ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 40-2 (2022), 125-145
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3457
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Análisis de una tarea sobre sucesiones desde el uso de las herramientas y el conocimiento matemático del profesor

A Sequences' Task Analysis from the Use of Tools and the Teacher's Mathematical Knowledge

Paula Verdugo-Hernández
Escuela de Pedagogía en Ciencias Naturales y Exactas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Talca. Linares, Chile
pauverdugo@utalca.cl / paulasinttia@gmail.com

Gonzalo Espinoza-Vásquez
Departamento de Pedagogías Medias y Didácticas Específicas, Facultad de Educación, Universidad Alberto Hurtado. Santiago, Chile
gespinoza@uahurtado.cl / gonzalo.espinoza.v@gmail.com

José Carrillo Yáñez
Departamento de Didácticas Integradas, Universidad de Huelva. Huelva, España
carrillo@uhu.es

RESUMEN • El estudio en conjunto del espacio de trabajo matemático (ETM) y del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) ha mostrado potencial para comprender la actividad matemática del profesor. Utilizando este potencial, se estudia el uso de distintos tipos de herramientas (teóricas, semióticas y operacionales) y el conocimiento que el profesor moviliza cuando desarrolla una tarea matemática. El objetivo de este escrito es caracterizar el trabajo matemático del profesor en relación con el desarrollo de una tarea y el conocimiento que esta moviliza. Se trata de un estudio de caso en el que se analiza una tarea en el tema de sucesiones junto al desarrollo que propone un profesor universitario. Los resultados permiten evidenciar una relación entre herramientas y conocimientos que contribuye a la comprensión de la práctica del profesor y profundiza en la conexión entre ambos modelos.

PALABRAS CLAVES: Espacio de trabajo matemático; Conocimiento especializado del profesor de matemáticas; Herramientas; Sucesiones; Conexión entre teorías.

ABSTRACT • The complement of the mathematical working space (MWS) and the mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) has shown the potential to understand the teacher's mathematical activity. This paper aims to characterize the teacher's mathematical work on solving a task and the knowledge that it mobilizes. More precisely, we study the use of different kinds of tools (theoretical, semiotic, and operational) and the mobilized knowledge of the teacher when resolve a mathematical task. It is a case study in which a task about sequences and its resolution proposed by a university professor are analyzed. Findings show a relationship between tools and knowledge that contribute to understanding the teacher's practice and deepen the connection between both models.

KEYWORDS: Mathematical working space; Mathematics teacher's specialized knowledge; Tools; Sequences; Networking theories.

Recepción: octubre 2020 • Aceptación: mayo 2022 • Publicación: junio 2022

Verdugo-Hernández, P., Espinoza-Vásquez, G. y Carrillo Yáñez, J. (2022). Análisis de una tarea sobre sucesiones desde el uso de las herramientas y el conocimiento matemático del profesor. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(2), 125-145.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3457

INTRODUCCIÓN

El quehacer del profesor ha sido un tema de interés para distintas investigaciones y marcos teóricos. Muestra de ello son los trabajos de Shulman (1986, 1987), quien se ocupa de comprender la práctica docente en función del conocimiento que requiere. La línea de investigación de Shulman ha sido pionera en la conceptualización del conocimiento profesional docente como una composición de distintos dominios, entre los que se incluye el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico de ese contenido. La práctica del profesor estará influenciada por las interacciones entre estos conocimientos.

En el caso del profesor de matemáticas, parte de su quehacer está relacionado con la propuesta y resolución de tareas en el contexto de la enseñanza. Reconocemos que no existe consenso en la definición de *tarea*, por lo que adoptaremos aquella utilizada por Henríquez-Rivas et al. (2021), quienes se refieren a ella como «una experiencia matemática planificada para los estudiantes, que puede ser una acción o una secuencia de acciones» (p. 127), definición que se ajusta a los propósitos de este escrito.

Así, el diseño, la selección o la resolución de tareas se vuelven temas relevantes en el ejercicio docente y en investigaciones que involucran al profesor. Particularmente, la resolución de tareas ha sido objeto de estudio desde diferentes perspectivas, algunas de las cuales se relacionan con la práctica matemática (e. g. De Villiers, 1990; Henríquez-Rivas et al., 2021) o con el conocimiento matemático que sustenta dichas prácticas (e. g. Climent et al., 2021; Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2019).

Por otro lado, coincidimos con Murcia y Jaramillo (2001) en que la comprensión de un fenómeno no se logrará "si se percibe desde pequeñas miradas del investigador" (p. 195), siendo necesario ampliar la perspectiva y, con ello, la comprensión del fenómeno que se estudia. Estas miradas están acotadas por el referente teórico seleccionado y son ampliadas cuando se consideran otros resultados en el tema o mediante aproximaciones teóricas diferentes. De acuerdo con Prediguer, Bikner-Ahsbahs y Arzarelo (2008), la diversidad de teorías responde, entre otros factores, a la complejidad de los temas de estudio y a que el carácter multifacético del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas no permite explicar este proceso con un solo enfoque monolítico. En este sentido, son necesarios diferentes enfoques para mejorar la comprensión de los fenómenos y profundizar en este campo de investigación. En concordancia con lo anterior, se explicaría el auge en el interés por estudiar las posibles relaciones entre teorías (véanse el número 2 del volumen 40 de la revista *ZDM*, 2008, y Sriraman y English, 2010), incluso cuando los fundamentos epistemológicos de estas no son necesariamente compatibles (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010).

Para establecer la conexión de teorías, es necesario comprender qué se entiende por teoría y en qué niveles se podría realizar. Para Maier y Beck (2001), una teoría es un diseño de construcción conceptual para comprender y observar parte de la realidad de un modo entendible, consistente y sistemático, lo que aporta un lenguaje para formular interrogantes sobre el objeto de investigación. Estos autores señalan que una teoría permite: 1) describir el tema y objetivo de la investigación; 2) identificar las bases y especificaciones teóricas; 3) reconstruir los medios, formas y resultados del desarrollo de la teoría; y 4) recopilar los planteamientos sobre metodología y lógica de la investigación.

En la presente investigación consideramos estas características de las teorías y los beneficios en la capacidad explicativa y descriptiva que propone el uso en conjunto de estas (Prediger et al., 2008) para comprender la resolución de una tarea matemática por parte de un profesor. En lugar de pretender elaborar un sistema de categorías de análisis fruto del estudio de las posibles relaciones entre dos teorías, es decir, una integración local en la línea de Gellert, Barbé y Espinoza (2013), lo que se busca es una comprensión más profunda de un fenómeno mediante una doble mirada teórica y estrechar las relaciones declaradas entre ambos constructos (e. g. Vasco et al., 2016) con la apertura a encontrar posibles nuevas relaciones. En esta línea, Prediger et al. (2008) mencionan varios grados de conexión, que van desde ignorar otras teorías, en un polo, hasta la unificación global, en el otro. Entre las estrategias de conexión se contempla la coordinación y la combinación de los elementos que las componen, dejando esta última para las teorías que no necesariamente comparten sus bases, pero que pueden contribuir a ofrecer una mejor comprensión de un fenómeno. Más adelante abordaremos la complementariedad con mayor profundidad.

Con base en lo anterior, nuestro objetivo es caracterizar el trabajo matemático del profesor en relación con el desarrollo de una tarea y el conocimiento que moviliza el desarrollo de esta. Para ello, utilizaremos el modelo de los espacios de trabajo matemático (ETM) que permite estudiar el trabajo matemático del profesor (Kuzniak, 2011) y el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) que permite estudiar su conocimiento de cara a la enseñanza (Carrillo et al., 2018).

MARCO TEÓRICO

A continuación, presentamos los modelos teóricos ETM y MTSK, resaltando los elementos que serán utilizados para nuestros análisis y así conformar nuestro marco teórico que permita abordar el trabajo matemático y el conocimiento especializado, a partir de las relaciones entre los modelos.

