El nacimiento de la matemática en Grecia

Conrado Eggers Lan

ABSTRACT *(The birth of mathematics in Greece)*

1. *Philosophy, science and mathematics in Greece*
Plato and Aristotle drew the distinction between primary and secondary (or necessary) causes. Although dealing mainly with necessary causes, Greek mathematics are by no way empty of philosphical interests.
2. *The «scientific», the «pre-scientific» and the «extra-scientific»*
Elements of knowledge appearing in a period previous to the shaping of the science can be designed «pre–scientific», provided we give a constitutive, not temporal sense to this word. Some elements remain permanently outside the range of cience (p. e. astrology); we could term them «extrascientific». The criterium of scientificity will be, beyond the somewhat ambiguous character of systematicity, the historical fecundity of a given element.
3. *Demonstration in Greek mathematics*
Practical mathematics were widely employed before the Greks. A Mesopotamic tablet from the Yale collection shows a systematic use of the theorem of Pythagoras. Nevertheless, the novelty of the Greek matematicians was the demonstration of such practical formules. On the other hand, it is not proved that Thales was the first thinker in proposing a deductive method in geometry.
4. *Demonstration and deduction*
Proves by rule and compass and the equivalent method of *epharmozein* do not constitute scientific mathematics. In Euclides' *Elements*, such proves are found up to I 34. But at I 35 appears a theorem that cannot be proved by the practical method, therefore requiring deductive demonstration. Mathematical deduction can be adscribed first to Theodorus of Cirene.
5. *Deduction and axiomatic foundation*
The establishment of evident propositions (axioms) as basis for the necessity of a deductive argument was a procedure elaborated probably in the Academy; it was exposed in Aristotle's *Analytica Posteriora* 2 and 10.

As for «historical fecundity», the method of deductive demonstration appears as the most decisive instrument of scientific progress in mathematics.

1. Filosofía, ciencia y matemática en Grecia

Cuando pretendemos rastrear la historia de una ciencia en la antigüedad griega se nos plantea ineludiblemente el problema que suscita la circunstancia de necesitar trabajar, al menos en principio, en dos ámbitos distintos: el de la ciencia de que se trate y el del mundo griego antiguo con su peculiaridad. Si se quisiera hacer prevalecer en la tarea un tercer ámbito, el de la historia de la ciencia, semejante reivindicación podría valer como especialidad universitaria o editorial, pero con mucha probabilidad tendría que abdicar, no sabemos si ante el ámbito de cada ciencia o si ante cada época histórica, pero seguramente sí ante la matemática griega.

Cualquier historiador de la ciencia en general y de la matemática en particular sabe que hacer historia de la matemática no es hacer matemática —a diferencia del hacer historia de la filosofía, que implica siempre hacer filosofía—, aunque deba contar como mínimo con determinada cantidad y calidad de conocimientos matemáticos previos a su tarea de historiador. Lo que no siempre cualquier historiador de la ciencia en general y de la matemática en particular sabe es que hacer historia de la matemática griega equivale a penetrar en la historia del espíritu griego, de la cual el pensamiento en general, naturalmente, y en particular el pensamiento matemático son aspectos esenciales, y en la cual filosofía y matemáticas se hallan significativamente interpenetradas.

Cuando consulté —primero epistolarmente y luego de forma personal— a Kurt von Fritz sobre el tema, me respondió con estas palabras: «Si la evolución de la matemática griega antigua ha sido —por completo o en forma predominante— *de índole exclusivamente matemática*, o si han influido en ellas ideas filosóficas, es un viejo tema de discusiones. Personalmente me parece evidente —tal como usted piensa— que dicha evolución ha recibido, en distintas épocas, fuertes estímulos por parte de filósofos, aunque, de suyo, también ha habido siempre ulteriores desarrollos de *índole exclusivamente matemática*»[1].

En la traducción de estas para nosotros importantes líneas del distinguido historiador germano de la ciencia griega me he visto obligado a recurrir a una perífrasis —que hemos subrayado por nuestra cuenta en el texto— para verter al español un solo vocablo alemán por otra parte clave, *innermathematisch*, sin quedar del todo conformes con la correspondencia obtenida[2]. La duda que al respecto nos suscitó dicha respuesta es: ¿existe algo *innermathematisch* en la matemática, o sea, algo puramente matemático?

Cabe en este sentido llamar la atención sobre el uso que de los vocablos pertinentes han hecho los dos filósofos griegos que han acuñado la mayor parte de la terminología básica de la filosofía y de la ciencia que ha sobrevivido hasta nosotros. En efecto, en el *Teeteto* (143d) Platón habla «de la geometría o de cualquier otro tipo de *philosophía*». Y Aristóteles, en su *Metafísica* (VI, 1, 1026a), distingue «tres *philosophíai* teóreticas: *mathematiké*, física y teológica», en lo cual alterna *philosophía* con *epistéme* (la teología es tanto la «*philosophía* primera» como la «*epistéme* primera»), y lo mismo cabe decir de Platón. La diferencia entre el uso de uno y otro término parece residir en que *philosophía*, como su vocablo simple, *sophía*, designa más bien una actitud vital de amor a la verdad, en

1. Carta fechada en Munich el 23 de febrero de 1977.
2. En sentido estricto, *inner* sugiere «dentro de», «en el ámbito de». Vale decir, *innermathematisch* significa, literalmente «interior a la matemática», lo cual equivale a excluir lo externo a la matemática: sobre todo la filosofía en el caso mencionado en la carta.

tanto que *epistéme* alude a la forma de acceder a esa verdad; una forma que se distingue de la «experiencia» o *empeiría* en que con ésta sólo se alcanza lo particular, mientras la *epistéme* llega al conocimiento universal (Aristóteles, *Met.*, I, 1, 981a-b; cf. Platón, *Rep.*, III, 409b).

Aunque, como vemos, Platón y Aristóteles llamaron tanto *philosophía* como *epistéme* no sólo a lo que hoy denominaríamos «filosofía» sino también a lo que damos el nombre de «ciencia», la historia ha querido que el primero de dichos términos griegos quedara reservado exclusivamente para la «filosofía», en tanto el segundo para la «ciencia», si bien, por lo menos desde Kant, ha ido cobrando fuerza en la modernidad la tendencia a asegurar un carácter «científico» a la «filosofía», con la intención de restar fantasía a su vuelo, y prestarle, en cambio, rigor. Pero eso no fue nunca pensado así en Grecia.

¿Significa acaso lo dicho que no hubo en Grecia diferencia entre la filosofía y la ciencia, o, al menos —en el caso que nos interesa más acá— entre filosofía y matemática? Ciertamente la hubo, aunque no en cuanto a la actitud de desear conocer, o respecto de la forma de conocer; y tampoco en lo que se refiere al objeto. Porque si de la filosofía podría decirse que aspira a la totalidad[3], no puede decirse que la ciencia busque siempre «aspectos» o «partes» de la misma; en particular, no podría afirmarse tal cosa de la matemática.

Aquí una vez más Platón y Aristóteles, sin haber señalado diferencias entre «filosofía» y «ciencia», nos dan una pista: el tipo de causa buscada. Platón distingue, en *Timeo* –46 d-e– entre «causas primeras» o «de naturaleza inteligente» (que en *Fedón* –99b– constituye la «causa» sin más) y «causas segundas», que «mueven por necesidad» (llamadas en *Fd.* -99b- «aquello sin lo cual jamás la causa sería causa», es decir, la *conditio sine qua non*). Esto implica una distinción entre la búsqueda de causas que sirvan de *fundamento* a lo que se trata de explicar y que sean de otra índole que esto[4], otorgándole un sentido que lo tornen comprensible, y la búsqueda de causas mecánicas, que Platón considera «auxiliares», en cuanto permiten el cumplimiento de tal sentido: en el ejemplo del *Fedón* serían los huesos y músculos del cuerpo de Sócrates, sonidos, aire, oídos, que posiblitan el accionar de la «verdadera causa», a saber, la decisión de Sócrates de no fugarse de la cárcel sino aguardar su muerte filosofando con sus amigos. Por cierto que Platón, desde el momento que identifica «filosofía» y «ciencia», no dice que la primera se ocupe sólo de las causas primeras y la otra se dirija a las causas segundas, sino que integra en la filosofía = ciencia la búsqueda de ambos tipos, subordinando las segundas a las primeras; pero la historia posterior, como sabemos, desgajó de la filosofía la ciencia y, con ello, separó también las búsquedas, si bien jamás lo logró del todo.

