LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE CARTÉSIENNE DU POINT DE VUE REPRÉSENTATIONNEL[1]

Andoni Ibarra
(Université du Pays Basque)

Les objectifs de Descartes dans la *Géométrie* sont, d'abord, de déterminer avec exactitude la nature des courbes engendrées par les problèmes des *loci* (analogues aux *ensembles de points*, dans le langage actuel) linéaires ou supersolides et, ensuite, de généraliser à un nombre de lignes quelconque la méthode utilisée, sans prendre en considération les restrictions imposées par les "dimensions" des produits des lignes concernées. La stratégie prend comme point de départ la singularisation de deux lignes quelconques du problème, l'une de longueur connue et l'autre de longueur indeterminée, pour mettre ensuite en relation les autres lignes avec ces deux *lignes principales*. De manière caractéristique Descartes montre comment construire des équations pour les lignes indeterminées, de sorte que leurs longueurs respectives puissent être déterminées par les racines de ces équations et il signale une étroite corrélation entre le nombre de lignes du problème, le degré de l'équation de la courbe qui contient les points (le degré d'une équation est déterminé par son exposant le plus haut) et le degré de la courbe correspondante (Vuillemin 1960, 108ss). Ainsi, si nous avons trois, quatre ou cinq lignes (non parallèles) dans un problème déterminé, nous pouvons exprimer la valeur de la ligne indéterminée au moyen d'une équation quadratique (de second degré); le *locus* est alors du premier genre (c'est à dire, cercles, paraboles, hyperboles et ellipses) et il peut être construit avec des moyens élémentaires, avec utilisation de la règle et du compas. Si dans un problème coïncident six, sept, huit ou neuf lignes, alors l'équation sera du troisième ou du quatrième degré et le *locus* correspondant appartiendra au deuxième genre de courbes; ce *locus* peut être construit au moyen de sections coniques, c'est-à-dire, au moyen des courbes d'un genre inférieur. Et ainsi *ad infinitum*.

Ainsi, Descartes peut réduire les problèmes d'une classe déterminée à un type unique de problèmes. Cette stratégie réductrice, avec la solution constructive qui lui est associée, peut être généralisée pour résoudre les problèmes sous la condition nécessaire de suivre le même ordre dans la construction de problèmes de plus en plus complexes. De façon paradigmatique, on peut alors traiter le classement des courbes en faisant appel à la réduction d'un type de problèmes à un autre. En géométrie on ne prend en considération que les courbes qui remplissent le "critère cinématique", critère qui, tenant compte de la "nature" des courbes, distingue les courbes géométriques (celles qui peuvent être décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs mouvements ordonnés de telle sorte que les postérieurs soient réglés par ceux qui les précédent, Descartes 1637: II,316) des courbes mécaniques, inadmissibles dans la réflexion géométrique. Et c'est justement en analysant de manière systématique la "nature" des problèmes (*pace* Grosholz, Grosholz 1991) que l'on peut énoncer formellement que le caractère des problèmes géométriques "se réduit à un même genre de problème qui est de chercher la valeur des racines de quelque équation" (Descartes 1637: III, 411). Ces racines représentent des lignes, des segments, qui peuvent être réellement tracés; les longueurs des segments déterminent les distances entre les points et les "lignes principales" et de cette manière singularisent le graphe de la courbe qui contient tous les points importants. Ce tracé appartient authentiquement au

[1] Ce travail fait partie des projets de recherche UPV003.230-HA189/95 et PI95/83 du Gouvernement Basque. Je remercie MM. T. Camps et M. Corcóstegui pour leur collaboration dans la préparation en français de ce texte.

programme constructif énoncé de façon caractéristique par Descartes dans la premier paragraphe de la *Géométrie*:

> Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

Le cadre qui rend plausible le programme est le principe d'homogénéité, c'est-à-dire, la nécessité de pouvoir traiter tous les composants d'un problème dans le même registre.

