CONFLICTOS SEMIÓTICOS RELACIONADOS CON EL USO DE LA NOTACIÓN INCREMENTAL Y DIFERENCIAL EN LIBROS DE FÍSICA Y DE MATEMÁTICA DEL BACHILLERATO

BADILLO[1], E.; FONT[2], V. y AZCÁRATE[1], C.
[1] Universitat Autònoma de Barcelona.
[2] Universitat de Barcelona.

Palabras clave: Análisis de textos; Velocidad; Derivada; Conflicto semiótico.

OBJETIVOS

El objetivo de esta comunicación es *presentar y analizar* un fenómeno que se observa en los libros de texto colombianos de física de Bachillerato cuando se introduce la velocidad. Dichos textos usan una notación (incremental y diferencial) que pone las bases de un conflicto semiótico causado por la introducción implícita de la velocidad instantánea como función, en la definición de la velocidad instantánea en un instante t_0. Es decir, ciertos usos de la notación incremental implican definir la velocidad instantánea en t_0 como:

$$\lim_{h\to 0} \frac{d(t+h)-d(t)}{h}$$

en $t = t_0$, sin haber introducido antes la velocidad instantánea como función (derivada).

MARCO TEÓRICO

Diferentes investigaciones sobre la didáctica del análisis matemático (Badillo 2003; Contreras Font, Luque y Ordóñez, en prensa; Font, 2000; Inglada y Font, 2002) han permitido detectar un *fenómeno didáctico* de interés, tanto para la didáctica de las matemáticas como para la didáctica de la física: la regularidad con la que se manifiestan conflictos semióticos en las prácticas de los alumnos de Bachillerato cuando han de distinguir la derivada en un punto y la función derivada.

El análisis semiótico realizado en dichas investigaciones (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa; Inglada y Font, 2002) permite inferir que la causa que lo produce está relacionada con el hecho de que el paso de la derivada en un punto a la función derivada presenta una gran complejidad semiótica, y que las unidades didácticas que se proponen a los alumnos no la tienen en cuenta.

El análisis de los libros de texto de matemáticas del Bachillerato español (Inglada y Font, 2002) y del colombiano (Badillo, 2003) permite concluir (1) que la "pobreza" de técnicas utilizadas para calcular $f'(a)$ y $f'(x)$ no permite la emergencia de estos dos objetos como objetos claramente diferenciados, y (2), que en general, o bien los autores no son conscientes de la gran complejidad semiótica que conlleva el paso de la derivada en un punto a la función derivada, o bien no le prestan la atención que se merece.

Por otra parte, en Inglada y Font (2002) se describe cómo, en alguno de los manuales de matemáticas de

Bachillerato de Cataluña, determinados usos de la notación $\Delta y/\Delta x$ (tanto en la clase de matemáticas como en la de física) pueden presentar más inconvenientes que ventajas cuando se toma en consideración la complejidad semiótica asociada al paso de la derivada en un punto a la función derivada. Según estas investigaciones, determinadas maneras de introducir la notación incremental y la diferencial ponen las bases de un *conflicto semiótico causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto*. Es decir, ciertos usos de la notación incremental implican definir la derivada en un punto *f´(a)* como:

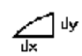
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

en $x=a$, sin haber definido antes la función derivada.

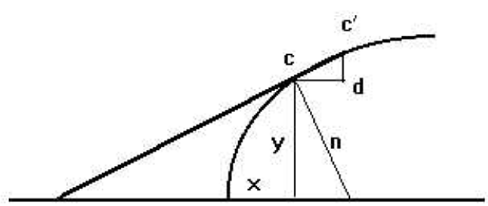
DESARROLLO DEL TEMA

Origen histórico de la notación incremental y diferencial

En la génesis histórica del cálculo diferencial se observa que en el periodo anterior al uso del triángulo



es decir el periodo anterior a Barrow, se utilizaba el triángulo determinado por la ordenada, la tangente y la subtangente, y el triángulo determinado por la ordenada, la normal y la subnormal. Leibniz, estudiando la obra de Pascal, observó la importancia del pequeño triángulo *cc´d* de la figura porque se podía considerar semejante al triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente, y al triángulo formado por la ordenada, la normal y la subnormal.