El pensamiento de Aristóteles es similar, aunque nunca hable de «causas segundas» (sí de «causas primeras», p. e. *Met.*, I, 2, 982b2, b9; 3, 983a24-26, etc.), ya que su esquema causal es más complejo —cuádruple, como es sabido—; pero

3. Cf. H. –G. Gadamer, *Vernunft im Zeitalter der Wissenschaft*, Frankfurt, Suhrkamp, 1976, p. 7.
4. Ésta és, según Nikolai Hartmann, una característica de los legítimos principios explicativos: «explican los fenómenos por medio de algo básicamente distinto de los fenómenos» («Zur Lehre vom Eidos bei Platon und Aristoteles», 1941, en *Kleinere Schriften* II, Berlín, de Gruyter, 1957, p. 156)

en los *Segundos Analíticos* –II, 11, 94a22–, a propósito de los principios de las ciencias apodícticas (es decir, las que proceden por demostración deductiva) tiene en cuenta algo parecido al describir la segunda de estas causas (en primer lugar menciona la esencial): «el existir necesariamente a partir de ciertas cosas» o «lo que, dadas ciertas cosas, se sigue necesariamente».

Es interesante para nuestro propósito observar el ejemplo con que Aristóteles ilustra este tipo de causa «necesaria»: «¿Por qué el "ángulo inscripto" en un semicírculo es recto? ¿Dadas qué cosas "se sigue necesariamente" que es recto? Sea A un ángulo recto, B la mitad de dos ángulos rectos, C el "ángulo inscripto" en el semicírculo. Entonces B es la causa de la pertenencia de A, el ángulo recto, a C, el "inscripto" en el semicírculo». El ejemplo (que, según Heath[5], parece estar presente en Euclides –III, 31– como interpolación) muestra claramente la «causación necesaria» como el nexo peculiar de la deducción lógica, tal como la hallamos a lo largo de los trece libros de los *Elementos*. De este modo, lo que allí puede ser considerado *innermathematisch* –para emplear la terminología de von Fritz– es no menos *innerlogisch*. Y esto es algo que, según veremos más abajo, nuestros testimonios acreditan usado por primera vez por Parménides, quien no fue matemático sino filosófo. Pero el hecho que al comienzo de la citada obra señala Aristóteles que las ciencias demostrativas deben partir de principios no-demostrables, no aparece como estrictamente *innermathematisch* ni *innerlogisch*, y menos aún la caracterización de la índole y propiedades de tales principios: más bien se trata, como veremos, de exigencias epistemológicas nacidas en el seno de la Academia platónica y del Liceo aristotélico, esto es, de escuelas filosóficas[6].

Lo dicho significa que, si bien podemos decir que en la filosofía griega predomina la búsqueda de las causas primeras y en la matemática griega se recurre más a eso, tan similar a las causas segundas platónicas, que en los *Segundos Analíticos* podríamos denominar «causa necesaria» (que Aristóteles da a entender que no puede operar plenamente en el mundo físico, cuando observa, pocas líneas más abajo del pasaje traducido, que «la naturaleza a veces obra con un propósito, a veces por necesidad»), el nacimiento de la matemática griega nos muestra a ésta tan penetrada de filosofía, que resulta difícil de admitir que contuviera elementos de índole exclusivamente matemática, al menos de relevancia histórica, lo cual no implica por cierto rehusarse a ver el hecho de que la moderna historia de la matemática exhiba tal tipo de desarrollos (que inclusive han invadido con frecuencia a la filosofía).

Esto nos llevará a tratar de determinar el momento en que nace la matemática griega, para describir sus rasgos peculiares.

2. Lo «científico», lo «pre-científico» y lo «extra-científico»

Toda ciencia, antes de constituirse como tal, atraviesa un período más o menos extenso en el cual suelen aparecer muchos elementos o temas que luego inte-

5. *Mathematics in Aristotle*, Oxford 1949, p. 72
6. Cf. mi trabajo «La influencia de Platón y Aristóteles en la axiomática euclideana», *Nova Tellus*, 2, 1984, p. 27–66.

grarán el cuerpo —o alguna parte de éste— de la ciencia. Por ejemplo: el hombre lleva a cabo los más diversos tipos de tratamientos de enfermedades, incluso con éxito, y es capaz de discernir no sólo las partes más visibles del cuerpo humano sino también muchos órganos internos, sin que quepa hablar de «medicina» en sentido científico.

Así también, el hombre puede no sólo distinguir el sol, la luna y los astros que pueblan el firmamento nocturno, sino también advertir muchos de sus movimientos y llegar a calcularlos, y permanecer, sin embargo, en un ámbito ajeno a la ciencia de la astronomía en sentido estricto.

Análogamente, el hombre cuenta —p. e. ovejas, frutas, piedras—, las suma y resta, multiplica y divide, y además efectúa esos cálculos y otros más complicados sin tener en vista tales objetos, y no necesariamente por eso estará haciendo aritmética científica.

Y del mismo modo traza las más diversas y difíciles figuras, desde el triángulo, el cuadrado y el círculo hasta los polígonos de mayor número de lados —fabricando incluso cuerpos piramidales y balones formados por pentágonos regulares de cuero unidos de manera tal que puedan constituir una esfera—, pero eso no bastará para que pensemos que está cultivando la geometría como ciencia.

Se hace necesario, pues, determinar cuál es el criterio que nos guía para afirmar que en un momento dado un conjunto de conocimientos configura una ciencia.

Antes de intentar fijar dicho criterio, empero, conviene hacer notar que, aun cuando hemos hablado de un «período» previo a la constitución de una ciencia como tal, y a grandes rasgos lo hemos ejemplificado, los ejemplos que hemos dado de elementos o temas que «luego» integran el cuerpo de la ciencia pueden seguir apareciendo en la forma anterior al margen de la construcción de dicha ciencia.

En efecto, un individuo —y sus sucesores y coétaneos— puede continuar durante un tiempo indefinido tratando enfermos, sin que ese tratamiento llegue jamás a ser científico; o calculando el número de lunas —la cantidad de veces que la luna cumple las cuatro fases de su ciclo— que faltan para la cosecha o para el parto, sin acceder nunca a la astronomía científica; o bien haciendo los cálculos más complicados o trazando las figuras más difíciles en forma armoniosa, sin arribar en momento alguno a vislumbrar siquiera la ciencia de la aritmética y de la geometría. Esto puede acaecerle a un pueblo entero, a una sociedad íntegra, a toda una civilización; pero también puede acontecer a individuos o grupos —cultos o no— en el seno de una sociedad que ha alcanzado el conocimiento de la ciencia respectiva, en la medida que este conocimiento sea patrimonio de individuos o grupos distintos a aquéllos y que —por razones que pueden ser muy diversas— no se haya producido entre ellos una intercomunicación de dicho conocimiento.

Vale decir, los elementos y temas que aparecen en un «período» previo al establecimiento de la ciencia misma, sólo pueden existir en un «período previo» a la ciencia, ya que su existencia no desemboca necesariamente en la ciencia. *En otras palabras: el conocimiento humano no evoluciona en forma unidireccional; ni siquiera evoluciona necesariamente, y, si evoluciona, puede hacerlo en multiples direcciones, algunas de las cuales conducen a la ciencia y otras no.*

De acuerdo con lo dicho, los elementos y temas que aparecen en un «período» previo a la formación de la ciencia pueden ser calificados de *pre-científicos*. Y esta denominación les corresponde aún en los casos en que no desemboquen nunca en ciencia —o que continúen desenvolviéndose al margen de la ciencia—, ya que el hecho de que históricamente aparezcan alguna vez precediendo a una ciencia que los integre en sí misma permite considerarlos, incluso en otras ocasiones, ubicados en un estadio que *puede* ser superado por el de la ciencia.

Pero en el mismo «campo» —por así llamarlo— en que aparecen los elementos y temas «pre-científicos» hallamos elementos y temas que nunca vemos, en el curso de la historia, ingresar en el cuerpo de la ciencia. Tal el caso, por ejemplo, de la influencia del curso de los astros en el destino de los individuos, o del poder de los números o de ciertas figuras en la vida de los hombres. Estos elementos y temas pueden mezclarse con los «pre-científícos», pero, en la medida que nunca se incorporen a la ciencia como tal, los denominaremos *extra-científicos*. Su marginación de la ciencia es total a lo largo de la historia, no circunstancial, como hemos visto que acontece con los «pre-científicos».

