https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3254
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Aprendizaje de la equidistancia a través de la variación: un estudio con niños de primaria

Learning equidistance through variation: a study with primary school children

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Universidad Pedagógica Nacional, México
isandoval@upn.mx

Leonor Camargo Uribe
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co

RESUMEN • Presentamos momentos del aprendizaje de la equidistancia de niños de 10 años, al experimentar la variación de elementos de figuras geométricas. La intervención se realizó en una escuela pública de la Ciudad de México en tres sesiones de 90 minutos cada una. Ellos usaron por primera vez un programa de geometría dinámica para construir y explorar propiedades invariantes de circunferencias, triángulos isósceles y equiláteros. Los resultados, fundamentados en la teoría de la variación, muestran que la experimentación realizada fue significativa para conceptualizar la equidistancia, en contraste con la colinealidad y la congruencia, al resolver problemas de geometría.

PALABRAS CLAVE: Aprendizaje de la geometría; Conceptualización de equidistancia; Teoría de la variación; Educación Primaria; Geometría dinámica.

ABSTRACT • We present 10 year-old children's learning moments on equidistance, that occur when experiencing the variation of elements in geometric figures. The intervention was carried out in a public school in Mexico City in three 90-minute sessions. Children used for the first time a dynamic geometry program to construct and explore invariant properties of circumferences, isosceles and equilateral triangles. The results, based on the theory of variation, show that the experience was significant for conceptualizing equidistance, in contrast to collinearity and congruence, when solving geometry problems.

KEYWORDS: Learning of geometry; Equidistance conceptualization; Theory of variation; Primary School; Dynamic geometry.

Recepción: marzo 2020 • Aceptación: julio 2020 • Publicación: junio 2021

Sandoval Cáceres, I. T. y Camargo Uribe, L. (2021). Aprendizaje de la equidistancia a través de la variación: un estudio con niños de primaria. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(2), 63-81. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3254

INTRODUCCIÓN

La geometría, vista como el estudio de patrones espaciales en los que se involucran formas, tamaños relativos, localizaciones y estructuras, es una herramienta poderosa para resolver problemas. Su enseñanza, en cualquier nivel educativo, debería promover la construcción significativa de conceptos, relaciones y propiedades geométricas, así como fomentar el uso de estos en la exploración empírica, la formulación de conjeturas y la argumentación (Jones, 2002; Sarama y Clements, 2009; Owens y Outhred, 2006). Estas expectativas son señaladas en documentos que trazan orientaciones curriculares en diversos países, como en México (Secretaría de Educación Pública, 2011, 2017) y Colombia (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Adicionalmente, autores como Aravena, Gutiérrez y Jaime (2016) remarcan la necesidad de hacer cambios en la enseñanza de la geometría, desde los primeros grados escolares, a través de metodologías que involucren la resolución de problemas.

Tres relaciones geométricas, que conviene introducir desde los primeros grados de educación básica, son la equidistancia, la colinealidad y la congruencia. Estas son importantes para caracterizar geométricamente formas, tamaños relativos, ubicaciones y movimientos, así como para reconocer regularidades en diversas figuras y en transformaciones geométricas. Samara y Clements (2009) señalan que, si bien estas relaciones se van construyendo intuitivamente desde temprana edad, se requiere investigar con detalle cómo impulsar su conceptualización en la escuela primaria.

En la revisión hecha por Mulligan y Vergnaud (2006), sobre el desarrollo matemático de los niños, no se reportan investigaciones relacionadas con el aprendizaje de la equidistancia en educación primaria. Tampoco en los dos documentos donde se revisan investigaciones publicadas en actas del PME[1] (desde 1996 hasta 2015) sobre el aprendizaje de la geometría y la medida (Owens y Outhred, 2006; Jones y Tzekaki, 2016). En Sinclair et al. (2016), los reportes investigativos se centran principalmente en el desarrollo del sentido espacial global, el reconocimiento de formas bidimensionales y tridimensionales, el papel del dibujo en la construcción de significados de figuras, relaciones y transformaciones geométricas y la caracterización de niveles de razonamiento; pero no se documentan estudios sobre la relación geométrica de la que se ocupa nuestra investigación.

Identificamos entonces un área investigativa aún no suficientemente explorada, que se ocupe de estudiar la construcción del significado de la equidistancia en contraste y separación con otras relaciones como la colinealidad y la congruencia y de buscar formas para que los estudiantes las diferencien, pero también las relacionen. Nos preguntamos entonces ¿qué experiencias de aprendizaje se constituyen en una oportunidad para que niños de primaria avancen en la construcción significativa de la equidistancia?

En busca de una respuesta, vemos promisorio el uso de programas de geometría dinámica en el diseño de tareas para el aula que promuevan el estudio de relaciones geométricas de manera dinámica. Programas como GeoGebra o Cabri estimulan la exploración de representaciones geométricas cuya apariencia visual puede ser modificada a voluntad para centrar la atención en propiedades que permanecen invariantes. Así, el estudio de la geometría se redimensiona para ir más allá del reconocimiento perceptual-visual global, acercamiento usual en la educación primaria, y avanzar hacia la externalización gráfica de diferentes atributos que cambian y de aquellos que permanecen invariantes y determinan figuras geométricas (Healy, 2000; Mariotti, 2000). El ambiente dinámico estimula el tránsito del universo empírico de las formas hacia el universo del conocimiento geométrico, que esperamos que nuestros estudiantes alcancen al finalizar la educación básica (Sandoval, 2009).

En este artículo reportamos hallazgos de una experiencia educativa e investigativa, llevada a cabo con estudiantes que iniciaban su último año escolar de educación primaria en una zona periférica y

1. Por sus siglas en inglés de *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

de alta marginación de la Ciudad de México. Trabajamos con ellos cuatro problemas de geometría, al tiempo que los enseñamos en el uso del programa Cabri. Nuestra intención didáctica era propiciar su avance en producir enunciados que explicitaran relaciones de dependencia relativas a hechos geométricos, a partir de la evidencia obtenida por exploración empírica, y explicar el asunto que plantea el enunciado proponiendo inferencias, más allá de la experiencia directa.

Para el análisis elegimos la teoría de la variación (Leung, 2003, 2008; Lo, 2012), dado su potencial para analizar el aprendizaje en contextos dinámicos. Mostramos los patrones de variación experimentados por los niños, que les permitieron discernir la relación de equidistancia entre puntos que pertenecen a circunferencias o a triángulos, en contraste con la colinealidad de puntos y la congruencia de segmentos. Adicionalmente, dado que las situaciones de enseñanza que estimulan la interacción entre profesor y estudiantes tienen una gran influencia en lo que aprenden (Pang, Bao y Ki, 2017), en el análisis señalamos aspectos de la gestión del profesor que impulsaron o limitaron el discernimiento por parte de los estudiantes. En un artículo previo (Camargo y Sandoval, 2017), dimos cuenta de las fases por las que pasaron los niños en la resolución de dos de los problemas propuestos en esta experiencia, teniendo en cuenta la propuesta de Marton, Runesson y Tsui (2004) y Leung (2003, 2008).