Espacio de trabajo matemático (ETM)

El espacio de trabajo matemático estudia la actividad matemática en torno a tareas matemáticas cuando un individuo las desarrolla, las propone u organiza para la enseñanza, contemplando los planos epistemológicos y cognitivos del trabajo matemático. El ETM (figura 1) contempla tres componentes en cada uno de estos planos. El plano epistemológico está constituido por la componente del *referencial* (formado por las propiedades, teoremas y definiciones), del *representamen* (signos semióticos) y del *artefacto* (que pueden ser materiales o simbólicos). Por su parte, el plano cognitivo está constituido por la componente de *visualización* (relativa a la representación del espacio y al soporte material), de *construcción* (que depende de los instrumentos y técnicas asociadas) y de *prueba* (apoyada en el proceso discursivo de validación, basada en el referencial teórico). Ambos planos se conectan mediante distintas génesis (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016):

- Una *génesis instrumental* que permite hacer operatorios y dar sentido a los artefactos en el proceso constructivo.
- Una *génesis semiótica* que permite pasar de una perspectiva sintáctica (símbolos y signos) a una semántica (extracción del significado) de los objetos matemáticos.
- Una *génesis discursiva* que da sentido a las propiedades y permite ponerlas al servicio del razonamiento matemático.

Es importante señalar que el ETM debe ser visto como la articulación de dos o más génesis activadas, mediante la resolución de una tarea, en lugar de la unión de los componentes de ambos planos.

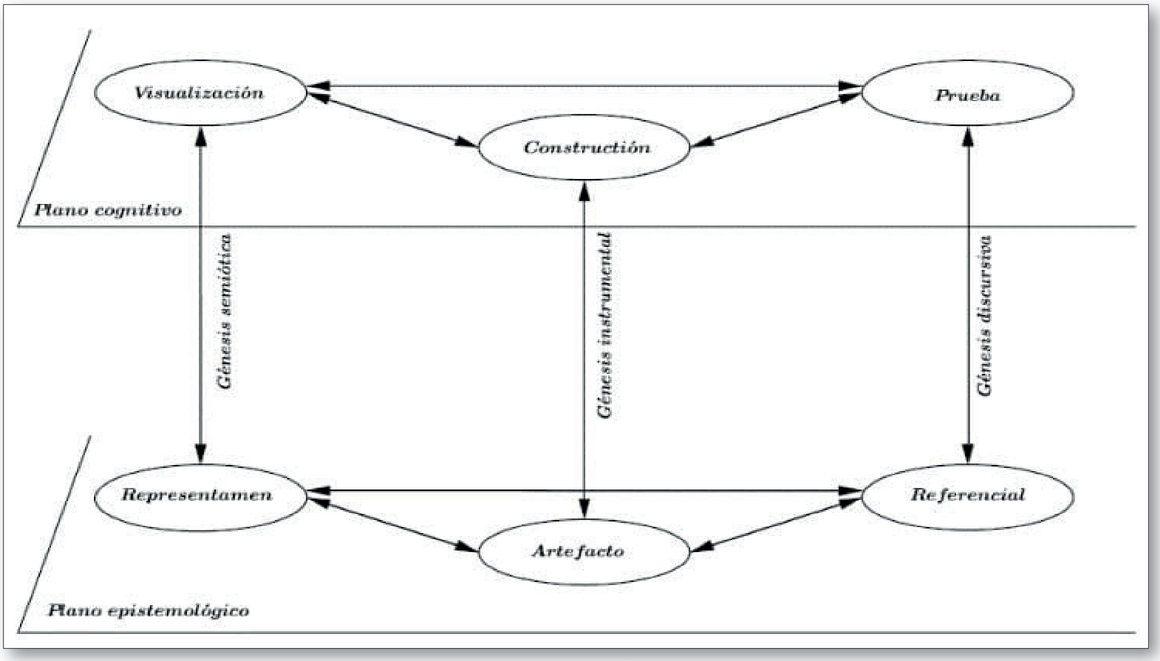


Fig. 1. ETM y sus génesis (Kuzniak, 2011).

De acuerdo con Gómez-Chacón et al. (2016), se consideran tres tipos de espacios de trabajo matemático: el ETM de *referencia*, que se define solo sobre la base de criterios matemáticos; el ETM *idóneo*, que consiste en el acondicionamiento y la organización del ETM de referencia con el fin de convertirlo en un espacio de trabajo efectivo en una institución educativa dada; y el ETM *personal*, que cada individuo desarrolla con sus propios conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas (Kuzniak, 2011). Para efecto de este estudio, ponemos el foco en el ETM personal del profesor, toda vez que lo consideramos como un individuo que resuelve una tarea matemática fuera del contexto de enseñanza, lo que le conduce a movilizar parte de su conocimiento sobre el tema. Además, cuando el profesor selecciona una tarea y la propone a sus estudiantes como parte de la enseñanza, estamos contemplando el estudio de una parte del ETM idóneo.

Por otra parte, Kuzniak et al. (2016) se refieren, de manera general, a una herramienta como aquello que debe utilizarse para resolver eficazmente una tarea. En el ETM, el término *herramienta* se utiliza para referirse a aquellas componentes del plano epistemológico que tienen un uso potencial para resolver un problema dado y que están asociadas con el plano cognitivo por medio de alguna de sus génesis. Según Kuzniak et al. (2016), se consideran tres tipos de herramientas:

– *Herramientas semióticas*: herramientas no materiales para operar sobre representaciones semióticas de objetos matemáticos.
– *Herramientas tecnológicas*: artefactos como herramientas de dibujo o técnicas rutinarias basadas en algoritmos o calculadoras con algoritmos de cálculo implementados.
– *Herramientas teóricas*: correspondientes a razonamiento basado en la lógica y en las propiedades de los objetos matemáticos, las cuales pertenecen al referencial de la tarea que se busca resolver.

Adicionalmente, Verdugo-Hernández (2018) incorpora la siguiente tipología de herramienta:

– *Herramientas operacionales*: se refiere a aquellas herramientas teóricas, que son utilizadas para resolver cierta tarea, pero que no forman parte del referencial teórico al cual pertenece dicha tarea.

Por ejemplo, para abordar una demostración de convergencia de sucesiones podría requerirse aplicar propiedades del orden de los números reales, lo cual adquiere el carácter de herramienta operacional al estar en el referencial de los números reales en lugar del referencial de las sucesiones.

A continuación, en la tabla 1, proponemos listas de ejemplos no exhaustivas, en el ámbito de la convergencia de sucesiones, que se podrían identificar como herramientas del tipo que nos interesa abordar en este trabajo.

Tabla 1.
Herramientas teóricas, semióticas y operacionales asociadas a las sucesiones (Verdugo-Hernández, 2018)

Herramientas teóricas	*Herramientas semióticas*	*Herramientas operacionales*
– Reglas del álgebra de sucesiones convergentes. – Criterio de convergencia de sucesiones monótonas y acotadas. – Teorema del "sándwich".	– Término general de una sucesión. – Relaciones de recurrencia.	– Inducción matemática. – Teorema del binomio de Newton. – Propiedades de las desigualdades de números reales.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

De acuerdo con Carrillo et al. (2018), el MTSK se presenta como un modelo analítico para el conocimiento del profesor de matemáticas y una herramienta para analizar sus prácticas (Carrillo et al., 2014), organizado en tres dominios: el conocimiento matemático (MK, por sus siglas en inglés), el conocimiento didáctico del contenido (PCK) y el dominio de las creencias (figura 2).

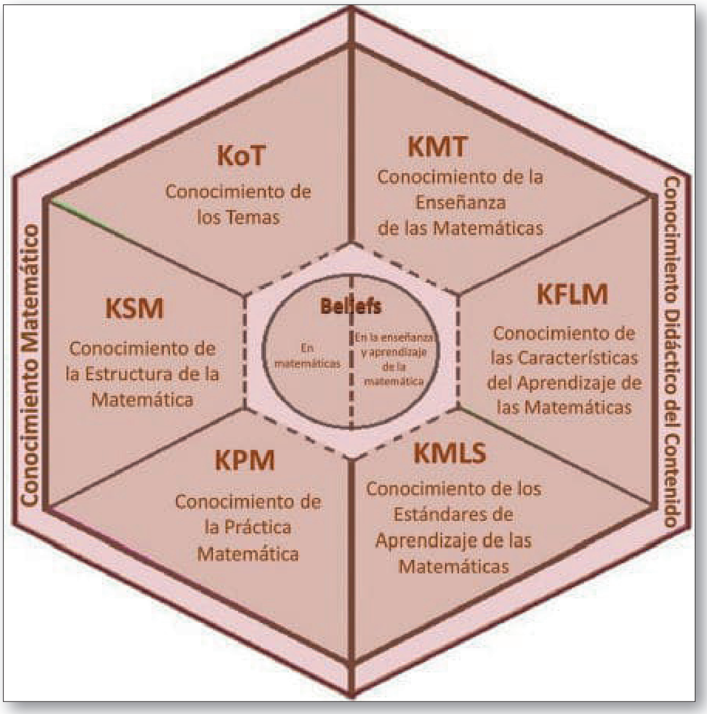


Fig. 2. Dominios y subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2014).

