DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA CUANTITATIVA

Facultade de CC. Económicas e Empresariais
Rúa Burgo das Nacións
15782 Santiago de Compostela
Tel. 981563100 ext. 11643· Correo electrónico: ecsec@usc.es

TOPOLOGÍAS EN ESPACIOS DE MATRICES Y SISTEMAS LEONTIEF Y LEONTIEF-SRAFFA

XOSÉ LUIS QUIÑOÁ LÓPEZ[1]

Catedrático de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

[1] Departamento de Economía Cuantitativa, Universidad de Santiago de Compostela, C/ Burgo das Nacións, s/n, Santiago de Compostela, joseluis.quinoa@usc.es, telf. 00 34 8818 11516

Resumen

Se demuestra que todo sistema tipo Leontief (o Leontief-Sraffa) puede ser transformado en uno estructuralmente equivalente en el que la matriz tecnológica A tenga la propiedad de que la suma de los elementos de cada columna sea el autovalor máximo $\bar{a}$ de A; lo que equivale a transformar las unidades físicas originales en unidades que (haciendo abstracción de la componente trabajo) tengan idéntica composición de capital. A un tal sistema transformado lo denominaremos *homogeneizado*.

En este tipo de sistemas aparecen más cómodos los estudios del sistema de precios de Sraffa, la limitación del tipo de beneficio, el reparto del excedente, la interpretación económica de $(I - A)^{-1}$, la interpretación de los precios utilizando el teorema del punto fijo, la evolución de los precios al variar el tipo de beneficio, etc. Se demuestra que en un sistema homogeneizado "*idéntica composición orgánica de capital*" (Marx) equivale a idéntica cantidad de trabajo directo.

Palabras clave

Homogeneización / Sistema / Leontief-Sraffa / Excedente / Capital / Trabajo.

Códigos JEL

C67/D57/R15

1. INTRODUCCIÓN

En el transcurso del análisis utilizaremos las notaciones siguientes:

1) $$\left(q_{ij}\right)=\begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & q_{ij} & \dots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

representa la matriz de transacciones interindustriales; q_{ij} denota la cantidad física de mercancía i utilizada por la industria j en el período de tiempo considerado (por ejemplo, un año).

2) $$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

es el vector columna que representa el excedente del sistema; así, β_i es el excedente de la industria i y suponemos que existe al menos una industria i para la que $\beta_i > 0$.

3) $Q_i = q_{i1} + \ldots + q_{ij} + \ldots + q_{in} + \beta_i$ denota la producción total de la industria i en el período considerado. Denotando $q_i = q_{i1} + \ldots + q_{in}$ (consumos intermedios de la industria i), tenemos, entonces,

$$Q_i = q_i + \beta_i$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}$$

representa el vector columna de producción total del sistema.

4) $(L_1,\ldots, L_i,\ldots, L_n)$ denota el vector fila de las cantidades de trabajo utilizadas por cada industria; L_i representa la cantidad de unidades de trabajo utilizadas por la industria i. Suponemos que el trabajo es uniforme en calidad o que cualquier diferencia en calidad ha sido reducida a diferencias en cantidad.
5) Como es habitual en este tipo de análisis, $A = (a_{ij})$ denota la matriz cuadrada $n\times n$, definida por $a_{ij} = \dfrac{q_{ij}}{Q_j}$; a_{ij} es, pues, la cantidad física de mercancía i utilizada en la producción de una unidad de mercancía j.
6) Asimismo, $l_i = \dfrac{L_i}{Q_i}$ representa la cantidad de trabajo utilizada en la producción de una unidad de mercancía i. $l = (l_1,\ldots, l_i,\ldots, l_n)$ es el vector fila de los coeficientes de trabajo.