UN ACERCAMIENTO AL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE PATRONES DE VARIACIÓN

Como lo plantean Jones y Herbst (2012), hay diferentes rangos de teorías en educación matemática. La teoría de la variación forma parte de aquellas que están centradas en la interacción profesor-estudiante. Surge al unir dos propuestas, una oriental (elaborada por Gu en China) y una occidental (desarrollada por Marton y sus colegas en Suecia). Esta ha mostrado ser efectiva para promover en los estudiantes el aprendizaje de las matemáticas en diferentes contextos (Gu, Huang y Marton, 2004). En la actualidad hay un creciente interés en la comunidad de investigadores por usarla y discutirla (por ejemplo, Lo, 2012; Jones y Herbst, 2012; Huang, Barlow y Prince, 2016; Huang y Li, 2017), así como para refinar algunos de sus elementos y ampliarla a otros contextos, como por ejemplo con el uso de artefactos tecnológicos (Leung, 2003, 2008).

Según la teoría de la variación, el aprendizaje de un objeto de conocimiento se favorece cuando se experimentan cambios al explorar representaciones variadas y dinámicas de este. Las formas de concebir una entidad se relacionan con aquellos de sus aspectos críticos en los que es indispensable enfocarse. Como señala Lo (2012), es tarea del profesor promover oportunidades para experimentar la variación y evaluar el aprendizaje a partir del rastreo de cambios en la forma de concebir la entidad a lo largo de un proceso.

En educación matemática nos referimos a la construcción de significado de objetos y relaciones matemáticas por medio de la identificación de sus propiedades invariantes. Estas son detectadas al experimentar, mental o físicamente, variaciones en representaciones dinámicas de estos (Leung, 2003, 2008). Este proceso es denominado *discernimiento*. Las propiedades matemáticas deben discernirse, es decir, ser foco de atención, identificación y diferenciación, en situaciones de variación, para construir su significado.

En Camargo y Sandoval (2017) señalamos tres presupuestos centrales de la teoría de la variación acerca del aprendizaje. Uno, el discernimiento de una propiedad está relacionado con la riqueza y diversidad de experiencias de variación experimentadas por quien aprende, donde tal propiedad se reconoce como una cualidad invariante. Dos, no basta reconocer la invariancia de una propiedad en representaciones que la poseen; es necesario identificar tal propiedad como una dimensión de variación, es decir, susceptible de adoptar diversos valores en otras entidades o situaciones. Tres, no basta con ser informado sobre las propiedades de una entidad para construir su significado; es necesario experimentar personalmente los posibles valores que puede tener una dimensión de variación, identificar en cuáles el valor es siempre el mismo y reconocerlo como un invariante.

Hay diversas maneras de experimentar la variación para identificar cualidades invariantes, es decir, propiedades. En la teoría de la variación se identifican cuatro patrones de variación.

Contraste: Este patrón sucede cuando una experiencia de variación permite distinguir entidades o situaciones que tienen una propiedad de interés de otras que no la tienen. Es decir, un valor de la cualidad comienza a notarse porque se compara con otros valores que adopta la cualidad en otras entidades o situaciones. En ese sentido, el aprendiz reconoce que hay al menos dos valores de la cualidad (Lo, 2012; Marton et al., 2004; Marton y Pang, 2009). Por ejemplo, al explorar representaciones de tres puntos, colineales o no, y en los que se varía a propósito la posición entre ellos, los estudiantes pueden comenzar a discernir la equidistancia entre pares de puntos, diferenciándola de la colinealidad. Para construir el significado de equidistancia la atención se enfoca en diferenciar pares de puntos que están a la misma distancia de aquellos que no, estén o no alineados (véase tabla 1).

Tabla 1.
Ejemplo de patrón de contraste

Valores de la cualidad	*Patrón de contraste*	*Propiedad esencial por discernir*
Dados dos puntos cuya distancia es *a*, hay pares de puntos que pueden estar a la misma distancia *a* (son equidistantes) y hay pares de puntos que no están a la misma distancia *a* (no son equidistantes).	Dos puntos son equidistantes a un tercero y también están alineados con este. Dos puntos son equidistantes a un tercero y no están alineados con este. Dos puntos no son equidistantes a un tercero y son colineales con este.	Hay pares de puntos que son equidistantes y no necesariamente colineales.

Separación: Este patrón tiene dos interpretaciones:

– Una, cuando la experiencia de variación permite identificar una cualidad invariante en diversas representaciones de una misma entidad o situación, donde otras cualidades varían (Lo, 2012). La cualidad así discernida se ve como independiente de otras cualidades del objeto, se separa de estas. Por ejemplo, al experimentar con diversas representaciones de triángulos isósceles es posible que los estudiantes identifiquen la equidistancia entre dos pares de vértices como una propiedad de tales triángulos, sin importar las longitudes específicas de los lados o la medida de ángulos interiores.
– Dos, cuando la experiencia de variación permite identificar una cualidad invariante en diversas entidades o situaciones (Leung, 2015). La cualidad así discernida se separa de las entidades o circunstancias donde se experimentó para convertirse en un objeto, en sí misma, y usarse como relación para resolver problemas. Por ejemplo, los estudiantes pueden identificar la equidistancia entre pares de vértices en triángulos isósceles o equiláteros, en pares de extremos de radios de una circunferencia o de circunferencias congruentes, etc. Así, la equidistancia no es «propia» de una sola entidad, se separa de esta y surge como una relación «equidistancia entre» pares de puntos (véase tabla 2).

Tabla 2.
Ejemplo de patrón de separación

Valores de la cualidad	*Patrón de separación*	*Propiedad esencial por discernir*
Dados dos puntos cuya distancia es *a,* hay pares de puntos que pueden estar a la misma distancia *a* (son equidistantes) y hay pares de puntos que no están a la misma distancia *a* (no son equidistantes).	En los triángulos isósceles hay dos pares de vértices equidistantes, sin importar las medidas de los lados y de los ángulos.	La equidistancia es una relación entre pares de puntos en los que se conserva la misma distancia.
	En los triángulos equiláteros cualquier par de vértices equidista de los otros dos pares de vértices.	
	En una circunferencia, un punto de esta y el centro son equidistantes de cualquier otro de sus puntos y el centro.	

Generalización: Este patrón sucede cuando una propiedad se identifica como cualidad invariante y necesaria en una entidad o situación en las que otras cualidades varían y se la reconoce como distintiva o determinante de la entidad o situación. Por ejemplo, al representar circunferencias en las que se varía a propósito su apariencia, cambiando el tamaño o la posición del centro, se discierne que no puede haber alguna donde existan puntos no equidistantes del centro (véase tabla 3).

Tabla 3.
Ejemplo de patrón de generalización

Valores de la cualidad	*Patrón de generalización*	*Propiedad esencial para discernir*
Dados dos puntos cuya distancia es *a,* hay pares de puntos que pueden estar a la misma distancia *a* (son equidistantes) y hay pares de puntos que no están a la misma distancia *a* (no son equidistantes).	No es posible que una circunferencia tenga algunos puntos que no equidisten del centro.	En cualquier circunferencia, todos los puntos equidistan del centro.

