DESCARTES: LA IMAGEN MATEMÁTICA DEL UNIVERSO. LAS IDEAS DE PROPORCIÓN Y DE CONTINUIDAD EN LA *GEOMETRÍA* Y SU INFLUENCIA SOBRE LAS IDEAS COSMOLÓGICAS CARTESIANAS

Mary Sol de Mora Charles
(Universidad del País Vasco/EHU)

Una de las primeras ideas que Descartes intenta desarrollar es precisamente la generalidad del método matemático. Aún era muy joven cuando concibió su gran proyecto, que expone en una carta a su amigo de entonces, Beeckmann. (*Oeuvres*, X, Carta a Issac Beeckman, 26-III-1619, pags. 156-158).

Por otra parte, el estudio de las letras le había decepcionado:

> No diré nada de la Filosofía, sino que, viendo que ha sido cultivada por los espíritus más excelentes que hayan vivido desde hace varios siglos, y que no obstante no se encuentra en ella todavía cosa alguna sobre la que no se discuta, y por consiguiente que no sea dudosa, yo no tenía la suficiente presunción para esperar descubrir en ella más que los demás; y que, considerando cuántas opiniones diferentes puede haber tocantes a una misma materia que sean mantenidas por gentes doctas, sin que jamás más de una de ellas pueda ser verdadera, tenía yo por falso todo aquello que no era más que verosímil. Discours de la Méthode, A.T., t. VI, p.8-9.

La lógica aristotélica no sirve para inventar. El verdadero método se puede rastrear en la geometría de los antiguos (Pappus y Diofanto lo prueban) y en el álgebra de los modernos (una especie de aritmética que está dirigida a ejecutar con los números lo que los antiguos hacían con las figuras). La lógica sólo es útil como método de exposición.

Descartes propondrá en sus primeros escritos, como las *Regulae*, que se resuelvan los problemas por analogía con el procedimiento seguido en aritmética. En las obras matemáticas griegas de Euclides, Apolonio o Arquímedes, los teoremas se demostraban pero los problemas se construían geométricamente, y eso es lo que quiere hacer Descartes en principio: concibe la solución de los problemas geométricos como una construcción de figuras y no como una solución algebraica que se corresponda con la figura geométrica. En esta etapa de su evolución, no piensa tanto en una analogía entre geometría y álgebra, como en una analogía entre geometría (cantidad contínua) y aritmética (cantidad discreta). Descartes compara tres tipos de problemas aritméticos con los correspondientes geométricos: los más sencillos, aquellos solubles con números racionales, serían solubles con líneas rectas y círculos; los solubles con números irracionales, serían solubles con líneas producidas por un único movimiento continuo; y por último los problemas insolubles pero cuya solución se puede suponer, serían solubles sólo con curvas producidas por dos o más movimientos insubordinados (por ejemplo, el problema de la cuadratriz, descrito por Pappus y en cuya solución entra el número irracional pi, lo que impide llegar a un valor exacto). Excluye por esa razón a las curvas mecánicas, por ejemplo la roulette (la cicloide). De ahí que los problemas clásicos sean los que más le interesen en su *Geometría*, en lugar del hipotético descubrimiento de una geometría algebraica. Descubre así la Mathesis Universalis, una ciencia maravillosa que los antiguos habían conocido, pero que habían ocultado "por una malicia perversa, temiendo quizá que al ser muy fácil y simple, su método perdiese valor una vez divulgado". Pero él mismo también aplicará esa malicia perversa a su *Geometría*. La matemática universal es sin embargo una ciencia general de la cantidad, una ciencia del orden y la medida, que se basa en la claridad y en la facilidad, como indica su método de invención.

Dado que el texto de la *Geometría* es voluntariamente oscuro y no están desarrolladas del todo las construcciones y demostraciones, sus ideas sólo pueden entenderse mediante los ejemplos que da:

> Nada he omitido por descuido, mas preveo que ciertas personas que presumen de saberlo todo no perderían la oportunidad de decir que no he escrito nada que ellos no conociesen si me expresase de forma suficientemente inteligible para ellos. (*Oeuvres*, IV, *Géométrie*).

En muchas ocasiones, sin embargo, la sencillez de la construcción mecánica no se refleja en la sencillez de la ecuación, cuyo grado puede ser muy elevado. Pero Descartes no creía que fuese suficiente dar la ecuación para representar la curva. Como decía en su carta a Beeckman, en 1619 el único criterio que le guiaba a la hora de aceptar una curva en el dominio de la geometría exigía que la curva se pudiera trazar con un movimiento contínuo único o con dos subordinados y regulados. Pero las curvas que se generan con este criterio pueden ser muy complicadas algebraicamente.

Aunque las ecuaciones proporcionan información relativa a las propiedades de las curvas, a Descartes le parece que no ofrecen una representación suficiente de su realidad geométrica. Hace falta aún imaginar distinta forma de describirlas y escoger las más sencillas de entre ellas. Las ecuaciones algebraicas quedarían más que nada como herramientas para construir y clasificar los problemas geométricos. La mayoría de las veces, Descartes realizaba todos sus cálculos sin escribir ni conocer las ecuaciones de la curva en su forma explícita; ni siquiera se encuentran en la *Geometría* las ecuaciones de las curvas que él consideraba aceptables, por haberlas trazado con su compás. Por ejemplo dice que las ecuaciones de las secciones cónicas son de segundo grado, pero no lo demuestra.

Pero, como señala Shea (*The magic of numbers and motion*, 1991), estos fallos no deslucen la grandeza de los logros de Descartes. De los tres problemas famosos de la antigüedad, la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo, resolvió los dos primeros con métodos sumamente ingeniosos, de fácil aplicación con el compás. Simplificicó la notación algebraica y le dio a la geometría un nuevo rumbo al descubrir que las ecuaciones algebraicas no sólo eran útiles para clasificar las curvas geométricas, sino también para conseguir que su construcción fuese la más simple posible. El trabajo de Descartes es un logro técnico que completa la obra de Apolonio y la idea de la representación lineal de Vieta. Su método es universal y potencialmente aplicable también a las curvas trascendentes, es decir, a las no algebraicas. A partir de 1600 el álgebra se convirtió en la disciplina matemática básica, sustituyendo a la geometría. Pero la idea de asociar ecuaciones a las curvas es más clara en Fermat que en Descartes, pues para él esa asociación sólo era un medio para la resolución de problemas de construcciones geométricas. Fermat tenía una visión más moderna de la cuestión.