Ciertamente, el hecho de que no veamos nunca a esos elementos y temas integrarse en la ciencia no significa, terminantemente, que *no puedan nunca* integrarse en ella. Si el heliocentrismo de Aristarco de Samos tardó dieciocho siglos en adquirir categoría científica —con Copérnico—, los mencionados elementos y temas «extra-científicos» deben gozar cuando menos —quizá no todos ni su mayor parte— del beneficio de la duda en cuanto a la posibilidad de tal integración. Pero en tanto no se verifique ésta, y los encontremos resistentes a someterse a las pautas de la ciencia, los consideraremos «extra-científicos». Y esta distinción con lo «pre-científico» es de suma relevancia para la mejor comprensión de la ciencia griega, donde suele aparecer tan poco clara y tan fácil de ignorar por el observador moderno.

Las últimas frases nos hacen volver a la cuestión, que ahora se torna más apremiante, del criterio con el cual decidimos que cabe hablar de ciencia en sentido estricto.

Una mirada a la historia de las ciencias en general y de la matemática en particular, así como a las discusiones que en cada ámbito se promueven acerca del momento científico —en sentido estricto— inicial y de los criterios para fijarlo, nos lleva a descartar concepciones demasiado vagas o insuficientes como la de que ciencia sea un «saber cierto» o al menos «verificable» o una «organización sistemática de conocimientos», que pueden valer acaso como caracterizaciones generales —en el último caso— pero no permiten una aplicación a los hechos que posibilite establecer con algún grado de aproximación cuando nace una ciencia.

Dicha mirada suscita una observación que es sin duda obvia, y por eso, paradójicamente, tal vez poco tenida en cuenta en tales discusiones: hay instancias del pensamiento humano que muestran a lo largo de siglos —o milenios— una cuidadosa organización que puede ser calificada de sistemática, pero sin que se produzcan modificaciones importantes que permitan decir al historiador que inauguran una nueva etapa en la vida de ese núcleo de pensamientos. Hay otras, en cambio, en que, a pesar de momentos de estancamiento o de crisis, globalmente exhiben una evolución que incluso puede precisarse en distintas etapas que implican otros tantos avances.

Por consiguiente, creemos nosotros, el momento en que el pensamiento deja de ser «pre-científico», en el sentido antes señalado, para convertirse en «científico» se produce debido a la introducción de elementos que sienten algunas bases para un desarrollo ulterior, en el cual podrán surgir otros elementos que a su vez posibiliten nuevos avances. Esto es: el criterio a que recurrimos para decidir que hay ciencia en sentido estricto es el de *fecundidad histórica*. La astrología como tal no acredita cambios sustanciales desde los caldeos hasta nosotros; esto no impide, ciertamente, que contenga elementos que, en algunos casos, han influido en la ciencia astronómica, y, en otros, provienen de ésta. Pero precisamente en unos y otros casos dichos elementos se han desarrollado en la astronomía y no en la astrología. De ahí que, por ejemplo, a pesar de la antigua sabiduría astrológica de los babilonios, su astronomía, como ha mostrado Otto Neugebauer, no alcanzó una evolución notable hasta después de haber recibido la influencia de la astronomía griega ptolemaica[7]. La astrología, como la numerología, interesan sin duda en la historia de la ciencia y de la filosofía antiguas (griegas en especial, sobre todo por el papel que han podido desempeñar en algunos grupos o corrientes de pensamiento, como ante todo constituyó el pitagorismo), pero corresponderían, dentro del esquema conceptual que hemos propuesto más arriba, al ámbito «extra-científico» y no al «científico».

En ese sentido, si se trata de determinar, de acuerdo con el criterio de fecundidad histórica, cuál es el elemento que permite dar el paso desde el momento «pre-científico» al «científico», dice Charles Khan que «en la astronomía griega *la idea de un modelo geométrico para la tierra y los cielos* desempeñó el mismo papel revolucionario que la idea de prueba en matemática»[8]. Walter Burkert, por su parte, menciona «la exigencia de una prueba rigurosa en la geometría griega» y la de «una edificación axiomático-deductiva», mientras que en la astronomía «la construcción de un modelo universal..., en el cual a diferentes distancias, giran los planetas en torno a la tierra esférica»[9], lo cual es —palabra más , palabra menos— algo ya casi unánimemente aceptado, porque se discute sólo el momento exacto en que se puede decir que se producen, cosa que discutiremos más abajo en el caso de las matemáticas. Por nuestra parte, y respecto de la medicina, hemos creído encontrar en la introducción del concepto de «causa» —en el tratado pseudo-hipocrático *De Vetere Medicina*— el elemento que permite a la medicina una evolución científica, similar al de la prueba deductiva en geometría y al modelo matemático del mundo en astronomía[10].

7. Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1975, Part C, p. 541 ss.
8. Kahn, «On Early Greek Astronomy», *The Journal of Hellenic Studies*, 90 (1970), p. 110.
9. W. Burkert, *Weisheit und Wissenschaft*, Erlangen–Nürnberg, 1962, p. 379 y 278 respectivamente (cf. la traducción inglesa de E. L. Minar, *Lore and Science*, Cambridge Mass, 1972, p. 401 y 299).
10. [Hipócrates], *De la medicina antigua*, (Introducción, texto crítico, traducción y notas de C. Eggers Lan), México, U.N.A.M., 1987, pp. XXXIII–XXXIX.

3. La demostración en la matemática griega

Neugebauer ha expuesto convincentemente la tesis de la antigüedad del llamado «teorema de Pitágoras», que se remontaría al período Babilónico Antiguo[11]. Así, por ejemplo, en una tableta de la colección Yale (Nº 7289), vemos inscrito un cuadrado con sus dos diagonales. Sobre un lado del cuadrado está escrito el número 30, sobre una de las diagonales leemos la cifra 1; 24, 51, 10, y debajo de la misma la cifra 42; 25, 35, todas en sistema sexagesimal, sistema que entre los babilonios cuenta con los llamados «números recíprocos», que indican la cantidad de veces que un número cabe exactamente en el 60 (así 2 y 30 son recíprocos entre sí). Para simplificar la explicación de Neugebauer, recordemos que, según el teorema de Pitágoras, si un triángulo rectángulo (isósceles en este caso, ya que es la mitad de un cuadrado) tiene 1 de lado, para dar con el valor de la hipotenusa x, deberemos extraer la raíz cuadrada de 2, ya que $1^2 + 1^2 = x^2$, o sea, $1 + 1 = x^2$. Ahora bien, en valores decimales tenemos que $\sqrt{2} = 1,414214$, lo cual representa, en valores sexagesimales (con una aproximación de 22/60), la cifra 1 ; 24, 51, 10, que es una de las que hallamos sobre la diagonal (la hipotenusa) en la tableta Yale. Pero dado que el lado (el cateto) tiene valor 30, habrá que multiplicar por 30. Y si multiplicamos por 30 la cifra mencionada (lo que se hace fácilmente dividiéndola por 2, ya que 2 y 30 son recíprocos) el resultado es la otra cifra que da la tableta: 42; 25, 35. Esto implica que el valor de la diagonal del cuadrado ha sido obtenido a partir de su lado, lo cual, apunta Neugebauer, «es prueba suficiente de que el teorema de "Pitágoras" era conocido más de mil años antes de Pitágoras… En otras palabras, a través del transcurso íntegro de la matemática babilónica era conocido que la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa»[12].

Ciertamente, la palabra «teorema» puede ser usada en dos sentidos: uno es el referido a una determinada proposición, como la ya mencionada de que el cuadrado de la hipotenusa, en un triángulo rectángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Pero el «teorema» que en sentido estricto se integra en el cuerpo de la geometría científica (en este caso, los *Elementos* de Euclides, ya sea como I 47 o como VI 31) contiene la demostración de dicha proposición (la cual es entonces sólo la «prótasis» del teorema). Cuando Neugebauer dice que los babilonios conocían el teorema que lleva el nombre de Pitágoras diez siglos antes que éste viviera, se refiere sólo al primer sentido. Porque, en lo que hace al segundo, es con toda probabilidad más de un siglo posterior a Pitágoras, e implica un intento de superar la dificultat que provocó el advertir que la diagonal del cuadrado era inconmensurable con su lado[13].