Fusión: Este patrón sucede cuando se articulan dos o más propiedades, apreciándolas simultáneamente en diferentes entidades o situaciones al enfocar la atención en ellas, después de haberlas generalizado por separado. Por ejemplo, al experimentar la variación de la longitud (cualidad que varía) de radios de una circunferencia, se puede enfocar la atención primero en la congruencia entre pares de radios (cualidad que no varía) y luego en la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia (cualidad que no varía). La fusión sucede cuando se identifica la indisolubilidad de las dos cualidades invariantes: congruencia de radios y equidistancia de los puntos de la circunferencia al centro de esta (véase tabla 4).

Tabla 4.
Ejemplo de patrón de fusión

Cualidad 1 invariante	*Cualidad 2 invariante*	*Cualidades indisolubles invariantes*
Congruencia de los radios de una circunferencia.	Equidistancia de los puntos de la circunferencia al centro.	Relación entre la congruencia de los radios y la equidistancia entre los puntos de la circunferencia y el centro.

Las experiencias de variación conducen entonces a discernir cualidades como propiedades invariantes. Cuando se discierne más de una propiedad se hace referencia a la simultaneidad en la identificación de cualidades esenciales del objeto, lo cual contribuye de manera contundente a la construcción de significados de este.

ASPECTOS METODOLÓGICOS[2]

Nuestro objetivo de investigación es dar cuenta de experiencias de aprendizaje que son oportunidades para que niños de último grado de Educación Primaria avancen en la construcción significativa de la relación de equidistancia. Para ello realizamos un *experimento de enseñanza* (Steffe y Thompson, 2000) en tres sesiones de clase, cada una de 90 minutos, al comienzo del ciclo escolar 2015-2016. Los participantes fueron 25 niños de 10 años, un grupo completo de una escuela pública, a quienes seleccionamos por el interés de su maestra en apoyar procesos investigativos. Ellos trabajaron en parejas o tríos, utilizando el programa Cabri. Aunque no tenían experiencia previa con geometría dinámica, sí estaban familiarizados con acciones de mover objetos en tabletas.[3]

Organizamos las tareas en una secuencia de cuatro problemas cuya meta final preveía dos aprendizajes, uno vinculado al proceso de construcción y otro a la argumentación, a través de la explicación («por qué»). Los niños debían lograr construir un triángulo equilátero en Cabri, cuyos lados permanecieran congruentes, aunque la representación sufriera variaciones debidas al arrastre de los vértices. También debían explicar la congruencia entre los lados del triángulo, apoyándose en construcciones auxiliares de circunferencias. Concebimos entonces una secuencia en la que los estudiantes tuvieran la oportunidad de explorar la relación de equidistancia en diversos objetos, sin proporcionarles procedimientos convencionales de construcción. En este sentido, los problemas se consideran como tareas para «hacer matemáticas» (Huang, Barlow y Prince, 2016). Para discernir la equidistancia ellos debían contrastarla y separarla de otras relaciones geométricas como la colinealidad, la interestancia[4] y la congruencia.

A medida que los niños aprendían a usar Cabri, esperábamos que consideraran la circunferencia como una opción para construir, verificar y justificar equidistancias entre puntos y congruencia entre segmentos. La gestión de la profesora debía enfocarse en apoyar la búsqueda de opciones de construcción e incentivar argumentos basados en cualidades invariantes y no en la percepción visual o los valores específicos de medidas.

En la tabla 5 presentamos los problemas, así como las intenciones didácticas relacionadas con la relación de equidistancia.

2. El acercamiento metodológico de la investigación es el mismo al presentado en Camargo y Sandoval (2017), por lo que este apartado es similar.

3. Debido a su participación en el Programa de Inclusión y Alfabetización Digital (PIAD). Para mayor información, consúltese: https://www.gob.mx/mexicodigital/articulos/programa-de-inclusion-y-alfabetizacion-digital-piad.

4. La interestancia es la relación «estar entre» y se define así: El punto C está entre A y B, si se cumplen dos condiciones: *i*) A, B y C son colineales, y *ii*) la suma de las distancias de A a C y de C a B es igual a la distancia de A a B (Samper, Molina y Echeverry, 2013).

Tabla 5.
Enunciados de los problemas e intenciones didácticas

Enunciado del problema	*Intenciones didácticas*
P1. Determinar varios puntos que estén a la misma distancia de un punto dado A. Identificar en qué objeto geométrico se encuentran todos los puntos que están a la misma distancia de A.	Discernir que la relación de equidistancia se da entre pares de puntos y que la equidistancia al centro es propiedad de los puntos de una circunferencia. Diferenciar la colinealidad y la equidistancia entre puntos.
P2.1. Encontrar una propiedad común a todos los radios de una circunferencia.	Comparar la equidistancia entre los puntos de circunferencia y el centro y la congruencia de los radios determinados por esos puntos.
P2.2. Encontrar qué figura describe el extremo de un segmento (sin variar su longitud)[5] cuando este gira alrededor del otro extremo fijo.	
P3. Construir un triángulo isósceles, describir el proceso de construcción y justificar por qué es isósceles.	Construir, verificar y justificar la equidistancia entre pares de puntos y la congruencia de segmentos en el triángulo isósceles.
P4. Construir un triángulo equilátero, describir el proceso de construcción y justificar por qué es equilátero.	Establecer relaciones de equidistancia entre pares de puntos, extremos de radios, de circunferencias congruentes.

En diálogos previos sostenidos con los estudiantes detectamos que reconocían perceptualmente circunferencias, radios, triángulos y triángulos isósceles y recordaban la clasificación de triángulos según sus lados. En el libro de texto gratuito para quinto grado *Desafíos matemáticos* (SEP, 2013) identificamos lecciones en las que se exploran relaciones de equidistancia y congruencia en diversos contextos y problemas. Los conocimientos sobre la circunferencia se enuncian, en el currículo oficial, como «Distinción entre círculo y circunferencia; su definición y diversas formas de trazo. Identificación de algunos elementos importantes como radio, diámetro y centro» (SEP, 2013, p. 80). Sin embargo, los niños con quienes trabajamos no recordaban experiencias de esa naturaleza.

La maestra titular fue invitada a participar, pero optó solo por observar el proceso. Una de las investigadoras actuó como profesora y la otra investigadora accionó dos cámaras de vídeo e interactuó con algunos estudiantes, en calidad de «otra profesora». También llevó un diario de anotaciones con sus observaciones sobre el trabajo de los estudiantes. Al terminar cada sesión o al inicio de la siguiente, se hizo una puesta en común, para destacar aspectos centrales.

Empleamos los registros de vídeo para transcribir las interacciones de las profesoras con algún niño o grupos de niños, así como las puestas en común, en cada una de las tres sesiones de clase. Complementamos las transcripciones con observaciones hechas por las investigadoras y con 12 producciones escritas en las que los estudiantes, en grupo, presentaron un informe de cada problema.