La stratégie algébriste concernant les objets de la géométrie permet de raisonner de *manière subrogatoire* sur les opérations et combinaisons géométriques au moyen des operations corrélatives et des combinaisons de l'analyse algébrique. Cette attitude du raisonnement cartésien a été habituellement interprétée dans un canon réductiviste: (A) on ne peut penser géométriquement que ce qui est réduisible à l'algèbre.[2] Il y a deux interprétations du canon, établies habituellement par les marques "arithmétisation de la géométrie" et "géométrisation de l'arithmétique" (cfr. Mancosu 1992). Les deux marques ne sont divergentes qu'en apparence. De fait leur complémentarité traduit la nature typiquement *représentationnelle* de la structure de base sous-jacente à *l'écriture* de la géométrie analytique cartésienne, l'interpénétration de l'algèbre et de la géométrie qui a permis la naissance des théories mathématiques modernes d'analyse, l'algèbre et la géométrie différentielle. L'idée de la représentation méthodique des configurations spatiales grâce à des relations algébriques n'est pas nouvelle —programme de Viète: représenter l'extension grâce à la mesure en accord avec une règle bien déterminée. Cependant chez Descartes l'attitude ne se réduit pas à l'application d'une innovation technique mais elle incorpore essentiellement une nouvelle conceptualisation des objets et des catégories de l'activité mathématique théorique. Les catégories ontologiques traditionelles de la géométrie ne sont pas déterminées par la théorie mais dépendent de ses représentations algébriques. De là l'abandon du principe d'homogénéité qui lie terme à terme les éléments d'une expression algébrique et leurs opérations correspondantes avec des grandeurs géométriques et les opérations intuitives dans l'espace corrélatives. L'abandon de ce principe libère l'algèbre des constrictions imposées par l'intuition de l'espace, de sorte que dans le domaine de l'algèbre il n'est pas le simple reflet spéculaire de celui de la géométrie mais un *medium* représentationnel pour ce dernier domaine: toutes les opérations algébriques systématisées par Descartes dans ce *medium* de re-présentation sont des représentants potentiels de propriétés identifiables dans le domaine de la géométrie. La corrélation entre les deux domaines n'est pas spéculaire, terme à terme, mais représentationnelle, établissant le corrélation de manière structurale entre les objets spécifiques construits comme des systèmes liés (Grosholz 1991). La condition requise pour que la métrique induite par la composition algébrique puisse être mise en relation avec le calcul opératoire des grandeurs géométriques c'est qu'il ait une relation déterminée permanente et régulière entre les deux domaines: une relation conservatrice de structure. Une telle relation est *l'ordre* qu'il faut maintenir en résolvant les systèmes d'équation: uniquement si l'ordre se maintient dans son domaine les résultats obtenus dans cette résolution des équations pourront

---

[2] Il convient de faire la différence entre les deux usages du concept de réduction. En mathématiques il est commun de traiter les problèmes "en les réduisant"; ainsi, par exemple, dans la topologie algébrique on opère avec des espaces (variétés) courbes comme s'ils étaient localement (non globalement) réduits à des plans, espaces euclidiens. La réduction de la géométrie à l'algèbre, comme une sorte de processus de généralisation qui représente le plan euclidien, ou l'espace E^2 ou E^3 au moyen du domaine algébrique de vecteurs bi ou tridimentionnels, fait référence à ce sens là. L'affirmation (A), cependant, est réductiviste dans un sens restrictif.

être significatifs. Ainsi, les différences dimensionnelles exprimées par les exposants (x2, x3, xn) ne sont plus interprétées comme des différences significatives perceptibles (p. ex. entre un carré 2-dimensionnel et un cube 3-dimensionnel) mais comme des positions dans un ordre continu de ratios. De même, pour chaque problème on choisit de manière conventionnelle une ligne-segment comme unité de mesure.

Dans (Ibarra/Mormann 1997) nous avons essayé de caractériser les théories en tant qu'applications conservatrices de structure ce qui peut contribuer à généraliser le format décrit pour la théorie cartésienne des courbes[3]. Soit deux systèmes relationnels, *G* et *A*, avec des ensembles bases géométrique et algébrique respectivement. Nous pouvons établir une application conservatrice de structure *r* entre eux telle que *r*: *G* -------> *A*. La distinction entre les courbes géométriques et les courbes mécaniques ne s'établit pas maintenant de manière contingente sur les difficultés du genre opérationaliste suscitées par l'emploi de la règle et du compas, mais sur une base de nature objective. Il s'ensuit l'engendrement des courbes géométriques de manière naturelle par l'attribution d'un genre géométrique à chaque degré de complexité algébrique de la manière indiquée plus haut. Cela signifie que, si *f* est une relation de transformation du degré entre les courbes *x* et *y*, et *g* est la relation algébrique d'ordre associée, l'application *r* doit vérifier alors la condition *r(xfy)=r(x)gr(y)*.

