(8) Cf. Lamarca (1982), especialmente, p. 554.

(9) Véase, p.e., Piaget (1975).

(10) Cf. Guilford (1977), cap. VI, esp. p. 199 y cap. XVI.

(11) Véase Landa (1972).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

GUILFORD, J.P., 1977, *Naturaleza de la inteligencia humana* (Paidós: Buenos Aires).

GUILFORD, J.P., HOEPFNER, R., PETERSEN, H., 1965, Predicting achievement in ninth-grade mathematics from measures of intellectual-aptituds factors, *Educational and Psychological Measurement*, XXV, N° 3, pp. 659-682.

LAMARCA, J.Mª, 1982, Detección de errores en el cálculo aritmético: un ensayo metodológico, *Actas de las II Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, II, pp. 549-574.

LANDA, L.N., 1972, *Cibernética y pedagogía* (Labor: Barcelona).

LURIA, A.R. y TSVETKOVA, L.S., 1981, *La resolución de problemas y sus trastornos* (Fontanella: Barcelona).

PIAGET, J. y SZEMINSKA, A., 1975, *Génesis del número en el niño* (Guadalupe: Buenos Aires).

POLYA, G., 1981, *Cómo plantear y resolver problemas* (Trillas: México).

WEBB, N.L., 1979, Processes, Conceptual Knowledge, and Mathematical problem-solving ability, *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, N° 2, pp. 83-93.

Apéndice I

PRUEBA α_0

1ª Parte: Técnicas de cálculo (TOCI)

Calcula:

/1/ $3 + 5\cdot(7 - 4\cdot 3) - 3\cdot(-7)$ /2/ $(3a - b^2)^2$

/3/ $2/21 - 2/\overline{105} + 1/50$ /4/ $-\frac{7}{5}\cdot 3 - \frac{4}{9}$

/5/ $2 + 7/3 - 5/(3/2)$ /6/ $\dfrac{\sqrt[7]{5^3}\cdot\sqrt[4]{5}}{\sqrt{5^{-1}}}$

/7/ $3^3\cdot\sqrt[5]{a^{17}}$ /8/ $2\cdot\sqrt{12} + \sqrt{75} - 3\cdot\sqrt{27}$

/9/ $\dfrac{125}{\sqrt[3]{5^7}\cdot(\sqrt{5} - \sqrt{2})}$ (Racionalizar)

(Puntuación: Nº /1/ – Nº /8/: 0 puntos o 1 punto
Nº /9/ : 0 puntos o 1 punto o 2 puntos)

2ª Parte: Detección de errores (DUCI)

Corrige, si ha lugar, el error o errores siguientes razonando la respuesta:

(1) $4 - (a-b)/2 = (8-a-b)/2$ (2) $(5a^2+2)/5 = a^2+2$

(3) $3-(2/3)(1-1/2) = 7/6$ (4) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)(a\cdot c)$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}} = \sqrt{a^3}$ (6) $\dfrac{\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}} = \dfrac{1}{2}$

(7) $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{11} = <\begin{matrix}\sqrt{18}\\ \sqrt{110}\end{matrix}$ (8) $\sqrt{3^2\cdot 5+7^2} = 3\sqrt{5}+7$

(Puntuación: (1) y (2): 0 puntos o 1'5; Resto: 0 puntos o 2)

Apéndice II

PRUEBA DE NIVEL A (PRNA)

Opera: (1) $\dfrac{2/5 - (2+1/2)(3/7) - 1}{3 - (1/5)(1/2-1/7+5/3)}$

(2) $\dfrac{(3 - 3/(3-3/2))(1/3-1/8+7/36)}{(1 - 1/(2-3/5))(7/9-5/36-2/3+1/4)}$

Simplifica: (3) $\dfrac{\sqrt[7]{5^{-2}}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 11^{-1}\cdot\sqrt[4]{11^5}}{\sqrt[6]{5^{13}}\cdot\sqrt[5]{11^2}\cdot\sqrt{11}}$

(4) $\dfrac{\sqrt[3]{24}\quad\sqrt[6]{1.250}}{(\sqrt[4]{32} + \sqrt[6]{162})(\sqrt[3]{24} - 2\cdot\sqrt[3]{375})}$

Introduce los factores exteriores en el signo radical y, a la vez, extrae todos los factores interiores que sea posible:

(5) $\dfrac{a^2\cdot b^{-1}\cdot\sqrt[5]{c^{221}\cdot d^{-16}}}{a^3\cdot t^{-2}}$

(Puntuación: 0 puntos o 1 punto o 2 puntos).

Apéndice III

<u>1.1.1.-</u> Algunas Cuestiones elementales:

4/ Escribe el valor absoluto de -2 y completa $|-3| = \_$

31/ Escribe los divisores positivos de 24.

47/ Escribe dos fracciones irreducibles.

61/ ¿Existen números racionales que, a la vez, sean irracionales?

<u>1.1.2.-</u> Algunos EJEMPLOS utilizados en la Fase 2:

Ej. 2: $3/98 - 4/35 + 1/70 - 3/28 = \ldots$

Ej. 9: $5\sqrt{600} - 4\sqrt{294} - \sqrt{24} = \ldots$

Ej. 10 A): Racionalizar la expresión $\dfrac{750}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[7]{2^3}\cdot\sqrt[4]{5^9}}$

<u>1.1.3.-</u> Ejemplos de ERRORES NO AISLADOS:

1/ Ej. 1): $\dfrac{2}{15} - \dfrac{3}{50} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{(20+9+25)}{2.3.5^2} = \dfrac{6}{25}$

2/ Ej. 2): $\dfrac{(a^3+b^3)}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{(a+b)^3}{(a+b)} = (a+b)^2$

<u>1.1.4.-</u> Algunos <u>ejemplos</u> de EJERCICIOS especialmente relacionados con la "<u>Producción Divergente</u>": (hallar <u>dos</u> soluciones por ejem.)

Ej.1): Intercala signos entre las siguientes fracciones a fin de obtener una cadena de desigualdades correcta: 2/3 25/7 –1/9

Ej.2): Sustituye r por un número real a fin de que la expresión $x = 1/(1 + 2/(1+r))$ sea menor que 1/2.

Apéndice IV

Algunos <u>ejemplos</u> de PROBLEMAS de cálculo:

Ej. 1): ¿Es cierto que 0'00001 es menor que $\dfrac{1}{\sqrt{81^5}}$?

Ej. 2): Comprueba si $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$; ¿cuándo vale la igualdad?

Ej. 3): Simplifica la expresión $\sqrt{7-\sqrt{5}} + \sqrt{7+\sqrt{5}}$

Ej. 4): ¿Qué número es mayor, $\sqrt[4]{7}$ o bien $\sqrt[6]{20}$?

1.1.6.- Algunos PROBLEMAS utilizados en la "<u>Prueba de Nivel B</u>" (PRNB):

Nº 5/ ¿Qué signo tiene la expresión siguiente?:

$$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5})^2 - \sqrt[3]{25} - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}$$

Nº 6/ Compara los números siguientes:

$\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt{3} - 1$