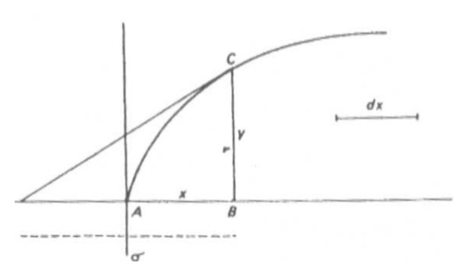


Según Bos (1984), para Leibniz, el diferencial de una variable y era la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de *y*. Es decir: Leibniz consideraba sucesiones correspondientes de valores de las variables *x* e *y* en las que los términos estaban infinitamente próximos y que *dy* era la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas, mientras que *dx* era la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores consecutivos de la abscisa *x*. Este historiador considera que Leibniz era bastante reticente a presentar su nuevo cálculo al público matemático porque utilizaba cantidades infinitamente pequeñas que no estaban definidas rigurosamente y que, por tanto, no eran del todo aceptables en matemáticas. Por este motivo tomó la decisión de presentar al público un concepto de diferencial completamente diferente, que ya no era el infinitamente pequeño, pero que cumplía las mismas reglas. En su primera publicación sobre el cálculo diferencial "Un nuevo método para hallar máximos y mínimos, así como tangentes" del año 1684, introduce un segmento finito llamado *dx*, y define a partir de él *dy* en el punto *C* como el segmento que satisface la siguiente igualdad:

$$\frac{y}{\sigma}=\frac{dy}{dx}$$

donde es la longitud de la subtangente. Definida de esta manera, *dy* también es un segmento finito.

Esta manera de presentar el cálculo diferencial, para algunos historiadores como Bos (1984) es un claro retroceso solamente explicable por el miedo que tenía Leibniz de las reacciones a su método.



El concepto de diferencial, considerado como un incremento infinitesimal, fue de gran ayuda en la resolución de muchos problemas tanto matemáticos como físicos. Con respecto a la notación, uno de los motivos por los que la de Leibniz acabó imponiéndose fue su facilidad de uso, tal como se puede observar al calcular, por ejemplo, la derivada de la función compuesta o la derivada de la función inversa. Sin embargo, la noción de diferencial siguió siendo ambigua, resultando incluso en algunos casos contradictoria.

Lagrange, consciente de las imprecisiones y ambigüedades del uso de los infinitesimales, propuso organizar el cálculo diferencial a partir del concepto de derivada, en lugar de hacerlo a partir del concepto de diferencial. De todas maneras no fue hasta los trabajos de Cauchy, en la primera mitad del siglo XIX, en los que la diferencial dejó de considerarse como un incremento infinitesimal y pasó a ocupar un lugar secundario en la organización del cálculo. Cauchy definió la derivada como el límite de un cociente de incrementos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

y la diferencial como una expresión construida a partir de la derivada: $dy = f'(x)dx$, siendo dx un incremento arbitrario (grande o pequeño) de la variable independiente. De esta manera $f'(x)$ se podía representar por dy/dx y la notación diferencial podía seguir siendo un instrumento útil para ciertas demostraciones o cálculos.

Las propuestas didácticas sobre derivadas en el Bachillerato español, cuando contemplan el concepto de diferencial, reflejan este papel secundario con respecto a la noción de derivada que ya le adjudicó Cauchy y, además, no suelen utilizar la notación incremental que se sustituye por una notación funcional. En cambio, en los libros de texto colombianos, tanto la notación incremental como la diferencial tienen un papel central, y en algunos casos se mantiene el concepto de diferencial como infinitésimo.