Según Kurt von Fritz, «cuando los griegos comenzaron por vez primera a emplear métodos matemáticos más complicados, se vieron enfrentados a los métodos

11. *The Exact Sciences in Antiquity*, 2a. ed. (ligeramente corregida de la 1a. de la Brown Univ. Press, 1957), New York, 1969, p. 35 ss.
12. Op. cit., p. 36.
13. Cf. nuestra discusión de este punto en «El pitagorismo y el descubrimiento de lo irracional», en *Méthexis*, 2 (1988), pp. 17–32.

más desarrollados de sus vecinos orientales, en cuya aplicación no se podía distinguir entre soluciones aproximadas y exactas, porque cada método había sido desarrollado dentro de un ámbito especial de aplicaciones prácticas, para las cuales bastaban las aproximaciones alcanzadas en cada oportunidad. Esto, naturalmente, debía conducir por entonces a dificultades y divergencias cuando los métodos como tales eran separados de la finalidad originaria de su aplicación y trasladados a otro ámbito. Dada esta situación, era muy natural que se quisiese saber con mayor exactitud y que se intentara dar a las proposiciones y métodos matemáticos una fundamentación más precisa y segura»[14]. En ese sentido piensa von Fritz que «ha habido, al comienzo de la matemática demostrativa de los griegos, un estadio en el cual… se ha creído poder y deber demostrar todo»[15]. En dicho estadio ubica Kurt von Fritz a Tales de Mileto, aunque empleando el procedimiento del *epharmózein* o superposición, en el cual basta una regla y un compás para demostrar empíricamente, por ejemplo, que dos triángulos son iguales entre sí, o que el círculo es dividido en dos partes iguales por el diámetro (este último caso, con la atribución a Tales de dicho procedimiento por parte de Proclo, *In Primum Euclides Elem. Comm.* p. 157, 10-168-2 Friedlein, es citado expresamente por v. Fritz)[16].

Es importante detenernos en este punto, pues el texto de marras es la base de la afirmación de que Tales fue el primer geómetra científico (o sea, a comienzos del siglo VI aC), hecha por diversos estudiosos, entre los cuales probablemente la autoridad más importante de la actualidad es el holandés Bartel L. van der Waerden[17].

El meollo del pasaje de Proclo (p. 157, 10-13) dice: «En cuanto a que el círculo es dividido por el diámetro en dos partes iguales, dicen que Tales fue el primero en demostrarlo (*apodeîxaí phasin*)». Van der Waerden comenta así: «Proclo (vale decir, Eudemo) dice expresamente que Tales ha *demostrado* que el diámetro divide al círculo en dos mitades iguales… En mi opinión, sería ridículo corregir a Eudemo argumentando que nosotros conocemos la geometría de Tales mejor que él. Eudemo debe haber tenido a mano algún escrito de Tales, pues sabía incluso con qué palabra designaba éste el concepto de igualdad de ángulos. Si entonces Eudemo nos dice que Tales ha demostrado tal teorema, nosotros, ignorantes, no podemos hacer nada mejor que creerle»[18]. Aclaremos que la referencia

14. Kurt von Fritz, *Platon, Theaetet und die antike Mathematik. Mit einem Nachtrag zum Neudruck*, Darmstadt, Wissenschaftilche Bughesellschaft, 1969, Nachtrag pp. 69–70.
15. Op. cit., p. 71.
16. Op. cit., pp. 70–71., Cf. «Die APXAI in der griechischen Mathematik», *Archiv für Begriffsgeschichte* I (1955) p. 79, e incluido también en *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlin–New York, W. de Gruyter, 1971, p. 403. Sobre el mismo tema del *epharmózein* y en el último volumen citado, se extiende von Fritz en el artículo de 1959 (publicado originariamente en el Nº 4 de la citada revista *Archiv*) «Gleichcheit, Kongruenz und Aehnlichkeit in der antiken Mathematik bis auf Euklid», p. 430 ss.
17. B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft* (traducción alemana de H. Habitcht), Basel–Stuttgard, Birkhäuser, 1956, pp. 145–148, y «Die Beweisführung in den klassischen Wissenschaften des Altertums», artículo de 1957 incluido en *Um die Begriffswelt der Vorsokratiker*, hrsg. v. H. -G. Gadamer, Darmstadt, Wiss. Buchg., 1968, pp. 43–48.
18. Artículo «Die Beweisführung» p. 46 y 47 (subrayado del autor). Cf. *Erwachs. Wiss.*, 146.

a que Eudemo conocía la palabra con que Tales designó la igualdad de ángulos proviene de otro pasaje de Proclo en el mismo comentario a Euclides (p. 250-20-251, 2), en el que leemos: «Hay que agradecer al viejo Tales por el descubrimiento de muchas otras cosas y por este teorema [*sc.*, I, 5, Eucl.], pues se dice (*légetai*) que fue el primero en conocer y decir que en todo triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales; aunque, en un «lenguaje» más arcaico, llamó "similares" (*homoías*) a los ángulos iguales (*ísas*)».

Ahora bien: en primer lugar, como se ve, Proclo no menciona en absoluto a Eudemo en ninguno de los dos pasajes, sino que habla de sus fuentes de forma indeterminada («dicen», «se dice»), con vocablos (*phasin*, *légetai*) que suelen indicar una tradición generalmente oral. Para atribuir estos dos pasajes a Eudemo, en consecuencia, estimo que van der Waerden debe basarse en alguna tradición de los historiadores modernos de la matemática griega (cuyo iniciador desconozco), que infiere que, puesto que dos de las cinco veces que Proclo alude a Tales (a saber p. 299, 1- 4 y 352, 14-18), menciona a Eudemo como la fuente de su información («Según dice Eudemo, fue descubierto primero por Tales» y «Eudemo, en la *Historia de la geometría*, atribuye a Tales este teorema», respectivamente) en los otros tres casos también debe haberse basado en Eudemo. El fundamento, como se ve, es harto precario. Fritz Wehrli, quien ha compuesto la más importante recopilación de fragmentos de Eudemo que existe[19], en la cual ha incluido el más extenso de los tres pasajes restantes (el llamado «sumario de Proclo», tampoco a nuestro juicio de forma fundamentada)[20], excluye sin embargo de su recopilación los dos pasajes en que se basa van der Waerden en su afirmación.

En segundo lugar, y aunque supusiéramos que la fuente de Proclo es la misma, toda vez que habla de Tales (trátese de la bisección del círculo por el diámetro o de los ángulos de la base de un triángulo isósceles), la atribución a Tales del «conocer y decir» (*epistêsai kaì eipeîn*) acerca de la igualdad de los ángulos con la palabra «similares» en lugar de «iguales» no puede ser ninguna garantía de que la fuente de Proclo haya tenido a mano un escrito de Tales. Aun en el supuesto caso de que las palabras procedieran efectivamente de Tales, nada impediría que se tratara de una tradición oral. Incluso el hecho de que Proclo declare «se dice», *légetai*, lo exige. Pero además, las palabras pueden no proceder de Tales sino de quien transmitía la cosa sabiendo o presumiendo que Tales no había manejado un concepto abstracto de «igualdad» sino de «similaridad» empírica, como el que permitía el procedimiento del *epharmózein*[21].

Y es a ese procedimiento al que se refiere Proclo en el pasaje que van der Waerden toma como testimonio del uso de la demostración deductiva por parte de Tales: «En cuanto a que el círculo es dividido por el diámetro en dos [partes iguales], dicen que Tales fue el primero en demostrarlo (*apodeîxai*), y la causa de la

19. *Die Schule des Aristoteles, VIII. Eudemos von Rhodos*, Basel, 2, 1969.
20. Nos hemos extendido en un análisis detallado de dicho «sumario» en nuestro artículo «Eudemo y el "catálogo de geómetras" de Proclo», en *Emerita*, LIII (1985), pp. 127-157.
21. K. v. Fritz («Gleichcheit» p. 474) señala que desde Homero *íson* designaba la igualdad cuantitativa y *hómoion* la igualdad de figura, por lo cual no era de extrañar que Tales empleara este término al hablar de los ángulos de un triángulo.

dicotomía es el desplazamiento de la recta sin desvíos a través del centro. Pues al moverse a través del centro y mantener siempre en todas sus partes el movimiento, sin desviarse hacia uno u otro lado, separa a ambos lados porciones iguales de la circunferencia. Si quieres demostrar (*deiknúein*) esto con un procedimiento matemático, imagínate el diámetro trazado haciendo coincidir [o "superponiendo", *sunarmozómenon*] una parte del círculo con la restante; porque, si una parte no es igual a la otra, aquélla caerá dentro o fuera de ésta; y en cualquiera de los casos se concluirá que la recta menor es igual a la mayor. En efecto, todas las rectas que van desde el centro hasta la periferia son iguales, por lo cual la recta que cae fuera será igual a la que cae dentro, lo que es imposible. Entonces una parte coincide (*epharmózei*) con la otra, de modo que son iguales. Por consiguiente, el diámetro divide al círculo en dos [partes iguales]» (157, 10–158, 2 Friedlein).