Para comprender la conexión de sus ideas matemáticas y cosmológicas, debemos comprender primero la forma de conocer de Descartes. Para él, sólo hay conocimiento por la intuición y por la deducción, pero como la deducción no es sino una concatenación de intuiciones, la intuición es obviamente fundamental.

La palabra "intuitus" no es original de Descartes, naturalmente, pero él rechaza los antecedentes históricos de su uso; quiere que se le dé el significado original de la palabra latina, "visión". La intuición, propia de la esfera intelectual, no es ni el resultado de nuestra percepción sensorial, ni el espejo de nuestra imaginación, sino una actividad propia de la mente, la aplicación de esa luz natural que Descartes cita a veces como sinónimo de la palabra intuición.

Más tarde, en *El Mundo* (1633), Descartes recalcará mucho las diferencias que hay entre nuestras sensaciones y la realidad ontológica de los objetos que las causan. Es que al hacerlo conciliaba su concepción de las sensaciones con la epistemología que su análisis de la materia imponía. Lo que no dice en *El Mundo* es que tal cosa suponía una ruptura radical con el análisis de la sensación que había realizado en las Reglas para la dirección del espíritu, en 1629, donde defendía que los objetos físicos imprimen su forma en al imaginación y que con ello queda garantizada la objetividad del testimonio de nuestros sentidos.

Ahora resulta que en los datos de la percepción hay oscuridad y confusión como consecuencia de que proceden de la unión substancial del alma y cuerpo, que conocemos a través de dos ideas claras y distintas, que son pensamiento y extensión. El hecho de estar el alma unida al cuerpo, introduce un factor de confusión en el conocimiento de las cosas materiales, de lo que hay.

Descartes se encuentra con problemas respecto al método empírico. Si los efectos prueban la causa, como dice en el *Discurso del Método* (1637), (*Oeuvres* VI, pag. 76), entonces es que el conocimiento de la verdad de las consecuencias no es axiomático, sino empírico. Esto sería suficiente para un empirista, pero Descartes esperaba que su ciencia tuviese unos fundamentos mejores y más intuitivos. No le bastaba que las hipótesis generasen consecuencias observadas a las que se pudiese invocar como prueba de su verdad. Sus hipótesis o "suposiciones" tenían que tener una garantía epistemológica superior con mucha a ésa. Tendrían que poderse deducir de las verdades primarias, pero no se nos dice si se refiere con eso al *cogito ergo sum*, a la existencia, bondad y omnipotencia de Dios, al concepto de extensión o a las leyes del movimiento.

En realidad, Descartes no quería explicar la práctica científica vigente, sino legislar qué procedimientos habría de seguir la ciencia en adelante.

Lo que hay para Descartes, desde el punto de vista de nuestro entendimiento, un cuerpo extenso es complejo, y consta de "cuerpo", "extensión" y "figura". No pueden estas componentes existir aisladas, pero debemos pensar en ellas como si existiesen por separado antes de que podamos juzgar cómo se han combinado en el mismo objeto. El juicio no es un acto del intelecto, sino de la voluntad. En ésta por lo tanto se encuentra la causa de los errores y no en la intuición.

Como para Descartes la intuición y la deducción son los únicos medios intelectuales de adquisición del conocimiento, la combinación o mezcla de las naturalezas simples ha de ser una forma de deducción. En la tercera regla se define la deducción como un movimiento a lo largo de una cadena de razonamientos, cada uno de cuyos eslabones se conoce intuitivamente, y en la que la conexión de los eslabones se aprehende "en un acto de pensamiento continuo e ininterrumpido". Es distinta de la intuición, pues no es instantánea, en principio se extiende en el tiempo, depende de la memoria. Porque en realidad le preocupa menos la descripción detallada del proceso deductivo que liberarlo de las incertidumbres de la memoria y convertirlo en intuición. Se nos encarece que adquirimos una celeridad cada vez mayor en pasar de unos eslabones a otros de las demostraciones, hasta que podamos verlos todos en un destello único y simple de la intuición, como en un flash o un relámpago. Resulta muy sorprendente que alguien que se veía a sí mismo como un desconfiado escéptico aparezca como un ingenuo optimista para los pesimistas habitantes que somos de este final del siglo XX.

Perseguía Descartes la certidumbre y la liberación del "testimonio fluctuante de los sentidos", ésa era su meta, que confesaba abiertamente. Creía que podría alcanzarla si fundamentaba su mathesis universalis en las intuiciones claras y distintas de los patrones corpóreos que los objetos materiales imprimen en nuestra imaginación. Conocer la materia será por lo tanto analizar sus elementos integrantes hasta llegar a la extensión en tanto que naturaleza simple que conocemos por intuición y deducir de ella todo cuanto podamos afirmar de dicha materia.

Se trata por lo tanto de ver si se pueden representar mediante líneas rectas y superficies rectangulares cosas tales como las operaciones de adición, substracción, multiplicación, extracción de raíces, etc., la explicación del sonido, la del magnetismo, o la naturaleza del color. Descartes comprueba que de hecho, este método fracasa estrepitosamente tanto en matemáticas como en física. En matemáticas, la extracción de raíces cuadradas y la representación de raíces negativas e imaginarias estaba obviamente más allá de las posibilidades de la combinación de figuras y líneas geométricas simples que quepa imaginar claramente. En física, la naturaleza del imán y el concepto de fuerza no se podían adaptar a patrones bidimensionales macroscópicos, y los colores sólo podían ser puestos en relación con figuras de manera arbitraria. Esto le desanima de seguir con las Reglas; a Leibniz tal adjudicación arbitraria o convencional de símbolos no le hubiera importado, pero a Descartes, quizá por lo influenciado que estuvo por el Hermetismo, le parecía que tenía que haber una relación mágica y necesaria entre las cosas y su representación geométrica.

El realismo fisiológico, sencillamente no funciona; en la primera fase de *El Mundo*, que escribió unos años más tarde, Descartes se retracta de la idea que había defendido: ya no cree que la naturaleza de los objetos externos se revele en la impresión de su figura en nuestros sentidos.