Realizamos varias lecturas analíticas a las transcripciones, en busca de la identificación de experiencias de los niños relacionadas con los patrones de variación que apuntaban a discernir la equidistancia diferenciándola de la colinealidad o de la congruencia. En ese sentido, empleamos la teoría de la variación como herramienta analítica. Las categorías de análisis corresponden a los patrones de contraste, separación, generalización y fusión, definidos como se propone en el marco teórico.

5. La longitud se escoge libremente, pero luego se trata de que no varíe.

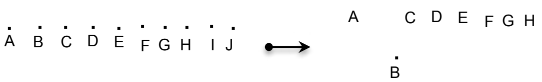
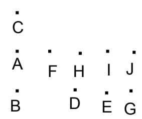
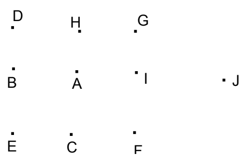
ANÁLISIS DE POSIBLES PATRONES DE VARIACIÓN ASOCIADOS A LA EQUIDISTANCIA

El análisis nos permite evidenciar que los estudiantes experimentan los patrones de variación, relacionados con la equidistancia de pares de puntos, contraste y generalización. Sobre la separación y la fusión, tenemos dudas de que los hayan experimentado. Para organizar el reporte del análisis, identificamos y describimos experiencias de variación que nos permiten observar el aprendizaje de la equidistancia en *contraste* y *separada* de la colinealidad o la congruencia.

Misma distancia-diferente distancia: patrón de contraste y dificultad para experimentar la separación

Al resolver el problema P1 los estudiantes deben discernir la «misma distancia a un punto» en el momento de localizar diez puntos equidistantes a uno dado. Ellos deben establecer que otras relaciones, como la colinealidad, no son determinantes de la relación de equidistancia. En la tabla 6 presentamos acciones de los estudiantes que, desde nuestro punto de vista, son indicadores de experimentación del *contraste* «misma distancia- diferente distancia».

Tabla 6.
Ejemplos de patrón contraste hacia la equidistancia de pares de puntos

Acciones de estudiantes (con apoyo de la profesora)	*Experiencia de variación*
Después de ubicar 10 puntos en la pantalla y nombrarlos de la *A* a la *J*, Samanta y Gustavo arrastran los puntos, variando sus posiciones hasta obtener la siguiente configuración: 	Primeros pasos en el discernimiento de la relación de equidistancia a través del *contraste* «misma distancia-diferente distancia».
Javier arrastra los puntos hasta lograr la siguiente configuración:  La profesora le pide que ubique *D* a la misma distancia de *A* que *B*. Javier arrastra el punto *D* y lo coloca superpuesto sobre *C*.	Dificultades en *separar* la equidistancia de la colinealidad por considerar una posición prototipo, en este caso, verticalidad.
Configuración de Benjamín. 	*Contraste* entre «misma distancia-diferente distancia» entre pares de puntos, pero no todos ellos respecto al punto *A*.

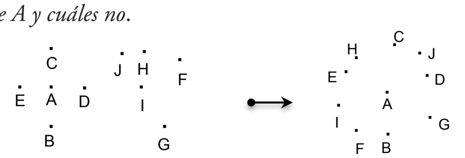
La atención de los estudiantes está puesta en lograr establecer la misma distancia entre pares de dos puntos, pero no necesariamente incluyendo el punto *A*. Al no haber separado la equidistancia de la colinealidad, las configuraciones mantienen interestancias no pedidas.

Para apoyar el discernimiento de la relación de equidistancia, la profesora les pide comparar distancias buscando la identificación del *contraste* «misma distancia» y «diferente distancia». Ellos perciben visualmente cuándo tienen éxito y cuándo no.

Misma distancia a un punto fijo-diferente distancia a un punto fijo: patrón de contraste y posibles indicios de separación de la colinealidad

Los estudiantes exploran configuraciones de puntos en donde se verifique el valor «misma distancia a un punto fijo *A*» en contraste con el valor «diferente distancia al punto fijo *A*». Este contraste les permite relacionar la propiedad de equidistancia a un punto fijo con la forma aparente de una «circunferencia», a nivel perceptivo visual, estático (válido para un único caso) y discreto (con diez puntos) (véase tabla 7).

Tabla 7.
Relación entre equidistancia y circunferencia. Primeros acercamientos

Acciones de estudiantes (con apoyo de la profesora)	*Experiencia de variación*
La profesora arrastra el punto *A* hasta un lugar céntrico en la pantalla y les pide ubicar los puntos hasta que queden «a la misma distancia del punto».[6] Javier ubica los puntos *y señala con el dedo cuáles están a la misma distancia de A y cuáles no*.  En la interacción con la profesora, Javier percibe que la figura que se forma es «una circunferencia».	*Contraste* entre «misma-diferente distancia a un punto fijo» a través de una comparación perceptiva. Discernimiento de la equidistancia *separándola* de la colinealidad.
La profesora invita a los niños a distribuirse por el salón: «Vamos a imaginarnos que todos ustedes son puntos […] Cada uno de ustedes está ocupando un lugar en el suelo, que es como la pantalla del computador. Ahora vamos a escoger un punto, lo vamos a llamar centro. Eric es el punto *A* […] lo voy a poner acá. Y a Guadalupe la voy a poner acá. Cuando yo diga *¡ya!, todos se tienen que poner a la misma distancia que está Guadalupe de Eric*». Estefanía: «que estén a la misma distancia».	*Contraste* entre «misma-diferente distancia» a un punto fijo.

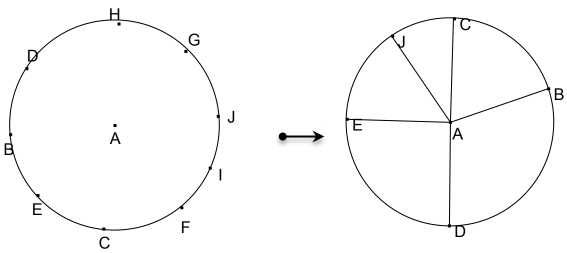
La estrategia de la profesora, al sugerir ubicar al punto *A* en otro lugar de la pantalla y pedirles «fijarse» en este punto al ubicar los demás, es una oportunidad para que los estudiantes comiencen a *separar* la equidistancia de la colinealidad. Por eso rompen con configuraciones rectilíneas, logran experimentar el *contraste* «misma distancia a *A*-diferente distancia a *A*» y obtienen una configuración curva que les evoca una circunferencia. Ella refuerza la experiencia de *contraste* con una modelación activa de la situación, en la que los niños representan puntos.

6. Usamos las comillas para indicar las expresiones textuales mencionadas en la interacción entre estudiantes y con la profesora; ponemos en cursiva aquellas expresiones que dan evidencia de patrones de variación.

Misma distancia entre dos puntos-misma longitud del segmento que los contiene como extremos. Patrón de contraste

Para resolver el problema P2-1 los niños construyen circunferencias, primero intentando que los puntos ubicados a «la misma distancia de *A*» queden perceptualmente contenidos en ella y, posteriormente, mediante una construcción robusta (Healy, 2000), en la que primero hacen la circunferencia y luego determinan varios puntos en ella. También, por sugerencia de la profesora, trazan los segmentos del centro a cada punto determinado.