El dominio del conocimiento matemático (MK) reúne el conocimiento de las matemáticas como una disciplina científica. Aquí se incluye el conocimiento de los temas matemáticos (KoT), el conocimiento de la forma en que los temas se relacionan estructurando este cuerpo de conocimiento a través de conexiones entre conceptos (KSM) y el conocimiento sobre la forma en que se produce, explora y comunican las ideas matemáticas vistas como prácticas matemáticas (KPM).

El dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK) contempla el conocimiento del profesor sobre los temas matemáticos como objetos de enseñanza que condicionan las estrategias, ejemplos, recursos y teorías de enseñanza (KMT), el conocimiento del tema matemático como un objeto de aprendizaje que incluye la forma en que los estudiantes lo aprenden o se acercan a él, las teorías de enseñanza y los aspectos emocionales de este aprendizaje (KFLM), así como el conocimiento de lo que está estipulado que aprendan los estudiantes junto a la profundidad de este aprendizaje en un determinado nivel escolar (KMLS).

El tercer dominio incluye las creencias del profesor acerca de las matemáticas y sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. En el MTSK se considera importante incluir estas creencias, pues permean los conocimientos de los otros dominios. En este escrito abordamos solamente los subdominios del MK, que definimos con más detalle a continuación.

El subdominio del conocimiento del tema (KoT) corresponde al conocimiento del profesor sobre los temas matemáticos y tiene como una de sus referencias el conocimiento que los estudiantes deben aprender, pero con una profundidad mayor, pues se espera que el profesor conozca los temas que debe enseñar. El KoT incluye el conocimiento del tema sobre los procedimientos asociados, las definiciones tradicionales o alternativas, las propiedades o teoremas del tema y sus fundamentos, así como los registros de representación, la fenomenología y las aplicaciones del tema.

Por su parte, el subdominio del conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) incluye el conocimiento de conexiones interconceptuales dadas por dos aspectos: la temporalidad y la delimitación. El primer aspecto corresponde a la evolución del tema (no desde una perspectiva curricular) que genera conexiones de complejización y conexiones de simplificación. El segundo aspecto genera conexiones dentro (intraconceptual, ya contempladas en el KoT) y fuera del tema (interconceptual). En el KSM se consideran estas últimas, lo que genera las conexiones transversales entre temas que comparten cualidades y las conexiones auxiliares cuando se recurre a otro tema para apoyar el tratamiento del tema actual.

Finalmente, el conocimiento de la práctica matemática (KPM) incluye el conocimiento sobre cómo se producen los resultados en matemáticas y cómo se construye el conocimiento matemático, lo que incluye formas de conocer, crear y producir en matemáticas, así como aspectos de la comunicación, el razonamiento y la prueba involucrados en esta actividad. Este subdominio no cuenta, hasta la fecha, con categorías para su organización como el KoT y KSM.

El carácter especializado con que se propone el conocimiento del profesor, de acuerdo con Espinoza (2020), supone que estas categorías y subdominios no se presentan de manera aislada en la práctica del profesor y que es el resultado de las formas de conocer el contenido matemático necesario para la enseñanza. La tabla 2 muestra ejemplos de conocimientos relativos a las sucesiones en las categorías de los subdominios considerados para este reporte.

Tabla 2.
Conocimientos matemáticos asociados a las sucesiones

KoT: conocimiento sobre	KPM*: conocimiento sobre	KSM: conocimiento sobre
Definiciones, propiedades y sus fundamentos: – La definición de sucesión. – Teoremas de convergencia. Procedimientos: – Cálculo de límites de sucesiones. Registros de representación: – Notaciones usuales para las sucesiones.	Comunicación de ideas matemáticas: – El rol de la simbología en la comunicación de ideas matemáticas, como los cuantificadores en las funciones proposicionales. Validación de proposiciones: – El principio de inducción como forma de demostrar propiedades dadas para números naturales. Formas de proceder en la resolución de problemas.	Conexiones auxiliares: – El teorema del binomio de Newton. – Resolución de ecuaciones. Conexiones de complejización: – Generalizar la idea de sucesión al concepto de función. Conexiones de simplificación: – Las secuencias y patrones numéricos como inicio de sucesiones numéricas.

Los conocimientos incluidos en la tabla 2 podrían mostrarse relacionados en la práctica del profesor cuando enseña el cálculo del límite de una sucesión, apoyado por algún teorema de convergencia, y comunica los argumentos a sus estudiantes utilizando notaciones clásicas y sintaxis propias de la matemática. Además, en este contexto se podría relacionar la convergencia de sucesiones con el límite de funciones o con patrones numéricos.

Complementariedad entre ETM y MTSK

La combinación de los elementos teóricos, como estrategia de conexión (Prediger et al., 2008), permite establecer relaciones entre teorías que pueden o no compartir sus núcleos epistemológicos. En este sentido conviene conocer cuáles son las características de las teorías e identificar de qué forma se puede establecer la conexión entre sus elementos.

De acuerdo con Radford (2008), una teoría está compuesta por Principios (P), Metodología (M) y Preguntas de Investigación Pragmáticas (PI), las cuales se pueden observar tanto en el ETM como en el MTSK. Por ejemplo, el ETM aborda la resolución de tareas matemáticas con el propósito de comprender la actividad matemática como actividad humana preguntándose, por ejemplo, sobre las características del trabajo matemático que se propicia en el aula o que desarrolla un individuo en particular (PI), lo que requiere de una dimensión cognitiva asociada a la dimensión epistemológica (P), mediante la observación de la resolución de problemas por parte de un individuo (M). Por su parte, el MTSK tiene por objetivo comprender el conocimiento movilizado en las prácticas de enseñanza del profesor y responder al qué y cómo conoce, por ejemplo, al plantear preguntas sobre las características del conocimiento del profesor, las relaciones con el interior de este y cuál es el conocimiento requerido para que el profesor guíe el proceso de enseñanza y aprendizaje (PI); para ello contempla dos dominios de conocimiento y uno de creencias sobre la matemática, su aprendizaje y su enseñanza como una conceptualización de lo que conoce/debe conocer el profesor de cara a la enseñanza (P), lo cual puede ser observado en el contexto de su quehacer profesional como su práctica de aula, la interacción con otros profesores o durante la planificación de la enseñanza (M). Con ello, el ETM y el MTSK poseen las características de las teorías mencionadas por Radford (2008) y Maier y Beck (2001); sin embargo, hablaremos de estos como modelos teóricos según sus formulaciones originales, lo que junto a las relaciones entre ellos conforma nuestro marco teórico.

Debido a la naturaleza de los modelos ETM y MTSK, entendemos la complementariedad como una posibilidad de refinar el análisis que puede hacer cada uno sobre la práctica del profesor en relación con una pregunta de investigación abordable desde ambos, es decir, un aporte mutuo. El planteamiento de preguntas, problemas u objetivos es uno de los desafíos de la conexión, pues requiere del conocimiento de las potencialidades y limitaciones de ambos, así como del conocimiento mutuo de sus elementos teóricos y de la compatibilidad de sus componentes (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010). Objetivos, problemas o preguntas sobre un mismo fenómeno, planteados en el marco de la conexión entre modelos, pueden formularse contemplando los alcances anteriores o mediante la reformulación de asuntos provenientes de uno de ellos que admitan la incorporación de nueva perspectiva (Prediger y Bigner-Ahsbahs, 2014). En este sentido se apunta a refinar los análisis. Lo anterior busca atender, a su vez, a las preguntas planteadas por Gómez-Chacón, Carrillo et al., (2016) sobre ¿cuál es la contribución entre ETM y MTSK? y ¿cómo contribuye la relación ETM-MTSK a comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje?