Descartes, como es sabido, consideraba que el camino correcto , era el que va de la metafísica a la física y pensaba que él lo estaba recorriendo en todo momento; más tarde (1644), en el prefacio de sus *Principios de Filosofía*, expresaría su punto de vista mediante la conocida analogía, relativa a un árbol:

> cuya raíz es la metafísica, su tronco la física y sus ramas, que salen del tronco, las demás ciencias, que se pueden reducir a las tres principales, a saber, la medicina, la mecánica y la ética. (Oeuvres, IX, Principios de Filosofía , pag.14.)

Dios, habiendo escogido libremente una determinada matemática y una determinada materia, implantó en nuestra mente las ideas que les correspondían. No podemos acceder a un mundo platónico más allá del espacio y del tiempo; *lo único que no nos está vedado es un conjunto de ideas innatas muy ligadas al lugar y al momento.* Podemos hacer deducciones *a priori* y aseverar que nuestras conclusiones son objetivas porque: 1. Dios creó tanto el mundo como nuestras ideas innatas y 2. Dios dice la verdad. Por eso, aunque todas nuestras verdades son contingentes en el sentido de que Dios podría haber creado otras, desde nuestro punto de vista, siguen siendo verdades y, por lo tanto, necesarias, pues nuestra mente está creada de forma que sea composible con ellas . Además, existe la ley de la persistencia, como se dice en *El Mundo*. Lo que es, permanece. Lo que Dios ha creado, lo mantiene en el ser. Las dos realidades del universo cartesiano, espacio y movimiento, una vez creadas, permanecen eternamente. La voluntad de Dios es inmutable.

Que no podamos aprehender un número infinito de divisiones en una cantidad finita de materia demuestra simplemente que un intelecto finito no puede aprehender el infinito. Propiamente hablando, sólo Dios es infinito, la idea de infinito sólo es clara y distinta cuando se predica a Dios. Descartes sin embargo rechaza la posibilidad del atomismo, pues cualquier cosa que se pueda dividir en el pensamiento debe, por esa misma razón, ser divisible. Incluso si Dios crease partes de materia que fuesen indivisibles (átomos), no podría privarse a sí mismo del poder de subdividirlas si así quisiera hacerlo.

Además, los cuerpos tienen otra dos propiedades que no se dejan derivar tan fácilmente de la idea matemática de extensión. La primera que son impenetrables y la segunda, que pueden moverse y ser movidos.

Una materia perfectamente sólida y homogénea, como señalaría Leibniz más tarde, no daría lugar a cambio alguno, pero la materia puede volverse fluida gracias al movimento. Dios crea la materia y la pone en movimiento en el mismo instante.

Aunque el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles, no hay conexión ontológica entre los instantes sucesivos de la existencia de un ser, fuera de la voluntad de Dios.

La discontinuidad radical del tiempo y el hueco metafísico entre instantes existenciales le permitían a Descartes explicar ciertos casos de colisión, y equivocarse en cuatro de los siete casos que propone.

En conclusión, no hay nada en el mundo real que está fuera de las matemáticas. "Toda mi física no es sino matemáticas". A la obvia objeción de que si la física es sólo geometría, entonces no es más que una hábil construcción mental, replicaba que el estilo de las matemáticas es precisamente el estilo de la naturaleza.

LA REGLA QUARTA DEL *MÈTODE* I LA *GEOMETRIA*

Josep Pla i Carrera
(Universitat de Barcelona)

Resum
The thought is scientific when it gets general character to the laws that obtains. This generality carries us to clear and distinct knowledge. This, into Descartes mentality, involves the general character of the analysis, explained in the forth law. I understand the lecture what generally is made of the fourth law of the *Discours de la Méthode* is very poor when it is applied to *La Géométrie*. In this paper, I try to explain how must understand it.

1. Introducció

> Després dels tres somnis de la nit del deu a l'onze de novembre de 1619, René Descartes [1596–1650] es va prometre a si mateix que dedicaria la vida a l'estudi, i va demanar a Déu "que el guiés en la recerca de la veritat que anava a emprendre.[1]

Aquesta ciència nova consisteix en la resolució dels problemes geomètrics pel mètode d'anàlisi-síntesi grec, que en Descartes pren una semàntica totalment diferent.[2] I és precisament l'estudi aprofundit d'aquesta metodologia geomètrica, un cop desprovista de la càrrega limitativa de la geometria, el que el porta a l'elaboració de les *Regulae* i del *Discours de la Méthode*. No es tracta pas de cap "tractat del mètode", sinó solament d'un prefaci sobre el mètode. És precisament per aquesta raó que acompanya el *Discours de la Méthode* dels tres famosos *Essais*. En ells aplica el mètode entès com una metodologia científica i, en aplicar-lo, aconsegueix establir, en cada un d'ells, les veritats pròpies de la ciència que analitza a partir de les "veritats intuïtives", de les "intuïcions".

Com posa de manifest Shea,[3] el geni de Descartes pel que fa a la geometria rau "en la capacitat que té per captar l'aplicabilitat universal d'una solució que, en un principi, s'havia construït per resoldre un problema concret"[4] L'acte de generalització és, en efecte, la intuïció crucial que obre la porta al coneixement.[5] Aquesta *capacitat de generalització* —una qualitat intel.lectual innegable— és la que li permet afirmar que "el mètode ensenya a seguir l'ordre veritable i a *enumerar exactament totes les circumstàncies* d'allò que es busca i això és el que atorga certesa a les regles de l'aritmètica. Ara bé, el més plaent d'aquest mètode era que a través seu estava ben segur d'haver usat la meva raó, sinó de la forma més perfecta, sí de la millor manera possible". I segueix: "A més, *no havent-lo sotmès a cap matèria en particular, se'm mostrava útil per aplicar-lo també amb fruit a les dificultats de les altres ciències tal com havia aconseguit fer amb les de l'àlgebra*."[6]

---

1 Shea, W. R. [1991], edició castellana de 1993, 175.
2 ver Eecke P. [1963], i Viète, F. [1591] i [1953].
3 Shea, W. R. [1991], edició castellana de 1993, capítol III.
4 Shea, W. R. [1991], edició castellana de 1993, 187.
5 Recordem que el mateix Aristòtil considerava l'operació mental que passa del particular al general l'acte de coneixement per excel·lència; la *marca característica* de qualsevol activitat intel.lectual.
6 AT, VI, 21. L'èmfasi és meu.