Tabla 8.
Experiencia que relaciona la equidistancia y la congruencia

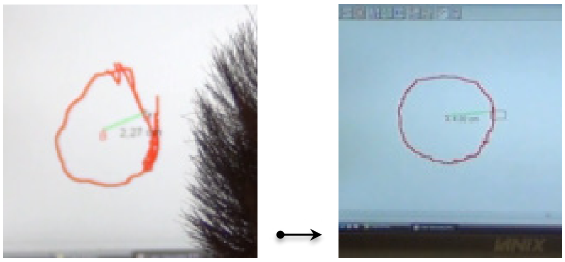
Acciones de estudiantes (con apoyo de la profesora)	*Experiencia de variación*
En un grupo, los niños han construido una circunferencia y sus radios.  Profesora: «Miren los radios a ver si ven una característica común a todos». Javier: [Después de explorar la construcción]: «*La distancia de un punto a otro punto*». Profesora: «¿En qué se parecen todos estos puntos? ¿Qué tienen igual?». Javier: «Que *miden lo mismo*». Dónovan: «Que todos ellos *están a la misma medida*».	*Contraste* misma distancia entre dos puntos-diferente distancia entre dos puntos. Dificultad para *separar* la equidistancia entre pares de puntos y la congruencia de los segmentos cuyos pares son los extremos en una misma circunferencia.

Como se evidencia en el intercambio (véase tabla 8), la construcción del significado de circunferencia se promueve al pedir a los niños ubicar puntos equidistantes a uno dado y construir radios para observar si estos tienen una propiedad común. En esta experiencia, quizás podría suponerse que los estudiantes experimentan *fusión* entre las propiedades de equidistancia entre pares de puntos y congruencia de los segmentos cuyos pares son los extremos. Sin embargo, al no haber *separado* las dos propiedades, los estudiantes experimentan una «confusión», pues no distinguen cuándo se habla de equidistancia y cuándo de congruencia o «misma medida». La confusión es notoria en la respuesta de Dónovan. Como experiencia de variación que buscaba el *contraste* relacionado con cada propiedad, quizás fue prematuro pretender que los estudiantes relacionaran las dos propiedades.

Acercar/alejar dos puntos-achicar/alargar el segmento que los contiene como extremos: patrón de contraste

En el proceso de resolución del problema P2-2, los niños experimentan con un segmento *AB* buscando que, al mover uno de los extremos, mantenga invariante su longitud, a fin de garantizar la misma distancia de *A* a *B*. Los estudiantes usan la «traza» dejada por *B*.

Tabla 9.
Para lograr congruencia entre segmentos procuran equidistancia entre sus extremos

Acciones de los estudiantes (con apoyo de la profesora)	*Experiencia de variación*
Profesora: «Van a mover a *A* tratando de que *la medida (del segmento) siempre sea igual*. Traten de *que se quede igual*, no importa que se cambie un poquitico. ¿Qué se tiene que formar?».  Leonardo: «Un círculo». Teresa: «Un círculo. Porque [el segmento] *es el radio* de la circunferencia».	*Contraste* «misma distancia-diferente distancia» entre los extremos del segmento *AB*. *Contraste* entre «misma longitud y diferente longitud de los segmentos».

Una primera exploración centra la atención de los estudiantes en comparar situaciones en las que los extremos de un segmento (cuya longitud no es fija) permanecen a la misma distancia, mientras el segmento cambia de posición, de aquellas en las que los extremos «se alejan» o «se acercan» (tabla 9). El patrón de *contraste* se experimenta ligado a un objeto geométrico: el segmento.

Cuando los estudiantes usan la opción «medida», se visibiliza la longitud del segmento, cuya posición varía al mover a *B*. Los niños tienen la oportunidad de experimentar el *contraste* entre la misma medida y diferente medida. La atención selectiva a la distancia de los extremos o a la longitud del segmento podría llevar a experimentar el patrón de *separación*, pero los términos con los que los niños se expresan nos hacen difícil determinar si realmente experimentan aquí tal separación. En caso de lograrlo, esta oportunidad de *contraste* les permitiría, eventualmente, experimentar el patrón de *fusión* al relacionar la distancia entre *A* y *B* con cambios en la medida del segmento *AB*. Ellos ilustran las relaciones con movimientos de los extremos en la pantalla y expresiones como: «cuando se alarga [*B* se aleja de *A*], la cantidad [longitud del segmento] se hace más grande y cuando se achica [*B* se acerca a *A*], la medida se hace menor» (Sandra); «se hace más grande [si *B* se aleja de *A*] y más chiquito [si *B* se acerca a *A*]» (Javier); «cuando lo arrastrábamos se hacía más grande o si lo corríamos hacia el otro punto se hacía más chica [la medida]» (Ariel). Sin embargo, no tenemos manera de confirmar que experimentan *fusión*, al no tener evidencias contundentes de *separación*.

Misma distancia entre puntos-congruencia de radios. Patrones de contraste y generalización

La profesora propone representar la situación trabajada en P2-2 promoviendo la oportunidad de experimentar la variación con el uso del cuerpo (tabla 10). La atención está en discernir que los radios de una circunferencia son congruentes y que la distancia de los puntos de la circunferencia al centro es igual. Los niños que representan los radios deberán tener el «mismo tamaño». Sus pies están en el centro de la circunferencia y coinciden, mientras que sus cabezas están sobre una circunferencia imaginaria. Así, ellos *contrastan* «mismo tamaño-diferente tamaño» respecto a la estatura de Dónovan, que representa a un segmento dado.

Tabla 10.
Patrón de contraste e indicios de generalización

Acciones de estudiantes o de la profesora	*Experiencia de variación*
Profesora: «Ahora vamos a representar con tres niños, unos radios. [Varios niños levantan la mano]. Dónovan, representa un radio. Pero tienes que ponerte en el piso porque un extremo está en el centro y el otro está allá donde está Benjamín. Para representar otro radio de esta circunferencia, ¿servirán Uriel, Ariel o Benjamín? ¿Qué característica tienen que tener?». Teresa: «*Todos tienen que ser del mismo tamaño*». Estefanía: «Porque si no quedan uno más grande y uno más pequeño». Profesora: «¿Por qué tienen que ser del *mismo tamaño*?». Benjamín: «Porque harían una circunferencia». Profesora: «Los *radios son segmentos* que tiene extremos. Y que tienen longitud […] y *todas las longitudes son iguales*. Pero *si quitamos los radios*, ¿cuál es la característica de los puntos de la circunferencia?». Dónovan: «*Siempre están a la misma distancia*». Estefanía: «Qué están todos a la misma distancia».	*Contraste* misma longitud-distinta longitud de los radios de una circunferencia. Indicios de *generalización*.