Como se echa de ver, Proclo no adjudica (y mucho menos Eudemo) a Tales ningún método deductivo sino que, como ejemplificación de lo que Tales demostró, recurre al procedimiento empírico del *epharmózein*, por lo cual la hipótesis de Kurt von Fritz de que Tales de Mileto pudo haberlo usado nos parece altamente probable, dados los testimonios aristofanescos acerca de su vinvulación con la geometría y con el compás (cf. *Nubes* 177-180 y *Aves* 995-1009) y los documentos que podrían acreditar el uso del compás en la época de Tales[22], y sobre todo dado el interés con que la tradición nos muestra a Tales por ángulos y triángulos.

Conviene entonces ver más de cerca en qué consiste la demostración deductiva.

4. Demostración y deducción

Cuando Kurt von Fritz sugiere que los griegos, a partir de Tales, y a diferencia de los egipcios y babilonios, se abocaron a «demostrar todo»[23], y que esto Tales pudo intentarlo con el procedimiento del *epharmózein*, se nos suscita una seria duda: ¿no conocían acaso la regla y el compás los egipcios y babilonios? De ser así, ¿cómo sabemos que no tuvieron en absoluto una inquietud como la que se atribuye a Tales, recurriendo para ello al *epharmózein*?

Recordemos la inscripción en la tableta babilónica de la colección Yale Nº 7289, en la cual Neugebauer hallaba una antigua aplicación del teorema de Pitágoras. El hecho de que se hayan dibujado en el cuadrado dos diagonales en lugar de una sola, formando así cuatro triángulos rectángulos pequeños (*t*) y no sólo los dos grandes (*T*), que habrían bastado para explicar las cifras escritas, sugiere claramente la comprobación previa de que el cuadrado que se puede construir sobre la diagonal consta de cuatro de esos triángulos *t*, mientras que el cuadrado

22. Cf. B. Gladigow, «Thales und der *Diabétes*», *Hermes* 96 (1968) pp. 264–284, y Ch. Darenberg–E. Saglio, *Dictionnaire des Antiquités grecques et romanes*, I, 2, c (Paris 1887), pp. 1185–1186, dibujos 1510–1512 (en rigor, Saglio no se atreve a precisar la antigüedad).
23. *Platón. Theaetet*, p. 71.

construido sobre cada uno de los lados consta de sólo dos de los mismos, de modo tal que, si tomamos cada uno de los dos triángulos mayores *T*, hallaremos que el cuadrado construible sobre su hipotenusa (la diagonal del cuadrado) está compuesto por 4 triángulos *t*, y equivale así a la suma de los cuadrados construibles sobre los dos catetos, que estarán compuestos cada uno por 2 de esos triángulos. Todo esto hecho con regla y compás, por medio entonces del *epharmózein*, equivale a una demostración o verificación de lo que numéricamente está expresado en la tableta como resultado de 2.

Por cierto que, cuando von Fritz dice que los griegos, en tiempos de Tales, trataron de «demostrar todo», quiere decir que su pretensión no se limitaba a estudiar un caso particular, sino que pretendían *la fundamentación de todo el material que les habían legado egipcios y babilonios.* Ahora bien, esto vale como una descripción genérica de un proceso de dos siglos y medio de duración; pero en cuanto a la parte que a Tales le ha podido tocar en dicho proceso los testimonios no nos permiten decir mucho más que fue quien introdujo en Grecia el interés por los estudios matemáticos (desde Egipcio, según Proclo, *In Eucl.* 65, 7-8). Tal vez la diferencia mayor con egipcios y babilonios haya sido la de que no buscaba una finalidad práctica, que es lo que subrayan las anécdotas que transmiten Platón y Aristóteles.

Obsérvese que las proposiciones 1 a 34 del libro I de Euclides, aunque en la redacción que éste nos legó se nos presentan deductivamente, pueden resolverse con el procedimiento del *epharmózein*, para avalar el cual ha subsistido en los *Elementos* un axioma: «las cosas que coinciden *epharmózonta* una con otra son iguales entre sí» (N. C. 7). Pero *con el teorema I*, 35 («Los paralelogramos que están sobre la misma base y en las mismas paralelas son iguales entre sí») *se introduce la novedad radical de que sólo es posible demostrarlo deductivamente, porque ahora se trata de probar la igualdad de áreas de distinta figura*, y esto no se puede resolver con regla y compás, ya que los lados y ángulos de las distintas figuras son distintos (a diferencia de las proposicions 1-34). Esto significa que, aun cuando se siga un orden de tratamiento en gradual crecimiento de complejidad —que no es sin duda aquel en que históricamente se han presentado los problemas—, llega un momento que no se puede avanzar más con el simple procedimiento empírico del *epharmózein*.

Más arriba hemos visto, dentro del esquema causal aristotélico aplicado a la matemática, lo que Aristóteles denomina «el existir necesariamente a partir de ciertas cosas» o «lo que, dadas ciertas cosas, se sigue necesariamente». Para simplificar el razonamiento que Heath presume como inherente al difícil ejemplo que aquí pone Aristóteles[24], digamos que, desde el ángulo *A* inscripto en el semicírculo hasta el diámetro de éste, se traza una recta que, de acuerdo con el teorema I 13, debe formar dos ángulos *B* y *C* cuyo valor total es de dos rectos; por otro lado, y como derivación (que no describiremos) del teorema I 32 resulta que dichos ángulos *B* y *C* son el doble de *A*. De esto *se sigue necesariamente* que *A* es igual a la mitad de dos ángulos rectos, y a su vez de esto *se sigue necesariamente*

24. Cf. supra, nota 5.

que A es un ángulo recto. Y hemos dicho más arriba que este *seguirse necesariamente* una proposición de otra u otras constituye la esencia de la deducción.

Por cierto que a veces parecería pensarse en la deducción como razonamiento connatural al hombre, hasta el punto de que, inclusive cuando alguien como Proclo nos diga sólo que Tales «demostró» algo y nos lo ejemplifique con un procedimiento empírico, se entienda con ello que Tales lo demostró deductivamente. De hecho, sin embargo, como ya ha sido advertido más de una vez, *los primeros testimonios literarios de deducción que poseemos proceden de comienzos del siglo V aC, más precisamente de Parménides de Elea.*[25]

A pesar de esto último, existe a menudo una actitud reacia a aceptar lo que es un hecho arqueológicamente indiscutible, y se ha tendido a explicar el uso de la deducción por Parménides como procedente de otros ámbitos. Así, por un lado, desde Cornford hasta Barnes muchos angloparlantes han dado por sentada la influencia en Parménides de «las demostraciones de la geometría» anterior, pitagórica en particular[26], que les permite creer que «no fue el primer pensador que propuso argumentos deductivos»[27], pero sin poder nunca justificar tales suposiciones en texto alguno. Y acaso más endeble resulta la tesis de Gigon de que hay que buscar los antecedentes más bien en el campo de la oratoria judicial[28].

La argumentación literaria anterior que conocemos tiene características bien diferentes del mecanismo deductivo. Véase por ejemplo el razonamiento de Fénix frente a Aquiles, en *Ilíada* IX: no debe tener éste un corazón despiadado, dado que los dioses mismos —que son mayores en excelencia, dignidad y fuerza— son flexibles, y los hombres, cuando se han excedido o equivocado, los conmueven con sacrificios, plegarias y libaciones (496-501). Con mayor razón Aquiles debería ceder, en cuanto Agamenón le ofrece cuantiosas compensaciones por el atropello cometido. Hay acá una cierta lógica argumental, que muestra la razonabilidad de la tesis sustentada, tal como en *Los trabajos y los días* Hesíodo trata de demostrar a Perses que en el mundo tiende a imperar la justicia y que ésta favorecerá a quie-