2. Les lleis del mètode

No podem negar que quan Descartes escriu el *Discours de la Méthode* com introducció als tres apèndixos, la *Dioptrique*, les *Météors*, la *Géométrie* està fermament convençut que disposa d'un "mètode que li ha de permetre dirigir correctament la raó i indagar la veritat de les ciències". Un mètode que consagrarà la raó que, "per naturalesa, és igual en tots els homes",[7] "com a font de coneixement i criteri cert de veritat."[8] Descartes no pretén ensenyar-lo, i per això no escriu un *Traité*; només en vol parlar, raó per la qual en té prou amb elaborar un *Discours*.[9] Es tracta "d'aplicar [la raó] de forma correcta."[10] És a dir, per a Descartes el mètode esdevé equivalent a "correcció en l'aplicació de la raó":

> ... he aconseguit formar un mètode mitjançant el qual em sembla que és possible acréixer gradualment els *meus* coneixements i, a poc a poc, situar-los en el cim més alt que puguin assolir, tenint en compte no solament la mediocritat del meu enginy, sinó també la breu durada de la meva vida.[11]

És, doncs, indubtable que Descartes està fermament convençut que disposa d'un mètode que ha de ser útil per "acréixer el coneixement humà" quan s'aplica "correctament a les ciències" i, per tal de mostrar la potència del seu mètode i convecer-nos de la seva utilitat, l'aplica a tres ciències ben determinades: l'*astronomia*, l'*òptica* i la *geometria*. És doncs en aquestes aplicacions on podrem trobar les pistes del mètode cartesià.

És, però, la geometria dels clàssics la que li serveix de paradigma en l'aplicació del mètode.[12] Com diu Boutroux:

> ... per mètode entenem alhora el *mètode general o filosòfic*, objecte del *Discours de la Méthode*, i el *mètode matemàtic*, que és una aplicació particular, una especialització del mètode general i que, per a Descartes, es confon amb l'àlgebra.[13]

Aquesta aplicació particular mena a la *Géométrie*, la qual ensenya com l'"àlgebra nova" permet resoldre sistemàticament els problemes relatius a les magnituds i a les figures, i, "als ulls de Descartes, el que és essencial és la seguretat, la regularitat del mètode" i aquesta seguretat i regularitat del cas particular esdevenen característiques irrenunciables del mètode general.

És per totes aquestes raons que cal analitzar detingudament els tres apèndixos i veure si Descartes, aplicant el seu mètode, aconsegueix els objectius. Si bé és cert que existeixen excel·lents treballs sobre les *Regulae* i el *Discours de la Méthode*[14] el nostre propòsit és[15] veure com l'aplica a la *Géométrie* — "que és d'on ha sorgit"[16]—, i d'una manera molt particular intentar esbrinar el significat pregon del principi de l'"enumeració completa".[17]

---

[7] AT, VI, 2.
[8] Frondizi R. [1979], 11.
[9] AT, VI, 349: carta a Mersenne de mars de 1637. Vegeu també AT, I, 620, carta a Huygens.
[10] AT, VI, 2. Vegeu també Arnau-Gutiérrez [1986], 30, nota 12.
[11] AT, VI, 3.
[12] AT, X, regula IV, 373, 374-375, i AT, X, regula II, 364-365, 366.
[13] Boutroux, P. [1951], 816.
[14] Per exemple, Beck, L.J. [1952], Buchdahl, G. [1969], Gaukroger, S., ed. [1980], Clarke, D. M. [1982], edició castellana de 1986, 174-204; Martín Vide, C., ed. [1987], 821-906; Shea, W. R. [1991], edició castellana de 1993, 175-211.
[15] En aquesta anàlisi, deixem de banda els *Météors* i la *Dioptrique*.
[16] Pla, J. [1987], 833.
[17] El lector interessat pot llegir Beck, J. L. [1952], 111-189.

Per tal de comprendre el significat del quart principi és necessari repassar els tres principis que el precedeixen. Recordem els quatre principis que Descartes estableix en el *Discours de la Méthode* i que li han de servir "per descobrir veritats i no pas per defensar tesis ni tampoc per exposar teories",[18] els podem abreujar dient que el primer és una *exigència de claredat i distinció*, el segons imposa l'anàlisi geomètrica, i el tercer l'ordre. El darrer fa referència a la completesa de l'enumeració.[19] Són:

> **[Principi de l'evidència.]** "No s'ha d'admetre mai res com a vertader si no s'ha conegut evidentment com a vertader; és a dir, cal evitar amb tota cura la precipitació i la prevenció i, en els judicis, admetre solament allò que es presenta tan *clar* i *distint* a l'esperit que no hi ha cap raó per a dubtar-ne".[20]
>
> **[Principi de l'anàlisi.]** "Exigeix dividir cada una de les dificultats a examinar en tantes parts com sigui possible i necessari per resoldre-les amb facilitat".[21]
>
> **[Principi de la síntesi.]** "Exigeix conduir amb ordre les reflexions, començant pels objectes més simples i més fàcilment assequibles per pujar després, lentament, fins el coneixement dels més complexos, suposant fins i tot entre els que no precedeixen naturalment els uns amb els altres".[22]
>
> **[Principi de l'enumeració completa.]** "Cal efectuar un recompte tan complet i revisions tan àmplies com calgui per estar segurs de no deixar-nos res".[23]

Tot simplificant podem afirmar que el mètode, "que no és simplement intuïció-deducció, sinò l'ús correcte d'aquestes dues aptituts, que són les que garanteixen la veritat", consisteix, de fet, en les dues regles d'anàlisi-síntesi de Pappos.[24]

Si ens fixem en el principi quart, ens adonem de dos fets. D'una banda, Descartes empra dues expressions: "un recompte tan complet" i "revisions tan àmplies". Aquesta diferenciació és analitzada detalladament per Beck en el sentit que la primera fa referència a l'anàlisi —la baixada del problema a la intuïció— i el segon, a la pujada —dels elements copsats intuïtivament cap el resultat buscat, per deducció intuïtiva. I d'una altra, el seu caràcter eminentment *cautelar* del principi, una cautela que ve imposada per la desconfiança que ens mereix la *memòria*.[25]