Distintos trabajos han indagado la relación ETM-MTSK (Gómez-Chacón et al., 2015), algunos de ellos desde una perspectiva general, observando cómo el conocimiento especializado del profesor de matemáticas incide en la estructuración del ETM idóneo (Espinoza-Vásquez, Ribeiro y Zakaryan, 2018) y cómo este último se ve afectado por los ETM personales de los estudiantes en el contexto de las aulas. De acuerdo con Flores-Medrano et al. (2016), el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas permitiría al profesor interpretar estos ETM personales. Por su parte, Vasco et al. (2016) miran el ETM desde el MTSK interpretando la activación de las componentes del ETM como conocimientos de distintos subdominios del MTSK. Estas investigaciones resultan ser una fase previa a la complementariedad.

Otros trabajos proponen conexiones más específicas entre sus componentes (e. g. Espinoza, 2016; Espinoza-Vásquez et al., 2018; Vasco et al., 2016; Henríquez-Rivas y Espinoza-Vásquez, 2018; Verdugo-Hernández y Espinoza-Vásquez, 2018a; Zakaryan et al., 2016). Por ejemplo, la génesis discursiva e instrumental del ETM se ha vinculado a los subdominios KPM y KSM (e. g. Flores-Medrano et al., 2016; Vasco et al., 2016), lo que permite comprender el conocimiento que el profesor pone en juego en la transición entre los distintos espacios de trabajo. La mirada desde ambos modelos sobre la práctica del profesor permite comprender la actividad matemática que propicia y cómo esta se explica desde su conocimiento.

Por otra parte, Espinoza (2016) identifica el profesor y la tarea matemática como elementos que posibilitan la conexión ETM-MTSK, y muestra que los conocimientos en el MTSK se relacionan con las génesis del ETM. El trabajo de Henríquez-Rivas y Espinoza-Vásquez (2018) profundiza en las relaciones entre el conocimiento de las representaciones y la génesis semiótica, señalando que el KoT permite pormenorizar las interacciones entre los planos que involucra esta génesis. Adicionalmente, Verdugo-Hernández y Espinoza-Vásquez (2018a; 2018b) inician el estudio de las herramientas del ETM y el MTSK, destacando que las conexiones auxiliares están relacionadas con las herramientas operacionales a través de un cambio de referencial, lo que deja una línea abierta para profundizar en esta temática (Gómez-Chacón, Carrillo et al., 2016).

En este contexto de complementariedad y relaciones locales, nos interesa ahondar en el estudio de las herramientas del ETM y cómo estas pueden ser comprendidas desde (y con) el MTSK en la práctica del profesor. Así, nuestro objetivo en términos de estos componentes teóricos es comprender el uso de herramientas (teóricas, operacionales y semióticas) en las prácticas matemáticas del profesor en relación con su conocimiento especializado.

METODOLOGÍA

En este trabajo estudiamos una tarea matemática y la ejecución por parte de un profesor universitario a la luz del ETM y del MTSK. Para ello adoptamos un paradigma interpretativo, con una metodología de corte cualitativo (Denzin y Lincoln, 2000). Se trata de un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 2007) en el que el informante es un profesor universitario, que llamaremos Matías. El profesor posee el grado de doctor en Matemáticas y es investigador activo en el área. Matías tiene más de diez años de experiencia en docencia universitaria y en el momento de esta investigación impartía un curso de cálculo integral (Cálculo II), asignatura que ha realizado al menos durante cinco años. Matías se perfila como un buen informante, accesible y comprometido con la docencia y con esta investigación, tal como señalan Loughran, Mulhall y Berry (2008) para la selección del caso de estudio. Esta elección atendió al criterio de conveniencia que señala Creswell (2014) implicado en el fácil acceso al informante y los datos bajo las condiciones de la investigación.

El programa del curso Cálculo II contempla, secuencialmente, los siguientes temas: derivadas, integrales, sucesiones y series de funciones. Previamente, los estudiantes han realizado cursos que incluyen el estudio de funciones, en el que se trata la noción de límite de funciones, y la inducción matemática para la demostración de propiedades relativas a números naturales. Estos cursos sirven de preparación para el estudiante y sustentan las unidades de Cálculo II. El tema de sucesiones se aborda pasada la mitad del desarrollo del curso, tras el estudio de la derivada y de la integral. Para ello, Matías comienza con la definición de sucesión y sigue con las nociones de límite de sucesión, convergencia y acotamiento. Además, incluye la aplicación de los teoremas de convergencia de sucesiones para mostrar cuándo una sucesión particular es o no convergente. Finalmente, Matías propone la evaluación de esta unidad.

Para obtener los datos, hemos solicitado a Matías el material del curso: guías de ejercicios, ejercicios resueltos que propone y los instrumentos de evaluación (entre ellos la prueba para los estudiantes sobre sucesiones), elaborados por él según los objetivos del curso de Cálculo II. Además, se solicitaron las respuestas de estas evaluaciones, desarrolladas a modo de respuestas expertas. Para este trabajo se seleccionó una pregunta de la prueba sobre sucesiones y su desarrollo, cuyo objetivo era concluir sobre la convergencia de una sucesión. La elección de esta pregunta es un caso representativo del material facilitado por Matías con respecto a su propuesta de enseñanza (Yin, 2018), debido a que en ellos fue posible reconocer la actividad matemática del profesor y distintas componentes de los modelos teóricos que nos interesaba estudiar.

El análisis se realizó en dos dimensiones; la primera consistió en analizar el planteamiento de la tarea, lo que permitió identificar, *a priori*, su riqueza respecto de los temas, procedimientos y conocimientos involucrados, así como el trabajo matemático que se propone. La segunda dimensión consistió en estudiar el desarrollo de la tarea propuesto por el profesor. Para analizar este desarrollo, utilizamos el análisis del contenido (Bardín, 1996) en conjunto con los elementos teóricos de cada modelo.

Para el tratamiento de los datos, se transcribió el desarrollo de cada parte de la tarea y se procedió a rotular cada línea del desarrollo con números correlativos, seguidos de una letra según la parte de la tarea resuelta. Esta enumeración podía contemplar una o varias líneas de texto (e. g. 6.a de la figura 4) o equivalencias que el profesor no logró incluir en una sola línea (e. g. 8.a de la figura 4 o 9.b de la figura 5). Cada una de estas líneas se analizó en búsqueda de evidencias sobre el uso de herramientas y el conocimiento especializado, para luego observar globalmente la porción de datos en conjunto con los elementos de ambos modelos.

En la tabla 3, se ejemplifica el uso de los rótulos para cada unidad de análisis junto a la identificación de las herramientas del ETM y el conocimiento especializado del profesor en ellas.

Tabla 3.
Ejemplo del análisis

		ETM observado	MTSK observado
(1.a)	*a)* (s_n) es decreciente $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ s_{n+1} \leq s_n$	Resolución de inecuaciones. Herramienta semiótica.	Uso del cuantificador universal (KPM).
(2.a)	$\Leftrightarrow \dfrac{s_n^{\ 2} + a}{2s_n} \leq s_n \ / \ 2s_n$	Propiedades de las desigualdades de los números reales y la relación de orden como herramientas operacionales. Herramienta semiótica.	Resolución de inecuaciones, rol de la simbología (KoT).
(3.a)	$\Leftrightarrow s_n^{\ 2} + a \leq 2s_n^{\ 2}$ $\Leftrightarrow a \leq 2s_n^{\ 2} \ /\sqrt{}$		
(4.a)	(*)		Función raíz cuadrada como operador (KoT de raíces y conexión auxiliar). Resolución de inecuaciones, rol de la simbología (KoT).
(5.a)	$\Leftrightarrow \sqrt{a} \leq s_n$		
(6.a)	(*): $s_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ya que $s_1 \ > 0$ y la fórmula de recurrencia siempre dará valores positivos.	Herramienta operacional: Principio de inducción. Herramienta semiótica.	Uso del cuantificador universal (KPM).
(7.a)	– Hemos probado que:		
(8.a)	(s_n) es decreciente $\Leftrightarrow \underbrace{s_n \geq \sqrt{a} \ \ \forall n \in \mathbb{N}}_{\substack{s_n \text{ es acotado} \\ \text{inferiormente por } \sqrt{a}}}$	Herramienta operacional: Principio de inducción. Herramienta semiótica.	