Para simplificar llamaremos a $\begin{bmatrix} A \\ l \end{bmatrix}$ "técnica del sistema". Por comodidad, para representar explícitamente el problema utilizaremos el tablero:

$$(*)_1: \quad \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1j} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nj} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \overline{L_1} & \quad & \overline{L_j} & \quad & \overline{L_n} \end{matrix} & & \end{bmatrix}$$

2. EL SISTEMA DE PRECIOS DE SRAFFA

Comenzaremos utilizando las mismas hipótesis de partida del propio Sraffa, que pueden ser resumidas en:

1) El sistema económico se encuentra en estado estacionario. Produce cada año la misma cantidad de mercancías.
2) Cada industria produce una sola mercancía mediante el empleo de trabajo y mercancías. Una parte de la producción total deberá ser destinada a reemplazar las mercancías que han sido utilizadas y el resto –el excedente– se destinará al consumo.
3) El valor añadido del sistema económico o valor del excedente se distribuye al final del período en forma de salarios y beneficios: los salarios en proporción a la cantidad física de trabajo empleada y los beneficios en proporción al valor de los medios de producción empleados por cada industria.

Cabe señalar que el propio Sraffa distingue dos aspectos en los salarios:[2]

a) Como elemento de subsistencia.
b) Como participación en la producción excedente.

2.1. FORMULACIÓN DEL SISTEMA DE PRECIOS

Denotando $p_1,\ldots, p_i,\ldots, p_n$ los precios de las mercancías 1, 2,…, n; Π el tipo de beneficio y w el salario unitario y con notaciones de $(*)_1$, siguiendo a Sraffa tenemos:

[2] "*A la vista de este doble carácter de los salarios, sería apropiado, cuando vengamos a considerar la división del excedente en capitalistas y trabajadores, separar las dos partes que componen el salario y considerar sólo la parte del «excedente» como variable, en tanto que los bienes necesarios para la subsistencia de los trabajadores continuarían apareciendo entre los medios de producción, con el petróleo, etc.*" (Sraffa, 8). "*También supondremos en lo sucesivo que el salario se paga «post factum» como una participación del producto anual, abandonándose así la idea de los economistas clásicos de un salario «avanzado» desde el capital. Retenemos, sin embargo, el supuesto de un ciclo anual de producción con un mercado anual*" (Sraffa, 9).

$$(*)_2 \qquad \begin{cases} q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \ldots + q_{n1}p_n + \Pi\left(q_{11}p_1 + \ldots + q_{n1}p_n\right) + L_1 w = Q_1 p_1 \\ \ldots \\ q_{1j}p_1 + q_{2j}p_2 + \ldots + q_{nj}p_n + \Pi\left(q_{1j}p_1 + \ldots + q_{nj}p_n\right) + L_j w = Q_j p_j \\ \ldots \\ q_{1n}p_1 + \ldots + q_{nn}p_n + \Pi\left(q_{1n}p_1 + \ldots + q_{nn}p_n\right) + L_n w = Q_n p_n \end{cases}$$

Dividiendo los dos términos de cada ecuación j por el término Q_j correspondiente y reagrupando queda:

$$(*)_3 \qquad \begin{cases} (1+\Pi)a_{11} + (1+\Pi)a_{21} + \ldots + (1+\Pi)a_{n1} + l_1 w = p_1 \\ \ldots \\ (1+\Pi)a_{1j} + (1+\Pi)a_{2j} + \ldots + (1+\Pi)a_{nj} + l_j w = p_j \\ \ldots \\ (1+\Pi)a_{1n} + (1+\Pi)a_{2n} + \ldots + (1+\Pi)a_{nn} + l_n w = p_n \end{cases}$$

o, matricialmente,

$$(*)_4 \qquad p\left[I - (1+\Pi)A\right] = lw$$

sistema de n ecuaciones y n+2 incógnitas:

$$\Pi,\ w,\ p_1, \ldots, p_n$$

lo cual significa que deberán fijarse dos de ellas para que el sistema se haga determinado.

3. LIMITACIONES DEL TIPO DE BENEFICIO

El sistema $(*)_4$ puede escribirse como

$$p\,(1+\Pi)\left[\frac{1}{1+\Pi} I - A\right] = lw$$

o, si se prefiere, como

$$(*)_5 \qquad p\left(\frac{1}{1+\Pi}I - A\right) = \frac{l}{1+\Pi}w$$

La matriz A es por construcción positiva ($a_{ij} \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$) y admite un autovalor máximo $\bar{a}$ positivo. Sabemos que $\forall\ \lambda \in$ R, $\lambda > \bar{a}$, tenemos que $(\lambda\, I - A)$ es inversible y que su inversa es positiva. Entonces, para que $(*)_4$ o $(*)_5$ tengan solución con significado económico debe ser $\frac{1}{1+\Pi} > \bar{a}$ o bien $\Pi < \frac{1}{\bar{a}} - 1$.