3. El mètode aplicat a *La Géométrie*

L'única manera de comprendre com cal aplicar el mètode és copsar com l'aplica Descartes en els apèndixos. Nosaltres intentarem veure com l'aplica a la *Géométrie*, centrant-nos però en el principi quart —el principi del cas general. Ens adonarem que l'anomenat principi d'enumeració és molt més important del què normalment s'indica: és el que garanteix que el mètode sigui

---

18 García Morente, M. [1970], 16.

19 Beck, J. L. [1952].

20 AT, VI, 18. Descartes parla en primera persona perquè parla del seu mètode que no pretén pas imposar a ningú. Vegeu Granada, M. A. [1984], 16, nota 23.

21 AT, VI, 18. Vegeu AT, X, 380 i segs. i 430 i segs: regulae V i XIII, i Pla, J. [1987], 829-831.

22 AT, VI, 18-19, AT, X, 379, regula V. També AT, X, 408, regula XI, i Pla, J. [1987], 832, nota 53.

23 AT, VI, 19. AT, X, 387, regula VII. També AT, X, 407, regula XI, Beck, L.J. [1952], 111-126, i Pla, J. [1987], 832.

24 Pla, J. [1987], 830, nota 51.

25 Beck, J. L. [1952], 114-118. Això no obstant, no podem oblidar les paraules de Leibniz quan, amb tota la raó del món, es queixa del fet que "els que ens proporcionen mètodes, ens acostumen a donar preceptes esplèndits, però gairebé mai no ens diuen com els hem d'aplicar". Carta a Galloys de 1677 a Coutourat, L. [1903], 94-95.

vertaderament un mètode científic, en tant que és el que es preocupa d'analitzar si, relament, estem tractatant el problema amb tota la seva generalitat.[26]

Seguint més d'aprop la *Géométrie*, podrem mostrar quin és el significat que realment hem d'atribuir al principi quart. Per aconseguir-ho, observarem què és el que realment fa i diu Descartes a la *Géométrie*. El text comença amb les paraules:

> Tots els problemes de geometria es poden reduir a termes tals que, per construir-los, solament calgui conèixer la longitud d'algunes línies rectes.[27]

L'anàlisi el porta a les línies rectes —als segments rectilinis— que són *clares* i *distintes*. Però curiosament, a la *Géométrie*, no hi ha cap anàlisi concreta. És a dir, no s'efectua cap enumeració de les dificultats, concatenant-les desde la dificultat del problema plantejat fins a les rectes clares i intuïtives mitjançant passos també clars i intuïtius. Quan aplica el mètode d' "anàlisi-síntesi-enumeració" ho fa amb les paraules següents:

> Si volem resoldre un problema, l'hem de suposar inicialment resolt i hem de *donar nom* a totes les línies que *semblen necessàries per construir-lo*, tant a aquelles que són conegudes com a les que són desconegudes.[28]

L'anàlisi es basa, doncs, en el fet de suposar que "el problema està resolt" i porta de cop, sense que sapiguem com, a les línies. I

> a continuació, sense distingir les línies que són conegudes de les que són desconegudes, hem de desxifrar el problema seguint l'ordre que mostri de forma més natural les relacions que hi ha entre aquestes línies, fins a trobar la manera d'expressar una mateixa quantitat de dues formes; això és el que s'anomena *equació*.[29]

> Aquesta és l'aplicació del principi de la síntesi. La síntesi ha de seguir un "ordre", però difícilment pot ser el que hem seguit a l'anàlisi, si l'anàlisi, com ja hem indicat abans, no proporciona cap mena d'enumeració. Això fa del tot impossible que l'anàlisi sigui la lectura cap amunt de l'anàlisi com a lectura cap avall.[30]

---

[26] Vull manifestar el meu acord més absolut amb les paraules de Vuillemin, *Mathématiques et metaphy-sique chez Descartes*, §18. La quatrième règle du *Descartes* comme réflexion sur la méthode:

Aquesta regla és en general interpretada com equivalent a l'enumeració de totes les variables del problema; però, si fos així, seria redundant amb les precedents. ...Quan suposo el problema dividit en tantes parts com calen, l'enumeració queda ben establerta. La regla quarta deixa de ser redundant solament si, en lloc de concebre-la en el mateix pla que les altres tres i d'atribuir-li conseqüentment el govern dels problemes particulars, la mirem com un *principi reflexiu i regulador*, que s'aplica al propi mètode i no pas als problemes concrets, i que estableix un judici sobre la seva generalitat i la seva simplicitat. [L'èmfasi és meu.]

[27] AT, VI, 369. Fixem-nos que, ja des del començament, Descartes posa l'èmfasi en dos fets. Els problemes de geometria *cal construir-los* i, per fer-ho, *solament cal conèixer algunes rectes*. Segons diu Descartes, "no trobava res que fos més *simple* i que es presentés més *distintament* davant la meva imaginació i sentits" que les "línies rectes" [AT, VI, 20]. Recordem que, al *Discours de la Méthode*, Descartes parla en primera persona. [Els èmfasis són meus.]

[28] AT, VI, 372.

[29] AT, VI, 372, i Pla, J. [1987], 841-842.

[30] Fixem-nos detingudament en les paraules de Descartes i apliquem-les a la construcció —l'existència, en la mentalitat grega— del pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 1. 1) Suposem-lo ja construït, sense preocupar-nos de moment de com ho hem aconseguit. 2) Donem nom al radi, al costat, a la diagonal, a l'apotegma, etc. En definitiva, a les "línies rectes que són necessàries per poder-lo construir". A partir d'aquí, 3) "seguint l'ordre que mostri de forma més natural les relacions de les línies", elaborem una equació que, un cop resolta, ens dongui la longitud del costat. Aleshores és quan, realment, 4) sabrem com es construeix un pentàgon.