25. Cf. A. Szabó, «Zum Verständnis der Eleaten» (*Acta Antigua*, II, 1953, pp. 243-289); «Eleatica» (*Acta Antigua*, III, 1955, pp. 67-103, «Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden? (*Acta antiqua* IV, 1956, pp. 109-151); «Anfänge des Euklidischen Axiomensystems», art. de 1960 incluido en el volumen *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, hrsg. v. O. Becker, Darmstadt, Wiss. Buchg., 1965, p. 358; W. Burkert, Wiss.u.W., pp. 402-403 y Lore a. Sc., 425-426.
26. F. M. Conford, *Plato and Parmenides*, London, Routledge &Kegan Paul, 3a ed., 1951, p.21.
27. J. Barnes., *The Presocratic Philosophers*, vol. I, London Routledge & Kegan Paul, 1979, p. 177.
28. O. Gigon, *Der Ursprung der griechischen Philosophie*, (Basel, Schwabe, 1945) pp. 251-252. En este último caso, en efecto, no sólo no existen los testimonios que faltan también en el primero (por lo demás, George Kennedy —*The Art of Persuasion in Greece*, London Routledge & Kegan Paul, 1963, p. 26– ha mostrado que la retórica judicial en Grecia se ha desarrollado más bien desde medidos del siglo V), sino que el tipo de razonamiento que se pone en juego es muy distinto del empleado en matemática. Como algunos pensadores jurídicos han distinguido, en base a Aristóteles, en el ámbito judicial rige una «lógica de la persuasión» bien diferente de la «lógica de la coerción intelectual» que prevalece en matemática: en la primera valen las apelaciones a los sentimientos, los razonamientos analógicos, etc.; en la segunda sólo el impersonal e inexorable nexo causal (cf. Charles Perelman, «Raisonnement juridique et logique juridique», y Georges Kalinowski, «De la specifité de la logique juridique», en *Archives de Philosophie du Droit* N° 11. *La Logique du droit*, Paris, 1966, p.1 ss.).

nes trabajen. Pero no cabe decir que en tales razonamientos anide una fuerza compulsiva intrínseca que desemboque necesariamente en una conclusión, sea ésta aceptada o no en los hechos por el interlocutor.

Ciertamente, Parménides compone, como Hesíodo, un poema épico-didáctico destinado a persuadir (escrito además en segunda persona, lo que subraya la índole parenética de su discurso), y en ese sentido echa mano del mito como recurso persuasivo, delatando clara influencia hesiódica. Pero cuando entra de lleno en la exposición de aquello de lo cual quiere persuadir (que el ser —la realidad— existe como presencia plena y permanente) no pone en juego otras motivaciones que no surjan necesariamente por sí solas. Así, el ser tiene que ser inengendrado, porque de otro modo «¿qué génesis le buscarías?, ¿cómo, de dónde habría crecido? De lo que no es, no te permito que lo digas ni pienses, pues no se puede decir ni pensar que no sea. ¿Y qué necesidad lo habría impulsado a nacer antes o después, partiendo de la nada? Así es forzoso que exista absolutamente o que no "exista en absoluto"» (fr. 8, 6–11). La deducción es aquí, como se ve, indirecta, la del tipo que Aristóteles llama «reducción a lo imposible»: se demuestra que es lógicamente imposible lo contrario de lo que se afirma. Que el ser es implica que no ha nacido, pero (y aquí viene la demostración indirecta) si hubiese nacido esto significaría que previamente no existía el ser, y, en ese caso, tendría que haber nacido de la nada, pero, aparte de que sólo puede hablarse de lo que es y no de la nada, ¿qué necesidad lo haría pasar de no ser a ser? Aquí indudablemente Parménides está pensando en lo que vimos que Aristóteles llama «lo que se sigue necesariamente de» y lo aplica a la realidad en tanto tal.

Claro que no por eso estamos en presencia de un razonamiento matemático. Ni Parménides parece haber sido matemático, ni siquiera su discípulo Zenón, quien en sus célebres aporías desplegó brillantemente la reducción a lo imposible (fr. 1–3, D–K), con el objeto, según nos lo hace decir Platón (*Parménides* 128c), de demostrar que los opositores de Parménides, al postular el cambio y la multiplicidad, incurrían en insalvables contradicciones[29]. Pero lo que queda en claro es que no tenemos testimonios de una matemática deductiva —ni de tipo alguno de deducción— antes de comienzos del siglo V aC.

Ciertamente, como la obra de los matemáticos anteriores a Euclides se ha perdido, resulta siempre arriesgado atribuir a alguno en particular el primer uso de razonamientos deductivos. Porque si nos atenemos estrictamente a nuestros documentos literarios, cabe señalar que probablemente el primer ejemplo de

29. Ciertamente ha habido interpretaciones, como la de Helmut Hasse–Heinrich Scholz (*Die Grundlagenskrisis der griechischen Mathematik*, Charlottenburg, Metzner, 1928, esp. pp. 8–12), que incorporan a Zenón «a la historia de la matemática», entendiendo sus aporías como ataques a los «esfuerzos infinitesimales» de los pitagóricos. Pero esta tesis, que en lo que se refiere esto último ya fue refutada en su momento por B. L. van der Waerden («Zenon und die Grundlagnekrise der griechischen Mathematik», en *Mathematische Annalen*, 117, 1940–1941, pp. 141–161, esp. p. 154 ss.), no ha encontrado seguidores, y en todo caso lo que se admite, de maneras diversas, es la influencia que puede haber ejercido Zenón en las matemáticas (cf. p.e. G.E.L. Owen, «Zeno and the Mathematicians», artículo de 1958 incluido, con algunas correcciones, en R.E. Allen–D. J. Furley, *Studies in Presocratic Philosophy*, II, Londres, Routledge & Kegan Paul, 1971, pp. 143–165), que para lo que aquí nos importa más a nosotros es sobre todo metodológica.

matemática deductiva con que contemos sea el tan escuetamente presentado en el *Menón* 86e4–87b2: si una área es tal que, aplicada a una línea dada en un círculo dado, es deficiente por un área tal como la que se ha aplicado, puede inscribirse en el círculo como triángulo; si no, no[30].

Pero el mismo Platón nos habla de Teodoro de Cirene como «el más grande calculador y geómetra» (*Político* 257a–b; cf. *Teeto* 143d), y el nombre de Teodoro es el más antiguo que nos menciona en conexión con la matemática, añadiendo a lo sumo el de Hipias, aunque a éste sin duda Platón no lo calificaría de tal manera (excluimos de esta consideración sus menciones de Tales, no sólo porque no lo relaciona con las matemáticas sino por las razones ya aducidas), ambos situables en el último tercio del siglo V aC. También Jenofonte, en sus *Memorabilia* (IV 2, 10), menciona a Teodoro como un «excelente geómetra». Varios siglos más tarde, reproduciendo acaso enseñanzas de un neoplatonismo ecléctico, leemos en Jámblico: «Las disciplinas matemáticas (*tà mathémata*) progresaron después de que publicaron sus obras los dos que más las impulsaron, Teodoro de Cirene e Hipócrates de Quíos» (*De Communi Mathematica Scientia*, 77, 24–78, 1 Festa–Klein). Aquí vemos el nombre de Hipócrates a quien nunca Platón nombra y sí en cambio Aristóteles quien por su parte jamás menciona a Teodoro. Por eso hemos insinuado que la fuente de Jámblico es un neoplatónico ecléctico, como así del pasaje del «sumario» de Proclo (*In Eucl.* 66, 4–7) en que también se reúne a ambos como habiéndose hecho «célebres» tras Anaxágoras y Enópides, con el añadido de que Hipócrates cuadró lúnulas y fue el primero que compiló elementos antes de Euclides. Testimonios todos que hablan al menos de la posibilidad de que Teodoro e Hipócrates hayan sido los primeros en emplear la deducción en matemáticas; y además en publicar lo que en ese sentido hicieron. El problema estriba entonces en qué es lo que en ese sentido pueden haber hecho.