Problema de investigación

Por una parte, la observación empírica de la confusión que tienen muchos alumnos españoles entre la derivada en un punto y la función derivada dirigió el análisis semiótico hacia dicho fenómeno. Por otra parte, el análisis semiótico, además de permitir explicar las causas de dicho fenómeno, puso de manifiesto la magnitud que podía llegar a tener y, de esta manera, orientar investigaciones realizadas en países donde la formación del profesorado y los planes de estudio contemplaban la notación incremental y diferencial como la más habitual en las clases de matemáticas y de física. En la investigación realizada por Badillo (2003) sobre los esquemas de los profesores, se documenta que, en Colombia, dicho fenómeno no se limita a los alumnos sino que es de mayor magnitud ya que, en muchos casos, son los propios profesores los que confunden la derivada en un punto y la función derivada.

En la investigación que presentamos, para estudiar la magnitud del fenómeno comentado anteriormente, nos planteamos analizar una muestra representativa de textos colombianos de física de bachillerato. En concreto, la parte de dichos libros que desarrolla el programa de física de 10º (alumnos de 16-17 años), la cual incluye la introducción y el desarrollo del objeto velocidad instantánea dentro del estudio general de la cinemática clásica.

Metodología

El análisis de libros de texto se realizó con dos niveles de profundidad. El primer nivel de análisis, denominado *análisis macro*, incluyó: (1) la elaboración de la ficha de referencia de cada texto que permitía identificarlo; (2) por un lado, un estudio global para contextualizar la obra y la intencionalidad del autor y, por otro, la organización y estructura de los contenidos programáticos que proponen los libros de texto de física de 10º: el número de páginas y el número de unidades, la modulación de los contenidos y su distribución por cursos, trimestres y unidades, la estructura de la unidad, la ubicación de las actividades, el uso de recursos informáticos y su mayor o menor aproximación al modelo constructivista; y (3), el tipo de tareas propuestas.

En el segundo nivel, denominado *análisis micro*, se analizó el itinerario didáctico propuesto para la enseñanza de la velocidad (si se introduce primero la velocidad instantánea como función [$v\ (t)$] o bien como un valor concreto [$v\ (t_0)$]) y se realizó un análisis semiótico de la definición de la velocidad instantánea.

La muestra analizada consistió en 10 libros seleccionados entre los de más difusión y uso en Colombia. El análisis *macro* se realizó siguiendo la metodología cualitativa y descriptiva propuesta en González (2000) y el análisis *micro* se realizó aplicando el análisis ontosemiótico (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa; Inglada y Font, 2002).

Análisis de los datos

Los libros de texto más utilizados por los profesores de física en Colombia definen el objeto velocidad utilizando la notación de incrementos, y en la mayoría de ellos no se hace un tratamiento previo de los conceptos y notaciones matemáticos utilizados.

En esta comunicación comentamos, sin entrar en el análisis detallado que se realizó para cada libro de texto, sólo 3 de los libros estudiados. En la definición que propone el libro de texto 1 (ver texto 1), se observa que en la definición formal de la velocidad instantánea, en términos de límite, los autores toman las opciones siguientes: (1) se utiliza una notación que podemos calificar de casi funcional para definir la tasa media de variación y la notación incremental para definir el objeto velocidad instantánea, dejando a los estudiantes la responsabilidad de coordinarlas y relacionarlas entre sí, lo cual puede generar conflictos semióticos y dificultades en la comprensión de estos objetos; (2) se incorpora una representación gráfica que permite visualizar el paso del objeto tasa media de variación al de velocidad media, pero resulta poco clara y no está acompañada de una aproximación numérica que ayude a los estudiantes a ver realmente el paso al límite.

En este libro se observa el fenómeno de la introducción implícita de la velocidad instantánea como función, en la definición de la velocidad instantánea en un instante.