En las interacciones entre los estudiantes identificamos expresiones de los niños como «todos» y «siempre», para establecer la relación de equidistancia, que informan del tránsito en la conceptualización de la relación de equidistancia desde una percepción visual a la conservación del valor de la distancia. Interpretamos algunos indicios del patrón de *generalización* en ejemplos de sus expresiones.

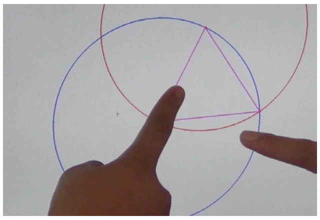
Para brindar la oportunidad de favorecer el discernimiento de la conceptualización de la circunferencia como lugar geométrico, también es necesario variar el tamaño de esta sin cambiar el centro, o variar la ubicación del centro (mediante traslación). Esta experiencia fue realizada por los niños en la actividad de construcción de triángulos isósceles y equiláteros.

Equidistancia separada de la congruencia, pero relacionadas: conservación de una medida sin un valor numérico específico. Patrón de separación

Para resolver el problema P4, es necesario establecer relaciones de congruencia entre tres radios y entre, al menos, dos circunferencias, tanto en la construcción como al justificar la relación de igualdad entre los lados.

La intervención de la profesora permitió a los estudiantes centrar la atención en pares de radios, a través del uso de la herramienta «Ocultar/mostrar» figuras, así como con el cambio de colores de los trazos, a fin de resaltar los «radios» que hay que comparar (sin conocer el valor numérico de la longitud). Esta acción didáctica generó la oportunidad de que algunos niños identificaran la congruencia entre pares de radios de una circunferencia, y entre pares de circunferencias congruentes con un radio en común. Esto es, usar relaciones geométricas para validar sus construcciones (tabla 11).

Tabla 11.
Contraste al validar la construcción de un triángulo equilátero

Acciones de estudiantes o de la profesora	*Experiencia de variación*
La profesora enfoca la atención en la relación de dos radios, «[pasa el dedo índice por dos lados del triángulo]. Este lado y este lado, ¿*son iguales*?». Javier: «Sí, porque ambos *están entre la misma distancia* de un círculo. [Señala los radios de una circunferencia] Este y este». Rodrigo: «Y si pusiéramos el otro círculo [señala los radios de la otra circunferencia] sería este y este.  Benjamín explica por qué es un triángulo equilátero: «Porque *todos sus lados son iguales*. [Mientras habla, arrastra una de las circunferencias]. Este vértice está entre esta circunferencia y esta circunferencia; este [radio] igual y este [radio] igual. Y como *las circunferencias son del mismo tamaño tienen la misma distancia*».	Separación de la equidistancia respecto a la congruencia. Indicios de *fusión* entre la equidistancia de vértices de un triángulo equilátero y la congruencia de los lados. Indicios de *generalización* de la congruencia de los lados de un triángulo equilátero.

Los estudiantes intentan valerse de la equidistancia de los extremos de los radios de circunferencias congruentes para justificar que los lados del triángulo equilátero son congruentes. Aunque sin usar un lenguaje muy preciso, hacen referencia a la equidistancia entre puntos para justificar la congruencia entre lados. Desde nuestro punto de vista, parece que han comenzado a *separar* la equidistancia de la congruencia. Además, parece haber indicios de *generalización*, sobre todo en las explicaciones de Benjamín y de *fusión* al establecer la mutua dependencia entre la equidistancia entre puntos y la congruencia de segmentos, en la construcción hecha.

Un aspecto importante en el proceso de discernir la equidistancia en *contraste* y *separada* de la congruencia es que cada relación involucra objetos geométricos diferentes. La profesora insistió en varias de sus intervenciones en enfocar la atención en esta diferencia, procurando que los niños *contrastaran* distancias y medidas y *separaran* una propiedad de la otra, en configuraciones en donde tiene sentido referirse a una o a otra.

Las relaciones de equidistancia y congruencia tienen que *separarse* o *fusionarse*, según el problema que haya que resolver. Sin embargo, consideramos que lograrlo requiere de más experiencias de variación en el contexto de resolución de problemas de construcciones geométricas.

DISCUSIÓN

La equidistancia es una dimensión de variación de la figura geométrica circunferencia. Estar a la misma distancia es un valor de esta dimensión. La distancia del punto de referencia (en este caso, punto *A*) a otro que puede variar (punto *C*), pero conservando la distancia *AB*, determina la relación entre *A* y cualquier otro punto *C* para establecer la relación de «ser equidistante de *A* como *B*». A partir de interacciones con sus pares, la profesora y Cabri, los estudiantes dan muestra de una evolución en la construcción del significado de equidistancia *separada* de la colinealidad y la congruencia y están en proceso de vincularla con la circunferencia. Esta oportunidad de trabajar entre pares, de manera independiente, y compartir sus hallazgos con la clase, resultó ser un contexto provechoso para la exploración.

En la implementación notamos que los estudiantes experimentaron la variación a fin de:

- Caracterizar figuras geométricas como circunferencia y triángulo (isósceles y triángulo equilátero).
- Descubrir propiedades como la congruencia entre los radios de una circunferencia y entre radios de circunferencias congruentes.
- Diferenciar (de manera incipiente) configuraciones geométricas en las que se establece la relación de colinealidad, de equidistancia o de congruencia.
- Transitar de un caso particular que representa una situación a una familia de casos en los que se mantienen invariantes las características que los definen.
- Usar el arrastre, la medición y la traza como herramientas para experimentar patrones de variación.
- Iniciarse en la argumentación válida en matemáticas donde son las relaciones geométricas las que explican y no la verificación con un caso particular o lo que «parece» según la percepción visual.

Para que los estudiantes tuvieran experiencias de variación fue necesario involucrarlos en exploraciones de representaciones que implicaron movimiento, observación y confrontación con sus ideas intuitivas. En este sentido, la resolución de problemas de construcción geométrica resultó beneficiosa, brindando oportunidades de aprendizaje para desarrollar la visualización, la conjeturación, la verificación de conjeturas (usando arrastre, medición) y la explicación (recurriendo a relaciones entre objetos geométricos). Notamos que experiencias previas vinculadas con la idea de «misma distancia» en actividades de formación, en clases de Educación Física o actividades cívicas, es un referente inicial para los niños en el que relacionan estrechamente la equidistancia con colinealidad. Ampliar esta idea a estructuras no colineales resultó un reto inicial para los niños participantes en este estudio.

Nuestros resultados muestran cómo la relación de equidistancia se va reinterpretando a lo largo de la experiencia de variación. En este sentido, encontramos coincidencia con lo señalado por González y Herbst (2009) para el caso de la congruencia. Estos autores identifican cuatro tipos de interpretaciones con estudiantes de secundaria: perceptivo visual, conservación de medida, correspondencia y transformación. Para la relación geométrica de equidistancia, en las experiencias de variación experimentadas por los niños de nuestro estudio, identificamos los tres primeros; por lo que consideramos que sería necesario profundizar al respecto con una investigación más amplia. Al igual que González y Herbst (2009), sostenemos que en el aula debemos generar oportunidades de aprendizaje para movilizar la atención de la percepción de formas globales a la caracterización de propiedades de las figuras geométricas, y lograr así que los niños rebasen el primer nivel, el perceptivo visual.