Este proceso de análisis lo realizaron separadamente tres investigadores, cada uno de ellos especialistas en alguno de los dos marcos y afín con el otro. Una vez que se logró consenso sobre los hallazgos, estos fueron considerados para el reporte. Así, se realizó una triangulación por investigadores expertos (Arias, 2000), para dar consistencia a los resultados que aquí se exponen.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Análisis de la tarea

En la figura 3 se puede observar que los puntos a, b, c, y d guían el desarrollo la tarea:

PREGUNTA: Para $a > 0$ y $s_1 > 0$ se define la suceción (s_n) mediante la recurrencia:

$$s_{n+1} = \frac{s_n^2 + a}{2s_n} \forall\, n > 1$$

a) Demuestre que la sucesión (s_n) es decreciente $\Leftrightarrow$ (s_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$.
b) Demuestre si $s_1 > \sqrt{a}$ entonces la sucesión (s_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$.
c) Usando las partes anteriores, concluya que si $s_1 > \sqrt{a}$ entonces la sucesión (s_n) es decreciente y acotada inferiormente.
d) Concluya que la sucesión (s_n) es convergente y calcule su límite.

Fig. 3. Encabezado de la pregunta propuesta por el profesor.

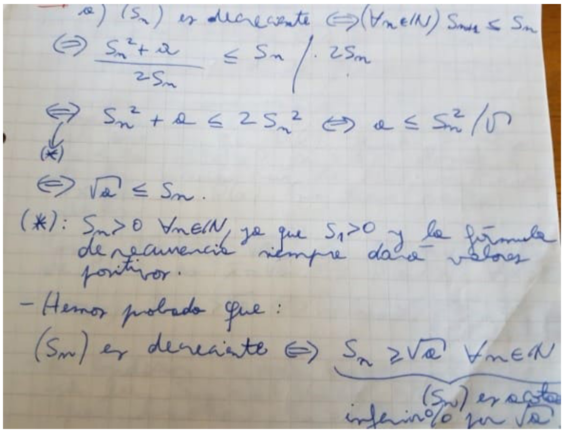
Matías propone esta tarea basada en el referencial de las sucesiones. La sucesión incluida permite aproximar la raíz cuadrada de un número mediante un proceso iterativo, resaltando el uso de las sucesiones para la aproximación de números reales; aspecto importante en su estudio (Verdugo-Hernández, 2018). La sucesión puede ser identificada como una aplicación del método Newton-Raphson para la resolución de ecuaciones no lineales, particularmente, para aproximar raíces cuadradas o raíces de la función $f(x) = x^2 - A$, con $A > 0$ (Mathews y Fink, 2000). Este método permite definir la función de iteración $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, que genera la sucesión $p_k = \frac{1}{2}\left(p_{k-1} + \frac{A}{p_{k-1}}\right)$, convergente a $\sqrt{A}$ para cualquier valor inicial $p_0 > 0$. En la tarea propuesta, estas aplicaciones no son explícitas, por lo que se limitan a aspectos algebraicos de la sucesión. Una de las riquezas de esta tarea, y donde se evidencia el ETM idóneo de Matías, es que induce a aproximar $\sqrt{a}$ (la sucesión converge a $\sqrt{a}$) sin enfatizar que se trata de encontrar esta aproximación. En el contexto de sucesiones, la tarea hace emerger las nociones de acotamiento, monotonía, convergencia y la relación de orden en los números reales. Además, la redacción de esta utiliza notaciones usuales para las sucesiones y simbología matemática, que mezcla con el lenguaje natural para su planteamiento.

La tarea exige una serie de demostraciones sobre el acotamiento, convergencia y límite de la sucesión. En este sentido, las demostraciones solicitadas adquieren dos roles: como herramienta de trabajo para conseguir dichas conclusiones y como una práctica matemática para generar conocimiento, tal y como señala Montoya (2014). Junto a esto, la tarea implica comprender el lenguaje de las sucesiones, por ejemplo, el carácter discreto que representa la variable *n* en lugar de lo continuo que evoca la variable *x*, desarrollando así la componente del representamen.

De lo anterior se puede observar que la tarea involucra las componentes del referencial y de prueba, desarrollando la génesis discursiva, lo que puede considerarse como punto de partida para la estructuración del ETM idóneo de Matías y podría servir de insumo para eventuales reformulaciones de este ETM idóneo (Flores-Medrano et al., 2016) a la luz de su conocimiento matemático.

Análisis del desarrollo de la tarea

En la figura 4 (parte a), se comienza a evidenciar el ETM personal del profesor a partir del polo referencial, en donde se presenta la equivalencia entre monotonía y acotamiento de la sucesión. Además, se muestra la utilización de las propiedades de la desigualdad de los números reales y la relación de orden como herramientas operacionales (líneas 1.a hasta 5.a) para mostrar el decrecimiento y acotamiento de la sucesión. Asimismo, se observa el uso del principio de inducción matemática (líneas 6.a y 8.a) para probar que la sucesión es acotada inferiormente por cero. En términos del MTSK, Matías muestra conocer la inducción y las propiedades de la relación de orden, como conocimientos en su KoT sobre otros temas, los que ayudan a trabajar el decrecimiento y acotamiento de sucesión. Además, se observa que Matías conoce la inducción como una forma de demostrar propiedades que se expresan en términos de números naturales (KPM). Las líneas desde 1.a hasta 5.a muestran el conocimiento sobre la resolución de inecuaciones (KoT), y en 3.a y 5.a su conocimiento sobre la función raíz cuadrada (KoT) como operador que preserva el orden, lo que ayuda a construir la demostración.



(1.a)	*a)* (s_n) es decreciente $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ s_{n+1} \leq s_n$
(2.a)	$\Leftrightarrow \frac{{s_n}^2+a}{2s_n} \leq s_n / 2s_n$
(3.a)	$\Leftrightarrow {s_n}^2 + a \leq 2{s_n}^2 \Leftrightarrow a \leq 2{s_n}^2 /\sqrt{}$
(4.a)	(*)
(5.a)	$\Leftrightarrow \sqrt{a} \leq s_n$
(6.a)	(*):$s_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, ya que $s_1\ > 0$ y la fórmula de recurrencia siempre dará valores positivos.
(7.a)	- Hemos probado que:
(8.a)	(s_n) es decreciente $\Leftrightarrow \underbrace{s_n \geq \sqrt{a}\ \forall n \in \mathbb{N}}_{s_n\ es\ acotado\ inferiormente\ por\ \sqrt{a}}$

Fig. 4. Resolución de la parte a) y transcripción.

La semiótica está presente en todo el trabajo matemático de Matías y es clave para el desarrollo de la tarea y su comunicación. El rol de la simbología en la comunicación de las ideas matemáticas (KPM) se observa al incluir la equivalencia desde las líneas 2.a hasta 5.a, así como en el uso del cuantificador universal para indicar que la propiedad es válida para todos los naturales (KPM) (1.a, 6.a y 8.a). Para estudiar el decrecimiento de la sucesión, es necesario que este se asocie con la semiótica de $s_{n+1} \leq s_n$, así como con la utilización y manejo de los subíndices. Esta resolución deja ver el trabajo y conocimiento de Matías sobre la semiótica involucrada en el principio de inducción (KoT).

El procedimiento para resolver inecuaciones y el uso de las propiedades de la raíz cuadrada permiten observar el conocimiento sobre el uso de notaciones y representaciones para las sucesiones (KoT). El logro de la tarea pasa por conocer la raíz cuadrada como operador que preserva el orden y por el principio de inducción, vistos ahora como herramientas semióticas. La respuesta de Matías en la parte a) da cuenta de su conocimiento sobre propiedades, justificaciones y procedimientos necesarios para resolver la tarea. Dichos procedimientos muestran el conocimiento de una conexión auxiliar entre las sucesiones y el principio de inducción, este último como ayuda para resolver la tarea.