La structure de la géométrie analytique cartésienne peut être associée à la terne <*A,r,G*>. La reconstruction représentationnelle de la théorie des courbes comme une telle terne <*A,r,G*> révèle dans quel sens précis il faut l'entendre, comme une explication de la différente nature des courbes. La reconstruction de la géométrie analytique grâce à l'application *r*: *G* ----> *Pot (A)* montre que dans ce cas la géométrie analytique peut être considérée comme une théorie représentationnelle du système relationnel de la géométrie des courbes dans le sens que *r* représente les grandeurs (ou mesures) *g*, géométriques, au moyen de modèles *r(g)* qui sont des ensembles de combinaisons algébriques, quantités dont les racines sont les segments à tracer à partir de points situés à des distances déterminées des "lignes principales", et les relations entre les *g* sont représentées au moyen des relations entre ses modèles algébriques *r(g)*. L'ensemble de points ainsi déterminés est le *locus* d'une courbe. La transcription de l'équation abstraite en une configuration géométrique est la construction recherchée, la preuve, dans nos termes représentationalistes, du théorème de la représentation. De manière équivalente, la sélection discrétionnaire des "lignes principales" et de l'unité de mesure permet l'introduction de représentations arbitraires: la grandeur d'une racine construite ne singularise pas de manière unique la racine parce que la mesure de la grandeur est relative aux sélections conventionnelles. De plus, la même équation (de degré 1) a plus d'une racine; une racine n'induit pas unicité, elle normalise de fait une sous-classe de racines de même longueur, c'est à dire, relative aux conventions initiales. Les problèmes suscités sont en relation, dans notre terminologie, avec la preuve du théorème d'unicité, qui montre le caractère non arbitraire de la représentation. Le format général pour une interprétation représentationnelle de la géométrie analytique permet à celle-ci de se libérer de la préoccupation cartésienne de la constructibilité et de la considérer comme une théorie géométrique abstraite, non dépendente de la constriction de l'espace intuitif. Cela revient, dans le format représentationnel présenté, à rechercher quelles sont les conditions structurales géométriques que doit satisfaire un ensemble de données métriques pour être interprétée comme un système représenté par l'application *r*: certaines formules algébriques ne

[3] En négligeant sa stratégie, toujours caractéristique du souci constructif cartésien, de dissocier les inconnues pour construire les grandeurs.

se correspondent pas avec des figures constructibles parce qu'elles ne remplissent pas la condition de la continuité cinématique; d'autres formules ont seulement des racines imaginaires non transposables à l'espace cartésien. Inversement, certaines figures consignables dans cet espace ne sont que fictives parce qu'elles ne peuvent pas être engendrée à partir d'équations algébriques appropiées (c'est-à-dire d'exposants uniquement rationnels).

Les structures algébriques permettent de cette façon la réalisation du raisonnement subrogatoire des objets géométriques, inférences transportées des propriétés des systèmes d'équations aux figures de la géométrie. Ainsi, les problèmes géométriques, représentables comme des combinaisons algébriques, sont susceptibles d'être résolues à travers elles. Comme nous avons essayé de le montrer, cela n'équivaut pas à soutenir une image réductive de l'activité représentationnelle. Cela ne veut pas dire la réduction de l'extension à la mesure, de la géométrie à l'algèbre, mais, de même que dans toute pratique représentationnelle on reconstruit le domaine même de la représentation des objets, cela veut dire une nouvelle reconstruction du concept de la géométrie au moyen de la mesure.

L'évocation de cette possibilité doit être bien comprise: les différents concepts de la réalité que fixent les théories ne doivent pas être interprétées, en effet, comme une preuve immanente de l'arbitraire d'un conventionnalisme plus ou moins radical, mais comme des représentations possibles *de* cette réalité qui *constituent* des aspects divers d'elle-même et justifient ainsi l'application de la théorie de la structure la plus riche à la structure la plus pauvre. La compréhension du mécanisme de cette constitution exige un moment postérieur de réflexion.

BIBLIOGRAPHIE

DESCARTES, R.: 1637, *Essais philosophiques, Dioptriques, Météores, Géométrie*, ed. de S. Latham, N. York, Dover, 1994.

GROSHOLZ, E., 1991, *Cartesian Method and the Problem of Reduction*, Oxford, Clarendon Press.

IBARRA A., MORMANN T.: 1997, "Theories as Representations", in A. Ibarra, T. Mormann (eds.), *Representations of Scientific Rationality, Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and Humanities* vol. 57, Amsterdam/Atlanta, Rodopi.

MANCOSU, P: 1992, "Descartes's Géométrie and Revolutions in Mathematics", in D. Gillies (ed), *Revolutions in Mathematics*, Oxford, Oxford Univ. Press, 83-116.

VUILLEMIN, J.: 1960, *Mathématique et métaphysique chez Descartes*, Paris, P.U.F.