Examinemos las características de las posibles soluciones de $(*)_4$. Para hacerlo determinado es preciso fijar dos incógnitas. Si empezamos fijando Π, $0 \leq \Pi < \frac{1}{\bar{a}} - 1$, entonces el sistema se convierte en lineal con n ecuaciones y $n + 1$ incógnitas: los n precios y el salario unitario, por lo que, haciendo una cualquiera de estas igual a la unidad, el sistema queda perfectamente determinado.

Si no fijamos Π y la mantenemos como incógnita, el sistema no es lineal y no podemos fijar arbitrariamente dos cualesquiera de las demás incógnitas. Supongamos, por ejemplo, que fijamos $w = 1$ e intentamos fijar p_1, debemos tener:

$$\left(1-(1+\Pi)a_{11}\right)p_1 - (1+\Pi)a_{21}p_2 - ... - (1+\Pi)a_{n1}p_n = l_1$$

de donde

$$\left(1-(1+\Pi)a_{11}\right)p_1 \geq l_1 \quad \text{o bien} \quad p_1 \geq \frac{l_1}{1-(1+\Pi)a_{11}}\text{.........}$$

4. REPARTO DEL EXCEDENTE ENTRE LA "SOCIEDAD" DE LOS CAPITALISTAS

Y LA “SOCIEDAD” DE LOS TRABAJADORES

Denotando

$$L = \sum_{i=1}^{n} l_i\,, \qquad q_i = q_{i1} + \ldots + q_{in} \qquad\qquad Q_i = q_i + \beta_i$$

y sumando por columnas los dos miembros de las ecuaciones $(*)_2$, tenemos:

$$q_1\,p_1 + \ldots + q_n\,p_n + \Pi\,(q_1\,p_1 + \ldots + q_n\,p_n) + Lw = (q_1 + \beta_1)\,p_1 + \ldots + (q_n + \beta_n)\,p_n$$

de donde resulta

$(*)_6$ $$\Pi\,(q_1\,p_1 + \ldots + q_n\,p_n) + Lw = \beta_1\,p_1 + \ldots + \beta_n\,p_n$$

En el caso extremo en que $\Pi = 0$, resulta $Lw = \beta_1\,p_1 + \ldots + \beta_n\,p_n$ y para $w = 1$ tenemos que el valor del excedente coincide precisamente con la cantidad total L de trabajo empleado; como consecuencia, todo el excedente va a parar a los trabajadores. En ese caso, la ecuación $(*)_4$: $p\,(I - A) = lw$ tiene como solución (haciendo $w = 1$), que denotaremos

$(*)_7$ $v = l\,(I - A)^{-1}$ que es a lo que Marx denominaba “valores”.

4. HOMOGENEIZACIÓN DE LAS UNIDADES

Consideremos el problema descrito en el tablero $(*)_1$; la fila i, $1 \leq i \leq n$, es representativa de la mercancía i; así, q_{ij} es la cantidad física de unidades de mercancía i utilizadas por la industria j en el período considerado –por ejemplo, quilos de trigo, y nada impide medir estas unidades en toneladas en vez de en quilos–; lo mismo se puede decir para el resto de las mercancías.

Sea

$$r = (r_1,\dots, r_i,\dots, r_n) \in \mathrm{R}^n, \quad r > 0 \text{ (e.d.: } r_i > 0 \ \ \forall i)$$

y transformemos el tablero $(*)_1$ en:

$$(*)_9 \qquad \left[\begin{array}{ccccccc} & & (q'_{ij}) & & & \beta' & Q' \\ \left(\begin{array}{c} r_1 q_{11} \\ r_2 q_{21} \\ \vdots \\ r_n q_{n1} \end{array}\right. & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} r_1 q_{1i} \\ r_2 q_{2i} \\ \\ r_n q_{ni} \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \\ \dots \end{array} & \left.\begin{array}{c} r_1 q_{1n} \\ r_2 q_{2n} \\ \\ r_n q_{nn} \end{array}\right) & \begin{array}{c} \overline{r_1\beta_1} \\ r_2\beta_2 \\ \\ r_n\beta_n \end{array} & \begin{array}{c} \overline{r_1 Q_1} \\ r_2 Q_2 \\ \\ r_n Q_n \end{array} \\ L_1 & & L_i & & L_n & & \end{array}\right]$$