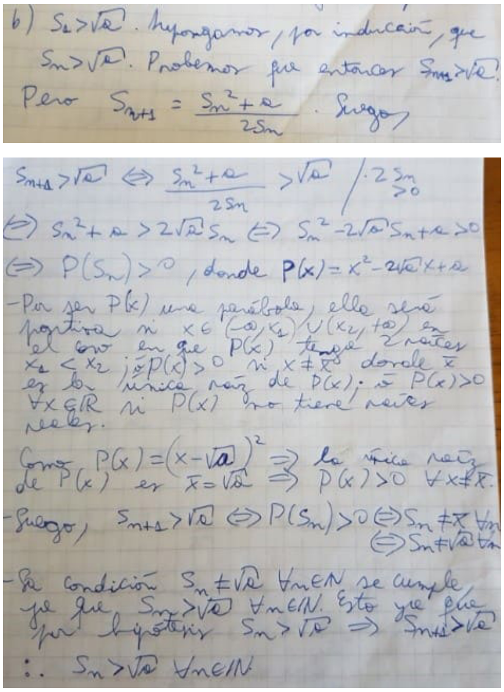
Finalmente, el uso del cuantificador universal y la equivalencia de proposiciones da indicios de conocimiento sobre la demostración y evidencias de conocimientos sobre cómo se comunica en matemáticas (KPM). El conocimiento de las notaciones, los procedimientos y las propiedades permite a Matías estructurar el desarrollo de la demostración de modo que el KPM organiza aquello que se manifiesta en el KoT. La tabla 4 resume las relaciones identificadas en esta parte:

Tabla 4.
Relaciones identificadas entre ETM y MTSK en el desarrollo de la parte a)

Herramienta operacional – Principio de inducción matemática. – Propiedades de las desigualdades de números reales.	Conexión auxiliar (KSM) – Principio de inducción matemática como auxiliar en la demostración de la equivalencia. – Relación de orden en los números reales para mostrar la monotonía.
Herramienta operacional – Principio de inducción matemática.	Demostración como práctica matemática (KPM) – La inducción como una forma de demostrar proposiciones dadas en términos de números naturales.
Herramienta operacional – Propiedades de las desigualdades de números reales.	Procedimientos (KoT) – Resolución de inecuaciones.
Herramienta semiótica – Utilización de $S_{n+1} \leq S_n$. – Manejo de los subíndices.	Registros de representación (KoT) – Utilización de simbología $S_{n+1} \leq S_n$. – Notación y uso de los subíndices.
Herramienta semiótica – Cuantificador y equivalencia.	Comunicación de ideas matemáticas (KPM) – Rol y uso de cuantificadores y equivalencia para comunicar la demostración.

En la figura 5, nuevamente el profesor recurre al principio de inducción (1.b-10.b) y se activa como herramienta operacional, lo que ayuda en la demostración del acotamiento de la sucesión, y como una conexión auxiliar (KSM) entre sucesión e inducción. Asimismo, se observa el rol de los conectores lógicos para estructurar la demostración (KPM), como es el caso de las equivalencias e implicancias utilizadas (4.b hasta 6.b y de 8.b hasta 10.b), lo que igualmente se identifica como una herramienta semiótica.

Matías utiliza los cambios de signos de las funciones cuadráticas como herramientas operacionales (6.b y 7.b), toda vez que está fuera del referencial establecido, y muestra una conexión transversal (KSM) entre la inecuación y la función cuadrática respecto a sus cambios de signos (6.b). La función y la inecuación se conectan mediante la comparación con el cero y es este conocimiento en el KSM lo que permite a Matías desarrollar esta parte de la tarea.



(1.b)	*b)* Sea $s_1 > \sqrt{a}$. Supongamos, por inducción,
(2.b)	que $s_n > \sqrt{a}$. Probemos que entonces $s_{n+1} > \sqrt{a}$.
(3.b)	Pero $s_{n+1} = \frac{s_n{}^2+a}{2s_n}$.Luego,
(4.b)	$s_{n+1} > \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{s_n{}^2+a}{2s_n} > \sqrt{a}/2s_n > 0$
(5.b)	$\Leftrightarrow$ $s_n{}^2 + a > 2\sqrt{a}s_n \Leftrightarrow s_n{}^2 - 2\sqrt{a}s_n + a > 0$
(6.b)	$\Leftrightarrow$ P(s_n) > 0, donde $P(x) = x^2 - 2\sqrt{a}x + a$
(7.b)	- Por ser $P(x)$ una parábola, ella será positiva si $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ en el caso en que $P(x)$ tenga 2 raíces $x_1 < x_2$; *ó* $P(x) > 0$ *si* $x \neq \bar{x}$ donde $\bar{x}$ es la única raíz de $P(x)$; ó $P(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ si $P(x)$ no tiene raíces reales.
(8.b)	Como $P(x) = (x - \sqrt{a})^2$ $\Rightarrow$la única raíz de $P(x)$ es $\bar{x} = \sqrt{a} \Rightarrow$ $P(x) > 0$ $\forall x \neq \bar{x}$
(9.b)	- Luego, $s_{n+1} > \sqrt{a} \Leftrightarrow P(s_n) > 0$ $s_n \neq \bar{x}$ $\forall n$ $\Leftrightarrow s_n \neq \sqrt{a}$ $\forall n$
(10.b)	- La condición $s_n \neq \sqrt{a}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple, ya que $s_n > \sqrt{a}$ $\forall$n $\in \mathbb{N}$. Esto ya que por hipótesis $s_n > \sqrt{a} \Rightarrow s_{n+1} > \sqrt{a}$ $\therefore s_n > \sqrt{a}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Fig. 5. Resolución de la parte b) y transcripción.

La implementación de la inducción requiere del análisis de la función cuadrática y del estudio de sus raíces. La función cuadrática no es parte del referencial, pero presta ayuda en la demostración requerida, al igual que la inducción. Así, se tiene otra conexión, esta vez auxiliar (KSM), entre la función cuadrática y la sucesión.

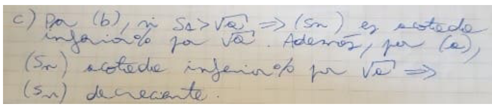
Notemos que la equivalencia $s_n^2 - 2\sqrt{a}\ s_n + a > 0 \ \Leftrightarrow\ P(s_n) > 0$ (5.b y 6.b) muestra el conocimiento del profesor sobre la relación entre la desigualdad y el signo de la función cuadrática $P(x) = x^2 - 2\sqrt{a}x + a$, a la vez que permite observar el proceso de evaluar $P(x)$ en $x = s_n$, lo cual es posible dado que s_n es un número real. En dicha equivalencia el profesor utiliza los cambios de signo de la función cuadrática $P(x) = x^2 - 2\sqrt{a}x + a$ como una herramienta operacional y semiótica de este referencial para obtener la solución de la inecuación planteada en (5.b). En este sentido, se observa el paso de lo discreto de la sucesión a lo continuo de la función cuadrática (5.b y 6.b), así como el uso de diferentes notaciones (KoT) para las variables involucradas en cada caso: s_n y x, respectivamente. Tras el análisis en lo continuo de la función, el profesor retorna a lo discreto de la sucesión (9.b) para concluir esta parte de la tarea. Este pasaje entre lo discreto y continuo se transforma en otra herramienta operacional, sustentada en el teorema del enlace, con la que dispone el profesor. Se trata de un indicio de conocimiento sobre este teorema (KoT) que permite dicho tránsito.

Finalmente, el desarrollo propuesto por Matías muestra sus conocimientos sobre propiedades de una sucesión y la resolución de inecuaciones cuadráticas como conocimientos de temas diferentes, lo que involucra herramientas semióticas y operacionales diferentes. La tabla 5 muestra las relaciones anteriormente expuestas:

Tabla 5.
Relaciones identificadas entre ETM y MTSK en el desarrollo de la parte b)

ETM	MTSK
Herramienta operacional – Inducción matemática. Herramienta semiótica – Conectores lógicos (implicancias y equivalencias).	Conocimiento de los símbolos (KPM) – Rol de los cuantificadores. – Estructura de la demostración. Conexión auxiliar (KSM) – Inducción matemática como ayuda para demostrar el acotamiento de la sucesión.
Herramienta operacional – Cambios de signo de la función cuadrática.	Conexión transversal (KSM) – Función e inecuación cuadrática relacionadas mediante el signo que tiene el producto de nœmeros reales.
Herramienta operacional – Teorema del enlace.	Conocimiento sobre funciones (KoT) – El teorema del enlace como vínculo entre lo discreto y lo continuo.