Sembla com si hi hagués un cercle viciós, però no és pas així perquè hi ha un canvi de llenguatge. L'anàlisi es basa en la consideració geomètrica del problema, ja resolt, i en el fet de donar nom —assignar nombres— als segments. Això obre la porta al canvi de llenguatge. Permet introduir el llenguatge aritmèticoalgèbric —l'àlgebra— i relacionar aquests nombres fins aconseguir una equació. Fixem-nos que el mateix Descartes, en enunciar aquest procés, diu "seguint l'ordre que mostri de forma més natural les relacions de les línies", un fet que no caldria pas remarcar si aquest "ordre" fos l'invers del que s'havia seguit a l'anàlisi. A l'anàlisi no s'ha seguit cap ordre, però a la síntesi cal seguir un cert ordre. És cert que l'anàlisi ens ha de dir "quines són les línies que semblen neces-sàries per construir-lo". Però novament hi ha una ambigüitat: el problema ja està resolt mentalment i, per tant, no és massa clar quines són les ínies més necessàries per construir-lo. L'anàlisi no aclareix de forma definitiva quines són aquestes línies, atès que ens parla "de les que semblin més idònies per construir-lo". L'ambigüitat és força notable. Finalment, la resolució del problema geomètric —ja resolt— depén de la "naturalesa" d'una equació algèbrica i, de retruc, de la "possibilitat" i de la "forma" de resoldre-la.

És en aquest context, i no en cap altre, on cal dotar de contingut el principi de l'enumeració completa, i ho farem atenent una de les moltes situacions concretes que Descartes posa de manifest molt clarament a *la Géométrie.*

4. El principi quart a *La Géométrie*

Situem-nos, doncs, en aquesta perspectiva *positiva,* que consisteix a acceptar que Descartes té un mètode —o bé, si ho preferiu, que *pensa* que té un mètode— i que creu que és bo per ser aplicat per la raó humana per assolir un *coneixement vertader* en l'àmbit de les ciències. I situem-nos a *la Géométrie* que, per tot el que hem dit, és l'*Essai* que més clarament mostra la utilització del mètode i, en particular, del principi quart, que és el que desitgem aprofundir. Situem-nos en el convenciment que el principi quart no pot ser de cap manera un repàs sistemàtic del fet que, en efectuar la síntesi, hem realitzat tots els punts de l'anàlisi, perquè això el convertiria, en paraules de Vuillemin, en redundant. Intentem veure la qualitat de *criteri general* que, *per enumeració completa,* obté el *cas general* a partir del cas particular. I, en definitiva, que és precisament el principi quart el que proporciona al mètode cartesià, si més no en *la Géometrie*, el caràcter de *mètode científic.*

Per aconseguir-ho repasem el problema de Pappos i analitzem perquè li calia detallar-lo tan íntimament.[31] No obstant, convé recordar que Descartes escriu *la Géométrie* entenent que el que cal és "construir les solucions".[32] La seva pretensió no és doncs, malgrat el contingut d'una bona part del Llibre III, elaborar un text d'àlgebra. Descartes usa l'àlgebra com una eina útil —fins i tot indispensable i còmode— per poder *comprendre millor la naturalesa* de certes solucions geomètriques, però desconfia d'ella perquè és "opaca".[33] Això és el que el porta una vegada i una altra a *retornar a la geometria,* a insistir en la necessitat de *construir les solucions,* a introduir *ginys* que li permetin construir les solucions geomètriques, tant si són cor-

[31] Hi ha d'altres problemes que també posen de manifest la utilització del principi quart en el sentit que defenso. Són: *la classificació de les còniques, la resolució amb regle i compàs, la naturalesa geomètrica de la solució de la cúbica i de la quàrtica i, finalment, la resolució geomètrica general de les equacions poli-nòmiques amb una incògnita.*

[32] Vuillemin, J. [1960], edició de 1987, 77-141, Bos, H. J. M. [1981], Pla, J. [1987], 833-856.

[33] AT, VI, 20.

bes —llocs—, com si són solucions de polinomis —punts. Que això és així no cal argumentar-ho més. La lectura atenta de la Géométrie ho posa de manifest de forma clara. Malgrat tot, potser fóra bo recordar que Descartes anomena *geomètriques* les corbes que són acceptables en geometria i que són "les que tenen necessàriament alguna relació amb tots els punts d'una línia recta i aquesta relació pot ser expressada per una *equació* vàlida per a tots els punts".[34] Són, en definitiva, les corbes que poden ser expressades per mitjà d'*expressions algèbriques* —és a dir, la seva naturalesa és eminentment *algèbrica*, com posarà de manifest molt encertadament Leibniz. És a dir, són corbes algèbriques, corbes que cauen sota del domini de l'àlgebra, però Descartes, sempre procupat per mantenir-se en l'àmbit geomètric del problema, les anomena, com ja hem dit, geomètriques; és a dir, per a ell són les úniques corbes que cauen sota el domini de la geometria.

El problema de Pappos. Aquest és, potser, el problema que millor ens permetrà entendre el què vull deixar clar. A més, és el pal de paller de tota *la Géométrie*. Descartes, després de recordar el problema en els termes amb què l'enuncià Pappos, descriu el problema de les *2n-1, 2n rectes*, amb aquestes paraules:

> Donades tres, quatre o *més* línies rectes en posició, *volem trobar* en primer lloc *un punt* des del qual sigui possible fer una línia recta a cada una de les línies donades, formant amb elles angles donats i de manera que el rectangle de dues d'elles guardi una proporció donada amb el quadrat de la tercera; o, si n'hi ha quatre, que el rectangle format format per dues d'elles la tingui amb el rectangle format per les altres dues; o, si n'hi ha cinc, que el paral·lelepípede format per tres d'elles la tingui amb el que formen les altres dues i un segment donat; o, si n'hi ha sis, que el paral·lelepípede format per tres d'elles la tingui amb el paral·lelepípede format per les altres tres; o, si n'hi ha set, que el producte que s'obté amb quatre d'elles la tingui amb el producte que s'obté amb les altres tres i un segment donat; o, si n'hi ha vuit, que el producte que s'obté amb quatre d'elles la tingui amb el producte que s'obté amb les altres quatre. El problema el podem *fer extesiu al nombre de línies rectes que vulguem*. Tot seguit, i donat que existeixen *infinits punts* que poden complir-ho, cal *conèixer* i *dibuixar* la línia on es troben tots ells.[35]

De fet, Descartes planteja *tres problemes*: trobar *un* punt, trobar *tots* els punts, i *dibuixar* —construir geomètricament—la corba que formen.