Por su parte, el libro 2 (ver texto 2), además de la notación incremental, introduce la diferencial, lo cual no hace el texto 1. Por tanto, introduce más complejidad semiótica en el tratamiento del objeto velocidad instantánea, puesto que dx y dy se diferencian de Δx y Δx, según el autor, sólo por la "pequeñez" de la variación.

El libro 3, se limita a dar como definición una ecuación o fórmula sin significado alguno:

$$\bar{v} = \frac{s}{t}$$

La velocidad instantánea aparece definida muy superficialmente y sin justificación alguna como la relación de cambio del desplazamiento al tiempo transcurrido. En ejercicios posteriores, y al definir la aceleración, simplemente los reducen al planteamiento de las ecuaciones o fórmulas de la cinemática clásica:

$$2as = v^2{}_f - v^2{}_o\ ;\ v_f = v_o + at\ ;\ s = \frac{v_f - v_o}{2}t\ ;\ s = v_o.t + \frac{1}{2}at^2\ .$$

Para contextualizar los textos comentados, creemos conveniente resaltar que, en Colombia, hasta el 11º no se introduce la derivada en la clase de matemáticas.

Para hallar el valor de la velocidad en el punto P, basta tomar en cuenta otro punto tal como el M, muy cercano de P. Si unimos los puntos PM y buscamos la pendiente de la recta, hallamos la velocidad media entre ellos; pero si el punto M se considera cada vez más cercano al P, llegará un momento en que los dos puntos se superpongan y la recta que los unía se habrá transformado en una tangente a P, cuya pendiente será la velocidad en dicho punto.

A la velocidad hallada para el punto P se le conoce como velocidad instantánea y su expresión matemática sería:

$$\text{Vi} = \text{límite de: } \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} \text{ conforme: } t_2 - t_1 \text{ tiende a } 0.$$

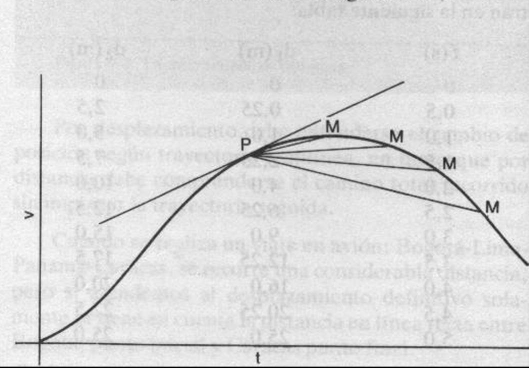
En otra forma:

$$\text{Vi} = \text{lím } \frac{\Delta d}{\Delta t} \quad \text{cuando } \Delta t \text{ tiende al valor } 0.$$

En resumen: la velocidad instantánea corresponde al límite de la velocidad media, cuando el valor del tiempo tiende hacia cero.

Veamos otra clase de movimiento en el que el cuerpo se ha desplazado de acuerdo con la siguiente tabla de valores:

Ya sabemos cómo hallar la velocidad media entre dos puntos, pero ahora nos interesaría, cómo hallar la velocidad en un punto como el P, figura 4-8.



TEXTO 1:
Texto de Física de la *Editorial Bedout*, 1996

Matemáticamente, diremos que la velocidad instantánea es el límite de $\Delta \vec{x} / \Delta t$ cuando Δt tiende a cero; lo que se escribirá como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \qquad (5.3)$$

(leer límite de $\Delta x / \Delta t$ cuando Δt tiende a 0)

Una manera de simbolizar la idea de tomar un desplazamiento muy pequeño es utilizar el símbolo dx que significa "una variación muy pequeña de x" (recordar que x significa una variación de x no necesariamente pequeña). El símbolo dt significa un intervalo muy pequeño de t. Podemos condensar la definición de velocidad instantánea como :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad \text{(leer } dx \text{ sobre } d\,t\text{)} \qquad (5.4)$$