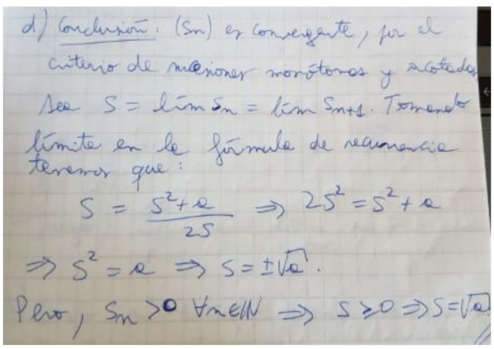
En la parte c), el profesor vuelve a utilizar los conectores lógicos para redactar la demostración (KPM). Pese a que Matías mezcla el lenguaje natural con la herramienta semiótica de la simbología matemática (por ejemplo, 1.c), se observa que conoce el rol de estos símbolos para comunicar los resultados y que las conclusiones de las partes a) y b) le permiten concluir sobre el decrecimiento y acotamiento de la sucesión. Así, se observa en las figuras 6 y 7 que la construcción de este breve argumento se fundamenta en los resultados anteriores; por tanto, es muestra de su conocimiento sobre las formas de construir una demostración (KPM).



(1.c)	Por (*b*), si $s_1 > \sqrt{a} \implies (s_n)$ es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$. Además, por (*a*),
(2.c)	(s_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{a} \Rightarrow$
(3.c)	(s_n) decreciente

Fig. 6. Resolución de la parte c) y transcripción.

En la parte d), junto al uso de los conectores lógicos para estructurar el desarrollo (3.d hasta 5.b), se destaca el uso del criterio de convergencia de sucesiones (monótonas y acotadas) como una herramienta teórica, lo que es parte de su conocimiento sobre las propiedades y fundamentos que tiene de este tema. De nuevo, KoT y KPM permiten a Matías estructurar su trabajo y dar un cierre a la tarea.



(1.d)	Conclusión:(s_n) es convergente, por el criterio de sucesiones monótonas y acotadas.
(2.d)	Sea $s = \lim s_n = \lim s_{n+1}$. Tomando límite en la fórmula de recurrencia tenemos que:
(3.d)	$s = \frac{s^2+a}{2s} \Rightarrow 2s^2 = s^2 + a$
(4.d)	$\Rightarrow s^2 = a \Rightarrow s = \pm\sqrt{a}$
(5.d)	Pero, $s_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow s \geq 0 \Rightarrow s = \sqrt{a}$

Fig. 7. Resolución de la parte d) y transcripción.

Los conocimientos sobre criterios de convergencia (1.d), propiedades del límite de una sucesión (2.d) y la resolución de ecuaciones cuadráticas (KoT) (3.d y 4.d) permiten a Matías resolver esta última parte de la tarea. Todos estos son conocimientos de temas diferentes: sucesiones y ecuaciones. En este caso, la resolución de la ecuación cuadrática (KoT) sirve de herramienta operacional para determinar el valor del límite de la sucesión (KoT), evidenciando su conocimiento de una conexión auxiliar entre sucesiones y ecuaciones (KSM). En términos del ETM, se utiliza la propiedad $s = \text{lím} s_n = \text{lím} s_{n+1}$ (2.d) como una herramienta teórica que permite calcular el límite de la sucesión usando su forma recursiva, ya que s_{n+1} y s_n convergen al mismo límite. La tabla 6 muestra las relaciones anteriores:

Tabla 6.
Relaciones entre ETM y MTSK en las partes c) y d) de la tarea.

ETM	MTSK
Herramienta semiótica – Simbología matemática.	Comunicación de ideas matemáticas (KPM) – Conocimiento del rol de la simbología. – Conocimiento de la estructuración de la demostración.
Herramienta teórica – Criterio de convergencia de sucesiones monótonas y acotadas.	Propiedades y fundamentos (KoT) – Criterio de convergencia de sucesiones monótonas y acotadas.
Herramienta operacional – Ecuación cuadrática.	Conexión auxiliar (KSM) La ecuación cuadrática como ayuda para determinar el límite de una sucesión.
Herramienta teórica – Propiedad $s = \text{lím} s_n = \text{lím} s_{n+1}$.	Propiedades y fundamentos (KoT) – Propiedad $s = \text{lím} s_n = \text{lím} s_{n+1}$.

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo hemos tomado el desarrollo de la tarea y la relación entre ETM y MTSK como punto de partida para estudiar la práctica matemática del profesor a la luz de su conocimiento, observando el uso de las herramientas, lo que a su vez permitió estrechar la relación entre ETM y MTSK, y vinculando las herramientas que propone el ETM con distintos conocimientos del profesor que se contemplan en el MTSK. La resolución de la tarea es un punto de encuentro entre ETM y MTSK, que ha sido reportado en diversas investigaciones (e. g. Espinoza-Vásquez, 2016; Gómez-Chacón, Carrillo et al., 2016). El desarrollo de la tarea requiere que el profesor movilice su conocimiento matemático, el que puede ser identificado por medio de las distintas categorías del MTSK y precisado en su uso mediante los componentes del ETM.

En esta línea, el estudio de las herramientas en la tarea permitió identificar el tipo de herramienta utilizada en relación con el conocimiento de Matías, de modo que un mismo tipo de herramienta se pudo corresponder a diferentes tipos de conocimientos según su uso. Por ejemplo, el principio de inducción (herramienta operacional) se relaciona con el conocimiento sobre la estructura de la demostración (KPM) y sirve de ayuda como un procedimiento para demostrar una propiedad de la sucesión (KSM).

El conocimiento de Matías sobre las sucesiones (KoT) le permite abordar la tarea; sin embargo, debe recurrir a conocimientos de otros temas para desarrollarla. Por ejemplo, recurre a la ecuación cuadrática para determinar el límite, al principio de inducción para demostrar convergencia y al análisis de los signos de la función cuadrática para acotar la sucesión (conexiones en el KSM). Estos cambios de referencial son claves en la identificación de las herramientas operacionales y ocurren cada vez que se manifiesta el conocimiento de una conexión auxiliar en el caso de Matías. De lo anterior, la relación entre la conexión auxiliar y la herramienta operacional se muestra como una relación concreta entre ETM y MTSK.

Del mismo modo, la identificación de conocimientos especializados involucrados en la tarea puede ser precisada respecto del uso que el profesor realiza de esos conocimientos. Es decir, se puede reinterpretar el conocimiento matemático de Matías en términos del tipo de herramienta (teórica, operacional y semiótica) que utiliza; por ejemplo, la resolución de una inecuación (KoT) se asocia a una herramienta operacional y semiótica desde la perspectiva del ETM. Así, se evidencia una interpretación complementada del conocimiento de Matías respecto de su uso como herramienta en la resolución de una tarea, lo que es producto del refinamiento del análisis con ambos modelos.

Por su parte, el referencial del ETM incluye las herramientas sin distinguir el tipo de conocimiento que estas conllevan; en este sentido, los subdominios del MTSK permiten identificar ciertas herramientas teóricas con propiedades y otras con definiciones, todo ello como distintos tipos de conocimientos. En este sentido, se evidencia la complementariedad entre ETM y MTSK al poder referirse a las herramientas que el profesor utiliza en el desarrollo de una tarea como conocimiento especializado de diferentes subdominios. La interpretación de herramientas como conocimiento se ve enriquecida al considerar las relaciones internas entre el conocimiento movilizado que supone el carácter especializado del conocimiento del profesor.

Finalmente, destacamos que la relación ETM-MTSK permite un beneficio recíproco al incorporar elementos de un modelo cuando se analiza con el otro, lo que produce un análisis más fino (Gómez-Chacón, Carrillo et al., 2016) e interpretaciones más precisas sobre el trabajo matemático y el conocimiento especializado del profesor. Así, consideramos que hemos alcanzado el objetivo de comprender el uso de herramientas (teóricas, operacionales y semióticas) en las prácticas matemáticas del profesor en la resolución de una tarea al relacionarla con su conocimiento especializado, lo que nos permite concluir que la combinación de ambos modelos potencia el análisis desde cada perspectiva. Con ello también avanzamos en estrechar la relación entre el ETM y el MTSK mediante la relación herramienta-conocimiento.

Consideramos que este trabajo abre otras interrogantes, por ejemplo, sobre profundizar en el uso que el profesor hace de la demostración, pues permitiría observar su propuesta de enseñanza; el trabajo matemático que fomenta y logra en sus estudiantes; o respecto de su conocimiento didáctico sobre la demostración desde la perspectiva del MTSK. Además, es posible proyectar este estudio a otro tipo de relaciones entre conocimientos y herramientas no incluidas en esta investigación, o bien, indagar en relaciones similares en el estudio de otros temas matemáticos o sobre los cambios de dominios/temas que produce el profesor y cómo se relacionan con su conocimiento, entre otras.