Anàlisi del problema de Pappos en La Géometrie de Descartes. Descartes suposa que el problema està resolt i agafa un dels punts de la corba solució del problema. Ens trobem, d'entrada, amb un fet curiós: Descartes està convençut que la solució no és única; més exactament, "hi ha infinites solucions". Aquest convenciment pot ser fruit de l'anàlisi del problema, però l'autor no ens fa pas partíceps d'aquesta anàlisi.[36] Cal indicar que, en general, Descartes no pot pas suposar que el problema està resolt en tota la seva generalitat; és a dir, ***no pot pas suposar que coneix la corba solució*** i, per aquesta raó, no pot pas recórrer a les seves propietats. Això per dues raons: en primer lloc, perquè fins que hagi efectuat la síntesi, que el col·loca en l'àmbit de l'àlgebra, desconeix la naturalesa de la corba.[37] I en segon lloc, perquè d'antuvi *no disposa* de cap mètode per representar-la —és a dir, per conèixer-la geomètricament. Ens trobem, doncs, en una situació complexa i gairebé contradictòria: suposar resolt un problema que no sabem quina solució té ni algèbricament, ni geomètricament.

---

[34] AT, VI, 392. Pla, J. [1987], 853, nota 133.

[35] AT, VI, 379-380. [L'èmfasi és meu.]

[36] També pot ser degut al fet que Descartes savia que els grecs havien trobat o intuït que, en certs casos, la solució és una *cònica*. És a dir, una corba, o lloc sòlid.

[37] La naturalesa de la corba ens la dóna el *gènere* i el gènere està íntimament lligat amb l'equació.

Un cop ha suposat que el problema està resolt i ha seleccionat un punt P del lloc, l'anàlisi li permet de considerar les línies rectes conegudes i desconegudes "que són rellevants per a la seva resolució". La síntesi —que efectua fent servir el *teorema dels sinus* dels triangles i que aplica a triangles *ben determinats*— el porta a l'equació algèbrica que ha de satisfer el punt $P=(x,y)$. Però Descartes es troba en una situació absolutament particular: *la seva síntesi depèn d'un dibuix particular*; és a dir, la síntesi depèn del punt particular P que ha triat, i que depèn d'un dibuix particular.[38] Una situació del tot inconvenient, si el que cerca és l'estudi del problema en tota la seva generalitat.

La síntesi fóra del tot incompleta, atès que la síntesi no és pas el retorn de l'anàlisi. Cal que la síntesi contempli *totes les possibilitats* que l'anàlisi suggereix. És a dir, ha de respondre a *tots els punts possibles del lloc*. No s'hi val a deixar-ne cap al tinter. Això, i no cap altra cosa, és el que obliga Descartes a ser *absolutament circumspecte*. És aquesta circumspecció el que el porta a l'*enumareció completa* dels casos possibles, que la figura *particular* en la que ha basat l'anàlisi no conté en absolut. Ens trobem amb expressions com ara:

> Aleshores la recta *CR* serà $y+bx/z$, a causa que el punt *B* [de la figura] es troba entre *C* i *R*; ara bé, si R es trobés entre *C* i *R CR* fóra $y-bx/z$.[39]

I així, Descartes aconsegueix que, en l'exemple *concret* de les tres i les quatre rectes que *mira com a general*, la solució sigui l'equació de segon grau *general*.

L'estudi de les equacions de segon grau amb dues incògnites. L'enumeració completa, en el cas de les tres i les quatre rectes,[40] l'ha dut a l'equació

$$Ax2+2Bxy+Cy2+2Dx+2Ey+F=0. \ (1)$$

El punt *P pot prendre posicions diverses* que alteren els coeficients de l'equació (1) en quantitat i en signe, però que no alteren, en absolut, la *naturalesa* de les corbes. I, per aquesta raó, s'obtenen "totes les equacions de segon grau possibles".[41] No hi ha cap raó aparent per la qual alguna equació de segon grau pugui quedar exclosa. Això permet a Descartes establir un *teorema general*:

> I, com que la posició de les línies que hom dóna pot variar de totes les formes imaginables i, en conseqüència, s'introduiexen modificacions en els valors de les quantitats conegudes així com en els signes + i – de l'equació de totes les formes imaginables, és *evident que no hi ha cap línia corba de primer gènere que no sigui útil per aquest problema*, quan es planteja relativament a les quatre rectes.[42]

Aquest teorema esdevé general —no en tenim cap mena de dubte— perquè s'ha aplicat amb tota mena de cura i rigor el *principi d'enumeració*, o de *circumspecció*.

L'estudi del cas general. El problema de les $2n$ rectes és, en Descartes, un problema que es planteja en el pla. Cal cercar els punts P del pla que, donades $2n$ rectes $r1, r2, ..., rn, rn+1$,

[38] Curiosament ensopega amb un dels esculls de la geometria grega: la dependència de la figura.
[39] AT VI, 383. Una lectura completa d'aquesta pàgina ens ofereix l'enumeració completa del cas de les tres i les quatre rectes.
[40] En endavant, ens referirem solament al cas de les $2n$ rectes, entenent que, si només n'hi ha $2n-1$, una recta està donada prèviament, tal com indica Descartes a la *Géométrie*.
[41] AT VI, 385 i, en particular, 397.
[42] AT VI, 397.

rn+2,...,r2n i *2n* angles *a1, a2, ..., an, an+1, an+2, ..., a2n* compleixen, la següent llei aritmètica:

$$d1 \,.\, d2 \,.\, \ldots \,.\, dn = k \,.\, dn+1 \,.\, dn+2 \,.\, \ldots \,.\, d2n \,.$$

El problema s'escapa del món de la geometria —on deixaria de tenir sentit, "atès que, en geometria, res no pot superar la dimensió tres"—i passa al domini de l'àlgebra, on té sentit, encara que sigui "òpac".[43] Ara, com abans, donat que el punt *P* pot prendre múltiples posicions, aquestes posicions *enumerades, sense excepcions*, produeixen alteracions en els coeficients i en els signes, però no en l'ordre de la corba. Com diu *la Géométrie*:

> Ni tampoc cap de segon ordre que no ens proporcioni una solució quan el problema s'ha plantejat per a vuit rectes; ni cap de tercer ordre, quan s'ha plantejat per a dotze, i així pels altres casos. De manera que no hi ha cap línia corba de la qual hom pugui aconseguir-ne l'equació i, per tant, hagi de ser acceptada en Geometria, que no sigui útil en la resolució d'algun problema de les 2n rectes.[44]

I aquí *Descartes s'equivoca*.[45] Per què? Creiem que dues són les raons que el porten a aquest error: a) *Cal que totes les corbes geomètrqiues tinguin significat geomètric* i el problema de les *2n* rectes proporciona perfectament el significat geomètric. És, doncs, un error que, d'alguna manera, dóna sentit a *la Géométrie* i, per tant, un error que no provoca cap malestar en Descartes; i b) *l'enumeració completa està absolutament desvinculada dels principis d'anàlisi-síntesi*, atès que *no hi ha cap anàlisi geomètrica real* dels problemes de les *2n* rectes, quan *n* ≥ *3*. De fet, *només hi ha síntesi.* La síntesi ve condicionada per la consideració d'*enumerar totes les possibilitats*, sense saber quines són realment aquestes possibilitats. Ara bé, si hem de considerar totes les possibilitats no sembla que se'ns pugui esmunyir cap equació. A la meva manera entendre, aquest raonament és completament coherent amb la *formulació i desenvolupament dels principis del mètode* que Descartes estableix al Llibre II en el sentit esmentat al §2. Però, d'altra banda, és excessiu: l'enumeració completa, entesa com a cas general, no està pas justificada per l'anàlisi detallada del problema i, per tant, introdueix elements de distorsió.[46]

5. Conclusió

En definitiva, doncs, l'estudi detallat d'alguns dels resultats de *la Géométrie* solament els podem entendre, i solament són coherents amb l'obra de Descartes, si acceptem que la quarta regla del mètode garanteix el seu caràcter científic i permet passar del cas particular, on realitzem la síntesi algèbrica, al cas general, que s'expressa també en el llenguatge de la síntesi, l'àlgebra. Això confereix a l'àlgebra un estatus que va més lluny que el d'una simple eina auxiliar. Esdevé fonamental per poder fer aquesta transposició i molt més encara si tenim en compte que l'anàlisi geomètrica, absolutament ausent, difícilment hauria permès aquest tipus de generalitzacions que els matemàtics grecs no podien fer, i ni tan solament intuir. És una de les conquestes indiscutibles de Descartes, aquest matemàtic i filòsof paradigmàtic, i contradictori, en el món de la recerca científica.

---

[43] Descartes hauria hagut d'estar més amatent a aquesta opacitat, abans de formular lleis absolutament generals.
[45] AT VI, 397.
[45] Vegeu Bos, H. J. M. [1981], 302, i l'apèndix.
[46] En defensa de Descartes hem de dir, tanmateix ,que el cas concret de les cinc rectes que analitza més endavant el porta a una cúbica-quadràtica que és geomètrica perquè és *construible* amb un giny "tan rigorós com el regle i el compàs". Això no obstant, Descartes havia d'haver sigut més cautelós, atès que aquest cas és massa concret i no permet, en absolut, fer una extensió al cas general sense més consideracions.

BIBLIOGRAFIA

ADAM, Charles; TANNERY, Paul: *Oeuvres de Descartes*, tretze volums. París, 1887-1913. Reeditats per Vrin. París, 1964-1974, i 1996.

ARANAU, H.; GUTIÉRREZ, J. M.: *Discurso del método*. Alhambra. Madrid, 1986.

BAILLET, Adrien: *La Vie de Monsieur Des-Cartes*, dos volums. París, 1961. Facsímil. Ginebra, 1970.

BECK, L. J.: *The Methode of Descartes. A Study of Regulae*. Clarendon. Oxford, 1952.

BOS, H. J. M.: "On the represetation of Curves in Descartes' "Géométrie"." *Archives of History of Exact Sciences*, 24, 295-338.

BOUTROUX, Pierre: "La signification historique de la "Géométrie" de Descartes". *Revue de Méta-physique et Morale*, 27, 814-827.

BUCHDAHL, Gerd: *Metaphisics and Philosophy of Science*. Blackwell. Oxford, 1969.

CLARKE, Desmond M.: *Descartes' Philosophy of Science*. Manchester University Press. Traducció castellana de Eloy Rada. Alianza Editorial. Madrid, 1986.

COUTURAT, L.: *Opuscles et fragments inédits de Leibniz*. Alcan. París, 1903.

VER EECKE, Paul: *Pappus d'Alexandrie*, 2 volums. Albert Blanchard. París, 1982.

FRONDIZI, Risieri: *Discurso del método*. Alianza Editorial. Madrid, 1979.

GARCÍA MORENTE, Manuel: *Discurso del método*. Espasa Calpe. Madrid, 1970.

GRANADA, Miguel A.: *Discurso del método*. Planeta. Barcelona, 1984.

GRAUKROGER, S.: *Descartes. Philosophy, Mathematics and Physics*. The Harver Press. Sussex, 1980.

MARTÍN VIDE, Carlos (ED.): "Simposi: 350 aniversari del "Discours de la Méthode" de Descartes". *Actes del III Congrés de Llenguatges Naturals i Llenguatges Formals. Barcelona*, 1987.

PLA-CARRERA, Josep: "La "Géométrie" com un exemple de "la Méthode" de René Descartes". *Actes del III Congrés de Llengutages Naturals i Llenguatges formals. Barcelona*, 1987.

SHEA, William R.: *The Magic of Numbers & Motion: The Scientific Career of René Descartes*. Watson Publishing International. Montreal, 1991. Versió castellana de Juan Pedro Campos. Alianza Editorial. Madrid, 1993.

VIÈTE, François: *In artem analyticam Isagoge*. París, 1591. Zeteticorum Libri Quinque. París, 1593.

VUILLEMIN, Jules: *Mathématiques et Méthaphysique chez Descartes*. PUF. París, 1960.