Las evidencias nos llevan a afirmar que se produjo aprendizaje respecto a la equidistancia en *contraste* con otras relaciones geométricas. Los niños se enfocaron en aspectos críticos de esta relación e identificaron invariantes de objetos geométricos, vinculados con esta, como la circunferencia y triángulos isósceles y equiláteros. Al resolver los problemas de construcción, los niños experimentaron, en mayor medida, el patrón de *contraste* seguido por el de *generalización* e identificamos indicios de *separación* y de *fusión*.

Para poder discernir un objeto de aprendizaje consideramos necesario experimentar los cuatro patrones de variación. Como señalan Lo (2012), Marton et al., (2004) y Marton y Pang (2009), el *contraste* induce a la *separación* de las dimensiones de variación, de modo que los aspectos críticos y las características se separan; la *generalización* ayuda a diferenciar los aspectos críticos de aquellos que no lo son, mientras que el patrón *fusión* posibilita identificar la interacción entre aspectos críticos. Sin embargo, la experiencia nos muestra la complejidad de promover experiencias relacionadas con los patrones en un salón de clase.

A lo largo de la experimentación identificamos acciones de la profesora que, como se mostró en el análisis, vinculan la relación entre «arrastre/medición» y el discernimiento de una propiedad geométrica. Inicialmente los niños se limitaron a ubicar en la pantalla puntos de sus construcciones, de manera conveniente, y sus explicaciones se centraron en «porque así se ve», «los números no cambian», «miden lo mismo», «tienen el mismo tamaño» o «si lo mueve queda la misma medida». Sin embargo, la manera en que participó la profesora (preguntas o afirmaciones) favoreció que la atención se enfocara en analizar lo que sucedía mientras movían (arrastre) los puntos, de manera sistemática, y los guio para que interpretaran lo observado en términos de propiedades y relaciones geométricas abordadas a lo largo de la experiencia.

La riqueza de la interacción alumnos-profesora permitió identificar el papel de los patrones de variación en el aprendizaje de la equidistancia en *contraste* y *separada* de la de congruencia, como se mostró en el análisis. Las acciones realizadas por la profesora fueron diversas, a fin de dar oportunidades para el aprendizaje. Ella promovió la adquisición de nuevo vocabulario a fin de enriquecer el proceso comunicativo y de argumentación geométrica; sugirió ideas clave para lograr la construcción o para enfocar la atención de los estudiantes hacia el logro de la tarea propuesta; ejemplificó ideas, usando lo realizado por otros estudiantes; enfocó la atención en aspectos claves que pudieran favorecer el discernimiento a través de preguntas; e informó a los estudiantes sobre el manejo de ciertas herramientas propias de programa de geometría dinámica, de acuerdo con las necesidades de la tarea matemática en cuestión y la intencionalidad de los niños.

Un elemento central en esta experiencia de variación fue el uso del programa de geometría dinámica, pues permitió a los niños construir figuras geométricas, visualizar sus características (con el uso de «traza») y recibir retroalimentación en tiempo real. Como señalan Soldano, Luz, Arzarello y Yerushamy (2018), el programa es un instrumento poderoso para identificar cómo los estudiantes relacionan aspectos visuales con cualidades geométricas invariantes. Este tipo de programas condicionan qué se aprende y cómo, pero hay una fuerte interrelación con otros elementos que inciden en su uso, como son la intervención del profesor y el trabajo colaborativo entre los estudiantes (Morera, Fortuny y Planas, 2012). Por ello, reivindicamos el uso de programas de geometría dinámica en el aprendizaje de la geometría, a temprana edad. Sin embargo, no basta introducir su uso en las clases, debe acompañarse de discusiones sobre lo que se hace, explicaciones, verificaciones y justificaciones que permitan a los niños construir criterios compartidos sobre el quehacer matemático.

Como señalan Marton y Pang (2009), la enseñanza no puede predecirse ni prescribirse, sino describirse. Al describir estas experiencias podemos vislumbrar la complejidad del proceso de aprendizaje y su relación con el modo en que fue abordado, estructurado y presentado en la clase.

CONCLUSIONES

Las experiencias escolares con la geometría, sobre todo en primaria, suelen estar caracterizadas por la exhibición de representaciones concretas de las figuras o cuerpos geométricos y la descripción de sus propiedades, sin ofrecer vías claras sobre cómo distinguir entre aquellas cualidades que son invariantes o aquellas que son particulares de la representación. Casi nunca se involucra a los estudiantes en experiencias de variación que les posibiliten discernir las propiedades determinantes de las formas geométricas y explicar por qué siempre se cumple esa propiedad.

Nuestros resultados muestran una experiencia de variación con una noción geométrica importante, equidistancia en *contraste* y *separada* de la colinealidad y la congruencia. Experiencia que resultó significativamente diferente para los niños participantes y les brindó oportunidades para su aprendizaje. Abordar estas ideas geométricas en la educación primaria, a través de la variación en ambientes de geometría dinámica, permitió a los niños acercarse a ella a través de resolución de problemas de construcción.

El ejercicio analítico nos permitió profundizar en la teoría de la variación y valorar su potencial. Pudimos ponerla en juego para estudiar el aprendizaje de una relación geométrica. Además, la investigación nos permitió poner en entredicho la linealidad con la que se asumen frecuentemente los patrones de variación, pues notamos que es un asunto de avances y retrocesos. En particular, el patrón de *fusión* se puede ir experimentando sin haber *separado* las propiedades relacionadas, pero es innegable que mientras estas no estén *separadas* no se podrá afirmar que se identifica la dependencia entre las propiedades.

Un asunto que queremos señalar, a manera de conclusión, es que el patrón de *separación* tiene al menos dos interpretaciones en la literatura y este hecho no se hace explícito. Algunos autores (Lo, 2012) lo refieren a un solo objeto de aprendizaje (como un todo), mientras que otros (Leung, 2015) lo refieren a varios objetos. En nuestro marco teórico explicitamos las dos interpretaciones y las usamos como parte del análisis.

Las investigaciones revisadas (Mulligan y Vergnaud, 2006; Owens y Outhred, 2006; Sinclair et al., 2016 y Jones y Tzekaki, 2016) señalan la necesidad de proponer alternativas de enseñanza más efectivas que den a los estudiantes oportunidad de acceso a conceptos geométricos relevantes. Consideramos que nuestra investigación aporta luz a este asunto pues se abordaron objetos y relaciones geométricas importantes en actividades de variación. Sin embargo, es necesario realizar más estudios en edades tempranas para profundizar en el aprendizaje de la equidistancia.