En cuanto a Teodoro, tenemos un muy difícil y discutido pasaje del *Teeteto* (147, d3–6), que traduciremos así: «en lo concerniente a lados de cuadrados *dynámeis*[31], Teodoro nos mostró gráficamente (*égraphe*)[32] esto: tanto respecto del de tres

30. Cf. R.S. Bluck, *Plato's Meno*, Cambridge 1964, pp. 441–461. Sin necesidad de detallar el razonamiento, es claramente deductivo.
31. Es difícil y discutida la traducción aquí del vocablo *dynamis*. I: L. Campbell (*The Theaetetus of Plato*, Oxford 1861, pp. 19–20), T. Heath (*A History of Greek Mathematics*, I, Oxford 1921, p. 155) y F. M. Cornford (*Plato's Theory of Knowledge*, London 1935, p. 22), entre otros, traducen «raíz cuadrada» o más precisamente *surd* o «raíz cuadrada de número no–cuadrático», versión canonizada por el Liddell–Scott (s. v., IV, 2); A. Diès (*Platon, Théétète*. Paris, Les Belles Letres, 1924, p. 164), W. Knorr (*The Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht–Boston, 1975) y M. Burnyeat («The philosophical sense of Theaetetus Mathematics», en *Isis* 69, 1978, p. 493 s.) prefieren «poder» o «potencia»; III: A. Szabó (*Anfänge der griechischen Mathematik*, München–Wien–Oldenbourg 1969, p. 48 = *The Beginnings of Greek Mathematics*, trad. A. M. Ungar, Dordrecht–Boston 1978, p. 40), «cuadrado»; IV: P. Tannery (*La geométrie grecque*, Paris 1887, p.100), B. L. van der Waerden, («Die Arithmetik der Pythagoreer», 1947–1949. pero en un «Apéndice 1963» a la reprod. en el volumen de Becker citado en n. 25, p. 254, cambia por la versión de Szabó) y M. E. Paiow («Die mathematische Theaetetsstelle», en *Archiv for History of Exact Sciences*, 27, 1982, p. 89), «lado de cuadrado», que es la que adoptamos nosotros y que es a nuestro juicio se lee en lo que sigue en el texto.
32. Aquí las traducciones divergen entre la más literal «dibujó» y la más interpretativa «demostró». Lo que resulta claro es que si «nos dibujó» algo fue para «mostrar*nos*» o «demostrar*nos*» algo; así

pies "de superficie" cuanto del de cinco pies, hizo ver que no son conmesurables en longitud con el pie "como unidad de medida", y así tomó separadamente cada uno hasta llegar al de diecisiete pies "de superficie"y allí de algún modo se detuvo».

Dejamos los problemas referentes a por qué Teodoro empezó por el de tres pies y se detuvo en el de diecisiete. Tratemos de ver qué es lo que pudo hacer cuando «mostró gráficamente» lo que se nos dice que mostró. El texto continúa así (148a6): «cuantas líneas forman un cuadrado de número plano y equilátero las definimos como *mêkos* y cuantas "forman un cuadrado de número" oblongo "las definimos" *dynámeis*». En rigor, «equilátero» significa allí «"producto" de factores iguales» y «oblongo» «"producto" de factores desiguales». Los ejemplos numéricos puestos son claros: ni 3 ni 5 ni 17 pueden producirse con dos factores iguales (como 4 = 2 x 2 o 9 = 3 x 3) sino sólo con dos factores desiguales (3 = 3 x 1, etc.). En términos de «mostrar gráficamente» esto significa que, para construir un cuadrado de tres pies, hay que construir un rectángulo de esa superficie y luego transformarlo en cuadrado. Para hacerlo hallamos en Euclides dos procedimientos: el más clásico (VI, 13) es el único que hallamos en Aristóteles (*De Anima* 413a), y consiste en hallar una «media proporcional» entre las dos rectas del rectángulo; pero dado que esto supone la teoría de las proporciones de Eudoxo, es más razonable pensar que Teodoro usó II, 14 típico teorema de «aplicación de superficies», por el cual, dado un rectángulo, se puede construir un cuadrado de la misma área. En cualquiera de los dos casos sólo se puede proceder deductivamente, ya que como dijimos antes, si se trata de figuras distintas no puede aplicarse el *epharmózein*[33].

En lo concerniente a Hipócrates de Quíos, si bien la referencia más antigua —la de Aristóteles— es más escueta y vaga que la de Platón acerca de Teodoro (*Soph. Elench.*, 171b: «la cuadratura "del círculo" de Hipócrates por medio de lúnulas»), tenemos en compensación una extensa descripción de Simplicio del procedimiento que, según Eudemo, usó para eso Hipócrates; aunque Simplicio encuentra que el de Eudemo es un «resumen conciso, según la costumbre antigua», y avisa que ha de «añadir unas pocas cosas a partir de los *Elementos* de Euclides», de modo que, independientemente de la confianza que nos merezca el testimonio de Eudemo (fr. 140 Wehrli = Simpl., *In Phys.*, 60, 22–68, 32), la euclideanización del relato impide tomarlo como fidedigno, especialmente cuando implica nada menos que XII 2, esto es, el denominado «método de exhaución», que Arquímedes atribuye a Eudoxo[34]. Tal vez sea correcta la sugerencia de Heath de que, más modestamente, Hipócrates pudo haber procedido en forma similar a la atribuida al sofista Antifone, «cubriendo» gradualmente los círculos con polígonos, y «llegando al límite»[35]. En cualquier caso, los testimonios indican, con

Szabó decía en la versión alemana «zeichnete uns» y pasa, en la traducción inglesa, a «was drawing... to demonstrate to us».

33. En esta reconstrucción del procedimiento de Teodoro nos inspiramos en Szabó (*Anfänge* pp. 43–79), con algunas diferencias que no hacen a la forma de traducir *dynámeis* (cf. nota 31), en lo cual creemos que la versión que adoptamos nosotros se ajusta más incluso a tal reconstrucción.
34. Cf. Eudoxo fr. 59a, b y c en F. Lasserre, *Die Fragmente des Eudoxos von Knidos* (Berlín 1966, pp. 30–31).
35. Heath, *A History*, I, p. 328.

alto grado de probabilidad, un empleo de razonamiento deductivo y también, como en el caso de Teodoro, una cierta familiaridad con problemas relacionados con la irracionalidad de determinadas líneas, como la diagonal del cuadrado o la circuferencia, incluyendo seguramente un manejo deductivo del «teorema de Pitágoras». Esto, como decimos, en el tercer tercio del siglo V aC.

5. Deducción y fundamentación axiomática

Ciertamente, el uso de la argumentación deductiva exige no sólo que se vaya a parar a la conclusión de una manera necesaria, sino también que el punto de partida aparezca por sí mismo necesario. Porque, aunque la deducción en sí misma consista sólo en el «se sigue necesariamente», para que tenga fuerza lógica real lo que se sigue debe seguirse de algo cuya aceptación sea también necesaria. Si no fuera así habría tenido que ser demostrado previamente, y en ese caso seguirse a su vez de otra cosa de aceptación necesaria.

En el caso de Parménides, hay algo cuya aceptación con carácter de necesario parece requerirse para efectuar todo el razonamiento: «es o no es» (fr. 8, 16, cf. 8, 11), o sea, lo que modernamente se llama «principio del tercero excluido», principio complementario del de «no contradicción», al que Aristóteles no sólo incluye entre los primeros *axiómata* de la ciencia (*Met.*, IV 3–4) sino que califica como «verdad última a la que se remiten todos los que demuestran, pues es por naturaleza un principio, inclusive de todos los demás axiomas» (*ib*, 1005b32–34). Y es innegable que también este principio está implícito en el poema de Parménides, subyacente al del tercero excluido. Claro que la aceptación plena de sus razonamientos parecería tener que incluir una definición del concepto de «ser», y en ese sentido no queda claro si ésta emerge de las características («inengendrado», «imperecedero», etc.) que se demuestran por «reducción a lo imposible» o si se halla ímplicita previamente a tales demostraciones. Es indudable, en todo caso, que dicha definición requeriría una complicada elaboración que debió esperar hasta Platón y Aristóteles, quienes entendieron que la validez de los razonamientos parmenídeos se limitaba a una definicón del «ser» como absoluto, mas no a cualquier tipo de «ser».

Lo que de cualquier manera se hace manifiesto es que el mismo Parménides enlazó sus razonamientos deductivos con una premisa inicial cuya verdad, para él tan necesaria como la que presidía la concatenación argumental, se debiera a una revelación de una diosa o al carácter de evidente que sintió en ella.

En ese sentido, resulta altamente probable que tanto Teodoro como Hipócrates, si efectivamente emplearon el razonamiento deductivo en matemáticas, hayan partido de premisas que pudieran contar por sí mismas con aceptación, por resultar evidentes. Pero esto no puede pasar de ser una conjetura, ya que nuestros testimonios sobre los procedimientos de ambos geómetras son demasiado precarios como para concluir otra cosa que la mera posibilidad y la mera probabilidad de un uso de la deducción, a partir de premisas que ellos pueden haber aceptado, pero cuyo grado de evidencia, por entonces, desconocemos.

Existen razones, con todo, para sospechar que no hubo, anteriormente a Platón y Aristóteles, una conciencia de la necesidad de partir de premisas evidentes (es decir, de la necesidad de axiomatización), que condujera a una cierta «reglamentación» de estas premisas y de allí, progresivamente, a su sistematización.