AGRADECIMIENTOS

P. Verdugo-Hernández y G. Espinoza-Vásquez agradecen el financiamiento al Convenio Marco FIDTAL 1856, de la Universidad de Talca (2021).

Este trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Los autores agradecen a los revisores y al editor Dr. Ángel Gutiérrez sus comentarios y sugerencias, que ayudaron a mejorar la versión preliminar de este escrito.

Dedicamos este artículo, con admiración y agradecimiento, a la memoria de nuestro amigo, colega y mentor Dr. José Carrillo, fallecido durante la elaboración de este trabajo.

REFERENCIAS

Arias, M. (2000). La triangulación metodológica: sus principios, alcances y limitaciones. *Investigación y Educación en Enfermería*, *18*(1), 13-26.

Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Akal Ediciones.

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2010). Networking of theories: an approach for exploting the diversity of theorical approaches. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking new frontiers* (pp. 483-506). Springer.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.
https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Creswell, J. W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. Sage.

Climent, N., Espinoza-Vásquez,G., Carrillo, J., Henriquez-Rivas, C. y Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Thales vista desde el conocimiento especializado del profesor. *Revista de Educación Matemática*, *33*(1), 98-124.
http://doi.org/10.24844/EM3301.04

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2019). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(3), 567-587.
https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, (26), 15-30. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proofb.pdf

Denzin, N. y Lincoln, Y. (2000). *The handbook of qualitative research*. Sage.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (vol. 1, pp. 3-26), ERIC/CSMEE.

Espinoza, G. (2016). Reflexión sobre algunos elementos que posibilitan la articulación de los modelos ETM y MTSK en tareas sobre el concepto de función. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard y L. Vivier (Eds.), *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 441-452). Universidad Macedonia Occidental.

Espinoza, G. (2020). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función* (tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Espinoza-Vásquez, G., Ribeiro, M. y Zakaryan, D. (2018). Avance en la comprensión de las relaciones entre el ETM idóneo y el MTSK del profesor. *Journal of Educational Research, MENON*, *4*, 146-161.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. y Liñán, M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *30*(54), 204-221.
https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

Gellert, U., Barbé, J. y Espinoza, L. (2013). Towards a local integration of theories: codes and praxeologies in the case of computer-based instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 303-321.
http://doi.org/10.1007/s10649-012-9427-5

Gómez-Chacón, I., Escribano, J., Kuzniak, A. y Richard, P. (Eds.) (2015). *Espacio de Trabajo Matemático/Mathematical Working Space/Espace de Travail Mathématique. Actas Cuarto Simposio Internacional ETM*. Publicaciones del Instituto de Matemática Interdisciplinar.

Gómez-Chacón, I., Carrillo, J., Oktaç, A., Espinoza-Vásquez, G. y Henríquez-Rivas, C. (2016). Génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor, el formador y las interacciones. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard y L. Vivier (Eds.), *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 395-402). Universidad Macedonia Occidental.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *30*(54), 1-22.
https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Henríquez-Rivas, C. y Espinoza-Vásquez, G. (2018). Relación ETM-MTSK: conexiones entre la génesis semiótica y el conocimiento de los temas. En E. Montoya, P. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Machietto y D. Tanguay (Eds.), *Actas Sixième Symposium sur le Travail Mathématique* (pp. 507-512). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carrillo, J., Climent, N. y Espinoza-Vásquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *39*(2), 123-142.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *The International Journal on Mathematics Education*, *48*(6), 861-874.
http://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Lougrhan, J., Mulhall, P. y Berry, A. (2008). Exploring pedagogical content knowledge in science teacher education. *International Journal of Science Education*, *30*(10), 1301-1320.
https://doi.org/10.1080/09500690802187009

Maier, H. y Beck, C. (2001). Zur Theoriebildung in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *22*(1), 29-50.
https://doi.org/10.1007/bf03339314

Mathews, J. y Fink, K. (2000). *Métodos numéricos con MATLAB*. Prentice Hall.

Montoya, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(4), 227-247.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1049

Montoya-Delgadillo, E. y Vivier, L. (2014). Les changements de domaine de travail dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *19*, 73-101.

Murcia, N. y Jaramillo, L. (2001). La complementariedad como posibilidad en la estructuración de diseños de investigación cualitativa. *Cinta de Moebio*, (12), 194-204.

Prediger, S. y Bikner-Ahsbahs, A. (2014). Introduction to networking: networking strategies and their background. En Bikner-Ahsbahs, Angelika y Prediger, Susanne (Eds.) y Networking Theories Group, *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Series Advances in Mathematics Education* (pp. 117-125). Springer.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connection theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 165-178.
http://doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 317-327.
https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3

Sriraman, B. y English, L. (Eds.) (2010). *Therories of mathemtics educations. Seeking new frontiers*. Springer.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reforms. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Vasco-Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *30*(54), 222-239.
https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a11

Verdugo-Hernández, P. (2018). *Espacio de Trabajo Matemático del análisis: enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad* (tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Verdugo-Hernández, P. y Espinoza-Vásquez, G. (2018a). Utilización de las herramientas en el Espacio de Trabajo Matemático y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *11*(1), 91-95.

Verdugo-Hernández, P. y Espinoza-Vásquez, G. (2018b). Comprensión del uso de las herramientas teóricas y operatorias en el Espacio de Trabajo Matemático y el conocimiento matemático del profesor. En E. Montoya, P. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Machietto y D. Tanguay (Eds.), *Actas Sixième Symposium sur le Travail Mathématique* (pp. 455-466). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications. Design and methods* (6.ª ed.). Sage.

Zakaryan, D., Ribeiro, C. M. y Espinoza-Vásquez, G. (2016). Relaciones entre el conocimiento del tema (MTSK) y los ETM idóneo y personal. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard y L. Vivier (Eds.), *Espacio de Trabajo Matemático. Actas ETM5* (pp. 467-475). Universidad Macedonia Occidental.

A Sequences' Task Analysis from the Use of Tools and the Teacher's Mathematical Knowledge

Paula Verdugo-Hernández
Escuela de Pedagogía en Ciencias Naturales y Exactas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Talca. Linares, Chile
pauverdugo@utalca.cl / paulasinttia@gmail.com

Gonzalo Espinoza-Vásquez
Departamento de Pedagogías Medias y Didácticas Específicas, Facultad de Educación, Universidad Alberto Hurtado. Santiago, Chile
gespinoza@uahurtado.cl / gonzalo.espinoza.v@gmail.com

José Carrillo Yáñez
Departamento de Didácticas Integradas, Universidad de Huelva. Huelva, España
carrillo@uhu.es

In this paper, we analyze the teacher's practice in terms of his mathematical work and knowledge, considering the joint study of two theoretical models from the networking theories paradigm.

Our objective is to characterize the teacher's mathematical work about solving a task and the knowledge that mobilizes. We use both the mathematical working space (MWS) model, which allows us to study the teacher's mathematical work (Kuzniak, 2011), and the mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model, which enables us to investigate the knowledge used for teaching (Carrillo et al., 2018). Furthermore, the combination of the elements and characteristics of the MWS and the MTSK allows us to refine the analysis of the teacher's practice from the perspective of each model and advance in the understanding of the mathematical work that is proposed during the teaching process.

Particularly, we study theoretical, semiotic, and operational tools usage in relation to the mathematical knowledge that the teacher mobilizes when developing a task. It is a case study whose informant is a teacher from a Chilean university, Ph.D. in Mathematics, who teaches a course of derivatives, integrals, sequences, and series. We analyzed a task proposed by the teacher in evaluating the topic of sequences.

The studied task implied the proof of the convergence of a sequence that involved knowledge about bounding and monotony. The analysis of the task's resolution shows that, while the theoretical tools are related to the knowledge of the properties of sequences, the semiotic tools are associated with representations and the communication of mathematical ideas. In addition, we highlight the operational tools linked to the knowledge of connections between sequences and other mathematical objects that help solve the task.

The contribution obtained through the MWS-MTSK complementarity results in the refinement of the analysis. Indeed, it consists in understanding the teacher's mathematical knowledge usage as different kinds of tools and, reciprocally, the precision in tools usage as knowledge in various categories.

Future research remains open on the complementarity between MWS and MTSK dealing with the use of proof in mathematics teaching, the study of tools about other specialized knowledge, or the relationship between the mathematical work that the teacher promotes in their students and their knowledge.