AGRADECIMIENTOS

Al Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, por su apoyo a los proyectos de investigación «Geometría: vía al razonamiento científico» –DMA-399-15– y «Conocimiento del profesor de geometría para diseñar tareas de argumentación y demostración» –DMA-518-20–. A la Secretaría de Relaciones Exteriores por la Beca de Excelencia de Programas Especiales del Gobierno de México para Extranjeros Convocatoria 2015, AMEXCID. Al Área Académica 4: Tecnologías de la Información y Modelos alternativos de la Universidad Pedagógica Nacional, unidad Ajusco, México, por su apoyo al proyecto «Razonamiento espacial en edades tempranas: Un estudio con profesores en diferentes ambientes culturales y tecnológicos». A la Escuela Primaria Alfredo V. Bonfil, por su participación en el programa de vinculación interinstitucional, de la Universidad Pedagógica Nacional, unidad Ajusco, México, «Aprendizaje de las matemáticas en contextos diversos».

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aravena, M., Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(1), 107-128. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1664

Camargo, L. y Sandoval, I. (2017). Acceso equitativo al razonamiento científico mediante la tecnología. *Revista Colombiana de Educación*, *73*, 179-211. https://doi.org/10.17227/01203916.73rce177.209

González, G. y Herbst, P. (2009). Students' conceptions of congruency through the use of dynamic geometry software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *14*(2), 153-182. https://doi.org/10.1007/s10758-009-9152-z

Gu, L., Huang, R. y Marton, F. (2004). Teaching with variation: An effective way of mathematics teaching in China. En L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai y S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 309-345). Singapore: World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789812562241_0012

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 103-117). Hiroshima: Universidad de Hiroshima.

Huang, R., Barlow, A. y Prince, K. (2016). The same tasks, different learning opportunities: An analysis of two exemplary lessons in China and the US from a perspective of variation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 141-158. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.12.001

Huang, R. y Li, Y. (Eds.) (2017). *Teaching and learning mathematics through variation: Confucian heritage meets western theories*. The Netherlands: Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-782-5

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: Perspectives on Practice* (pp. 121-139). Londres: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203165874

Jones, K. y Herbst, P. (2012). Proof, proving, and teacher-student interaction: Theories and contexts. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (vol. 15, pp. 261-277). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_11

Jones, K. y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En A. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4

Leung, A. (2003). Dynamic geometry and the theory of variation. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceeding of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 197-204). Honolulu: PME.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*(2), 135-157. https://doi.org/10.1007/s10758-008-9130-x

Leung, A. (2015). Discernment and Reasoning in Dynamic Geometry Environments. En S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 451-469). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_26

Lo, M. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Mariotti, M. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1), 25-53. https://doi.org/10.1023/A:1012733122556

Marton, F. y Pang, M. F. (2009). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences*, *15*(2), 193-220. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1502_2

Marton, F., Runesson, U. y Tsui, A. (2004). The Space of Learning. En F. Marton y T. Amy (Eds.), *Classroom Discourse and the space of learning* (pp. 3-42). Nueva York: Taylor & Francis Group. https://doi.org/10.4324/9781410609762

MEN (Ministerio de Educación Nacional) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Morera, L., Fortuny, J. y Planas, N. (2012). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías en un entorno colaborativo y tecnológico. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(1), 143-154. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.569

Mulligan, J. y Vergnaud, G. (2006). Research on children's early mathematical development. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 117-146). UK: Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_006

Owens, K. y Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 83-115). UK: Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_005

Pang, M., Bao, J. y Ki, W. (2017). «Bianshi» and the variation theory of learning: illustrating two frameworks of variation and invariance in the teaching of mathematics. En R. Huang y Y. Li (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation* (pp. 43-67). The Netherlands: Sense Publisher. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-782-5_3

Samper, C., Molina, O. y Echeverry A. (2013). *Elementos de Geometría*. Bogotá: Fondo editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, *21*(1), 5-27.

Sarama, J. y Clements, D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Nueva York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785

SEP (Secretaría de Educación Pública) (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Quinto grado.* México: Conaliteg.

SEP (Secretaría de Educación Pública) (2013). *Desafíos. Quinto grado. Docente.* México: Conaliteg.

SEP (Secretaría de Educación Pública) (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y Programas de Estudio para la Educación Básica*. México: Conaliteg.

Sinclair, N., Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, *48*(5), 691-719. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6

Soldano, C., Luz, Y., Arzarello, F. y Yerushamy, M. (2018). Technology-based inquiry in geometry: semantic games through the lens of variation. *Educational Studies in Mathematics*, *100*(1), 7-23. http://doi-org-443.webvpn.fjmu.edu.cn/10.1007/s10649-018-9841-4

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267-307). Nueva York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410602725

Learning equidistance through variation: a study with primary school children

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Universidad Pedagógica Nacional, México
isandoval@upn.mx

Leonor Camargo Uribe
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co

This article reports findings from an educational and research experience carried out with students who were starting their last year of Primary Education, in a peripheral and highly marginalized area of Mexico City.

Our research objective is to give an account of learning experiences that represent opportunities for 10-year-old children so as to advance in the meaningful construction of the equidistance relationship. To accomplish the foregoing we carried out a *teaching experiment* (Steffe and Thompson, 2000).

The participants were 25 children, a full class from a public school, whom we selected on account of the interest shown by their teacher for supporting research processes. We worked with them on four geometry problems, while teaching them how to use the Cabri program. Pedagogically, our intention was to encourage their progress in producing statements that would explain dependency relationships related to geometric facts, from the evidence obtained by empirical exploration and to explain the issue that the statement raises by proposing inferences, beyond direct experience.

For the analysis we chose the theory of variation (Leung, 2008; Lo, 2012), given its potential for analyzing learning in dynamic contexts. We show the patterns of variation experienced by children, which allowed them to discern the equidistance relationship between points in circumferences or triangles, in contrast to collinearity of points and the congruence of segments. Additionally, given that the teaching situations that stimulate the interaction between teacher and students wield great influence on what they learn (Pang, Bao and Ki, 2017), in the analysis we highlight aspects of the teaching that promoted or limited discernment by the students.

The evidence leads us to affirm that learning was produced with respect to equidistance in *contrast* to other geometric relationships. The children focused on critical aspects of this relationship and identified invariants in geometric objects linked to it, such as the circumference and isosceles and equilateral triangles. When solving the construction problems, the children experienced, to a greater extent, the *contrast* pattern followed by that of *generalization* and we identified signs of *separation* and *fusion*.

In order to discern a learning object, we believe it is necessary to experience the four patterns of variation. As Lo (2012), Marton, Runesson and Tsui (2004) and Marton and Pang (2009) point out, the *contrast* induces the *separation* of the dimensions of variation so that the critical aspects and the characteristics are separated; *generalization* helps to differentiate critical aspects from those which are not, while the *fusion* pattern makes it possible to identify the interaction between critical aspects. However, the experience shows us the complexity of promoting pattern-related experiences in the classroom.

The analytical exercise allowed us to delve into the theory of variation and assess its potential. We were able to apply it to study the learning of a geometric relationship. Furthermore, the research allowed us to put to the test the assumed linearity of variation patterns, as we have seen that it entails an ebb and flow of progress and setbacks. In particular, the *fusion* pattern can be experienced without having separated the related properties, but it is undeniable that if they have not been *separated*, the dependency between the properties cannot be said to have been identified.