A cada instante, el vector velocidad depende del tiempo, por lo tanto es una función del tiempo; lo que escribiremos :

$$\vec{v} = \vec{v}(t) \qquad (5.5)$$

Nota:

Los matemáticos afirman que el símbolo dx se debe usar solamente cuando el desplazamiento tiende a cero. En física, el límite cero nunca se puede alcanzar.

dx

Δx

TEXTO 2:
Texto de Física de la *Editorial Norma*, 1996

CONCLUSIONES

Como hemos podido observar, el contexto en el que vive el objeto derivada en la institución del Bachillerato colombiana lleva a los profesores a adoptar alguna de las siguientes soluciones:

(1) que los conceptos físicos (velocidad, aceleración, etc.) se reducen a la manipulación de reglas, fórmulas y técnicas, propias de la matemática, y distintas del tratamiento que se hace de los mismos conceptos en las otras ciencias;
(2) el uso de la notación incremental para definir la velocidad instantánea, en la asignatura de física de 10º, implica la definición de los macro objetos $f'(a)$ y $f'(x)$, lo cual no ayuda a la comprensión y relación de los mismos, generando conflictos semióticos; y/o,
(3) los profesores hacen caso omiso de los conflictos semióticos presentes en la enseñanza de la velocidad en 10º y, al introducir los conceptos del cálculo diferencial en 11º, se centran también en la manipulación y aplicación de técnicas algebraicas de derivación, en detrimento de la fenomenología asociada a los conceptos.

Con relación al punto 2, en la mayoría de los textos analizados se observa el uso de la notación incremental (y en algunos casos también la diferencial) que pone las bases de un conflicto semiótico causado por la introducción implícita de la velocidad instantánea como función, en la definición de la velocidad instantánea en un instante t_0. Es decir, ciertos usos de la notación incremental implican definir la velocidad instantánea en t_0 como:

$$\lim_{h \to 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h}$$

en $t = t_0$, sin haber introducido antes la velocidad instantánea como función (derivada).

Este conflicto semiótico potencial puede tener una gran importancia en los procesos de enseñanza-aprendizaje en aquellos países en los que la formación inicial de los profesores de matemáticas sea interdisciplinar (de matemáticas y física) tal como sucede con el profesorado colombiano.
Para finalizar, hay que resaltar que la relevancia de este estudio radica en que, tal como los resultados de la investigación en didáctica de las ciencias y de las matemáticas ha constatado, la mayoría de los profesores consideran el libro de texto una herramienta necesaria para que los alumnos tengan organizada y secuenciada la asignatura (Howson, 1995). Por tanto, el conflicto semiótico causado por determinados usos de la notación incremental que hacen los libros de texto analizados se puede convertir en un obstáculo cognitivo importante para el aprendizaje de los alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BADILLO, E. (2003), *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas en ejercicio en Colombia*. Universitat Autònoma de Barcelona: Barcelona. [URL:http://www.tdx.cesca.es/TESIS_UAB/ VAILABLE/TDX-0611104-144929/]

BOS, H.J.M., 1984. Newton, Leibniz y la tradición leibniziana. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (pp. 69-123). Grattan-Guinness (comp.). Madrid, Alianza Universidad.

CONTRERAS, C; FONT, V.; LUQUE, L.; ORDÓÑEZ. L. (en prensa). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques* .

FONT, V. (2000a), *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades.* Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.

GONZÁLEZ, M. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica*. Tesis doctoral. Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca. ISBN 84-7800-747-4.

HOWSON, G. (1995). *Mathematics Textbooks: A comparative Study of Grade 8 texts*. Vancouver: Pacific Educational Press.

INGLADA, N.; FONT, V. (2002). Le rôle des livres de texte comme médiateurs d'activation de la connaissance mathématique commune. Le cas des dérivées des fonctions élémentaires. *Actas CIEAEM* 54, pp. 373-383.