La primera es, a nuestro juicio, el conocido despliegue de una argumentación erística, por parte de muchos o algunos de los sofistas, que no sólo adolecía a menudo de fallas en el mecanismo de concatenación argumental sino que también solía caracterizarse por partir de premisas erróneas (y que, al decir de Aristóteles, parecían probables sin serlo). Este hecho, testimoniado juntamente con la batería desplegada por Platón y sobre todo por Aristóteles para contrarestarlo, acredita que, al menos hasta los albores del siglo IV aC, el uso riguroso de la deducción se hallaba en pañales y más aún su fundamentación axiomática. Precisamente la fundación de la Academia platónica parece haberse dirigido primordialmente a sustraer la discusión filosófica y científica a la inorgánica disputa del ágora, en la que los incautos quedaban a merced de los erísticos, y trasladarla a un ámbito en que pudiera tornarse en diálogo serio y pautado. La vigencia de reglas de juego, que es algo común a los conceptos de «dialéctica» tan diferentes que manejaron Platón y Aristóteles (de las cuales hay una básica, que se advierte ya en los diálogos socráticos de Platón: la de no avanzar en la discusión si no se cuenta con el acuerdo del interlocutor), ha influido sin duda en los jóvenes matemáticos que ingresaron en la Academia para poner en práctica en su ámbito específico similares pautas organizativas (lo cual produjo inclusive una transferencia terminológica desde la dialéctica de los filósofos a las matemáticas)[36]. Aunque no les bastó ya para ello la aquiescencia del interlocutor en la aceptación de las premisas, sino que se requirieron otras condiciones, como las que aparecen enumeradas por primera vez en los *Segundos Analíticos* (I, 2).

La segunda razón es la de que no parece posible que haya habido una axiomatización mínimamente orgánica antes de que se manejaran los axiomas euclídeos de igualdad (especialmente las Nociones Comunes 1 a 3), y éstos, si se exceptúa la empírica N. C. 7 que vimos fundamenta al *epharmózein*, contienen una concepción de igualdad abstracta que no hallamos testimoniada antes del *Fedón* 74a–c. Allí Platón habla de lo «Igual en sí» (o «las Cosas Iguales en sí», ya que hablar de igualdad exige por lo menos dos cosas), que no es aprehensible sensorialmente, a diferencia de las cosas visibles que decimos «iguales», como dos leños o dos piedras. Nótese que el mismo Platón, en el juvenil diálogo *Eutifron*, da una definición de «par» e «impar» como si fuera ya conocida (o sea, como circulante en las matemáticas de ese momento), según la cual el primero es «un número isósceles» y el segundo «escaleno» (12d); y esto implica una concepción geométrica empírica distante aún de Euclides VII, def. 6 («par es un número divisible en dos "partes iguales"»), que más tarde demostrará conocer Platón, en *Leyes*, X, 895e. A nuestro juicio, esto significa que, sólo a partir de la madurez de Platón, y de la fundación de la Academia durante ésta, tenemos documentados avances en la axiomatización de las matemáticas, incluyendo un concepto supraempírico de igualdad que la sustentara.

36. Hemos desarrollado este tema en el artículo citado en nota 6, especialmente p. 42 ss.

Claro está que, si se acepta nuestro anterior intento de reconstrucción del procedimiento de Teodoro de Cirene para demostrar la inconmensurabilidad de las líneas —con la unidad de medida— con que se construyen los cuadrados «oblongos», se debe aplicar el teorema II 14, que, como todas las proposiciones que hallamos en Euclides a partir de I 35, no pueden demostrarse con regla y compás (por tratarse de comparación de figuras distintas), sino deductivamente. Y esto supone que se maneja un concepto de igualdad menos empírico que el implicado en la N. C. 7. Aquí, más del problema de lo conjetrural de nuestra reconstrucción y de que tengamos que manejarnos más con supuestos probables que con hechos verificados, debemos señalar que no creemos que Platón haya inventado el concepto de igualdad que formula en el *Fedón*, sino que lo toma precisamente de la matemática de su tiempo. Si es cierto lo que se recoge (¿de Hermodoro?) Diógenes Laercio —III, 6— en el sentido de que, después de la muerte de Sócrates y antes de ir a Italia, Platón visitó a Teodoro en Cirenne, no sería extraño que le hubiese llamado la atención el uso de procedimientos que no sólo se avenían con el tipo de razonamiento que la filosofía conocía desde Parménides sino con la tendencia socrático–platónica a elevarse por encima de lo sensible. Y que en Teodoro, o poco más tade en Arquitas, hubiese detectado un concepto de igualdad que se compaginaba al máximo con su búsqueda de la perfección que iba a consolidarse filosóficamente con la teoría de las Ideas. Pero no sólo es en él donde hallamos por primera vez testimoniado ese concepto de igualdad, sino que, aunque haya sido empleado por los matemáticos antes que él hablara del mismo su explicitación ha sido al respecto tan decisiva como lo fue, en lo concerniente a la mencionada «reglamentación» de los principios axiomáticos, la explicitación de Aristóteles en los capítulos 2 y 10 del primer libro de los *Segundos Analíticos*. Al respecto, la información de Proclo sobre los avances matemáticos realizados en el marco de la Academia, en particular las compilaciones de elementos com la de León y sobre todo la de Teudio de Magnesio (*In Eucl.*, 66, 14-68, 20, si es correcta, se condice muy bien con lo que sostenemos.

¿Cuando comenzó entonces la matemática científica? ¿Con el uso de la demostración empírica como la cabe atribuir a Tales? ¿Con el recurso post–parmenídeo a la deducción, tal vez con Teodoro de Cirene e Hipócrates de Quíos? ¿O con éstos, en la medida que han podido partir, en sus razonamientos, de principios axiomáticos? ¿O sólo a partir del momento en que, en base a la búsqueda de pautas para la argumentación en la Academia platónica, se sistematiza la fundamentación axiomática de los razonamientos matemáticos?

De acuerdo con lo dicho hacia el comienzo de este artículo, si el criterio que empleamos es el de «fecundidad» científica, debemos conceder razón a quienes postulan la prueba deductiva como la instancia cuyo surgimiento es decisivo para el avance de la matemática. Sin duda que también es de suma importancia para el establecimiento de la matemática como ciencia la sistematización axiomática, pero esa importancia sólo es decisiva si se prioriza el criterio de «organización» (o el de «rigor») de los conocimientos sobre el mencionado de «fecundidad». Pero tales otros criterios, como hemos visto, no son suficientes para diferenciar lo «científico» de lo «extra–científico» y «pre-científico» y explicar el desarrollo evolutivo del primero de tales ámbitos.

De este modo, no es la erección de un sistema axiomático–deductivo (erección, por lo demás, en evolución casi constante, ya que ni Euclides la inventó de golpe, sino que más bien recopiló lo que era producto de más de un siglo de esfuerzos, ni la hizo para toda la eternidad, aunque haya tardado unos cuantos siglos en admitir correcciones o alternativas) el hito que separa la matemática científica de la pre-científica. Y tampoco lo es el supuesto intento de Tales de demostrar —todo lo que se le ocurriera— empíricamente, ya que los alcances del *epharmózein* son claramente limitados y además obligadamente aislados. Sí lo es, en cambio, la aplicación de la prueba deductiva a las matemáticas, en algún momento entre el poema de Parménides (490/480 aC) y el *Menón* de Platón (390/380 aC.), que muy bien puede haber sido entre los años 430 y 400, con los trabajos de Teodoro de Cirenne e Hipocrátes de Quíos. Ciertamente que, como hemos dicho, para que nuestra presunción de que en estos trabajos se halle una verdadera prueba deductiva, presuponen algunos principios axiomáticos de igualdad abstracta, como las Nociones Comunes de Euclides 1 a 3 (la última de las cuales —que implica las otras dos— es ya citada por Aristóteles, p. e. *Seg. Anal.*, I, 10, 76a41, «cuando se sustraen cosas iguales a cosas iguales, las cosas restantes son iguales»). Pero no presuponen una organización sistemática de estos principios, aunque Proclo recoge la versión de que Hipócrates «fue el primero de quien se tiene mención que haya compuesto un libro de elementos» (*In Eucl.* 66, 7–8). Tal vez no haya existido una organización sistemática hasta Teeteto y Eudoxo, con los trabajos del primero sobre las líneas irracionales y del segundo con su teoría de la proporción, que permitieron domeñar matemáticamente el ámbito de la irracionalidad[37].

37. Este trabajo ha sido redactado en base a las notas de clase de un cursillo dado en el Departamento de Filosofía de la Facultad de Letras de la Universidad Autónoma de Barcelona, entre enero y marzo de 1988, en el marco del programa de sabáticos del Ministerio de Educación y Ciencia de España.