Entonces, siendo w el salario unitario y Π el tipo de beneficio, tenemos el sistema

$$\begin{cases} (1+\Pi)(r_1\, q_{11}\ p_1 + r_2\, q_{21}\ p_2 + \dots + r_n\, q_{n1}\ p_n + L_1 w = r_1\, Q_1\ p_1 \\ \dots \\ (1+\Pi)(r_1\, q_{1i}\ p_1 + r_2\, q_{2i}\ p_2 + \dots + r_n\, q_{ni}\ p_n + L_i w = r_i\, Q_i\ p_i \\ \dots \\ (1+\Pi)(r_1\, q_{1n}\ p_1 + r_2\, q_{2n}\ p_2 + \dots + r_n\, q_{nn}\ p_n + L_n w = r_n\, Q_n\ p_n \end{cases}$$

y dividiendo los dos miembros de cada ecuación i por r_iQ_i:

$$\left\{ (1+\Pi)\left(\frac{r_1}{r_i} a_{1i}\ p_1 + \dots + \frac{r_i}{r_i} a_{ii}\ p_i + \dots + \frac{r_n}{r_i} a_{ni}\ p_n + \frac{L_i w}{r_i Q_i}\right) = p_i \qquad 1 \le i \le n \right.$$

y poniendo

$$a'_{ij} = \frac{r_i}{r_j} a_{ij}, \quad A' = (a'_{ij}), \quad l'_i = \frac{L_i}{r_i\, Q_i}, \quad l' = (l'_1,\dots,l'_i,\dots,l'_n):$$

$$\{(1+\Pi)(a'_{1i}\ p_1 + \dots + a'_{ii}\ p_i + \dots + a'_{ni}\ p_n) + l'_i = p_i \qquad 1 \le i \le n$$

o aún

$$\{-a'_{1i}p_1 - \ldots + (1-a'_{ii})p_i - \ldots - a'_{ni}p_n = l'_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

lo que se traduce matricialmente por:

(*)10 $\qquad p\,[I-(1+\Pi)\,A'] = l'$

Cabe resaltar que el planteamiento anterior es estructuralmente idéntico al original, pues lo único que hemos hecho fue modificar las unidades de medida de las mercancías; como consecuencia, queda modificada la cantidad de trabajo por unidad (el vector l) y, por tanto, también el precio de cada unidad (el vector p), pero sin alterar para nada la estructura del problema planteado.

Como vimos anteriormente, la matriz tecnológica $A = (a_{ij})$ se transforma en $A' = (a'_{ij})$ con $a'_{ij} = \frac{r_i}{r_j} a_{ij}$ y este es, precisamente, nuestro objetivo: buscar $r \in \mathrm{R}^n$ (r>0), lo que nos permitirá un cambio de unidades, de modo que la nueva matriz tecnológica tenga propiedades matemáticas que faciliten el desarrollo analítico de los distintos problemas que se presentan en el análisis.

El primer resultado sencillo es:

Proposición: Los autovalores de A' son los mismos que los de A y en particular el autovalor máximo.

En efecto, denotemos $\hat{r}$ la matriz diagonal

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & r_n \end{pmatrix}$$

entonces, mediante un cálculo sencillo,

$$A' = \hat{r}\, A\, \hat{r}^{-1}$$

y

$$\lambda\, I - A' = \hat{r}\, \lambda\, I\, \hat{r}^{-1} - \hat{r}\, A\, \hat{r}^{-1} = \hat{r}\,(\lambda\, I - A)\,\hat{r}^{-1}$$

y

$$\det(\lambda\, I - A') = \det \hat{r} \cdot \det(\lambda\, I - A) \cdot \det \hat{r}^{-1} = \det(\lambda\, I - A)$$

de donde

$$\det(\lambda\, I - A') = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda\, I - A) = 0$$

y los autovalores coinciden.

5.1. UN CASO PARTICULAR IMPORTANTE

Si el sistema económico presenta algún tipo de excedente, entonces sabemos que el autovalor máximo $\bar{a}$ de la matriz tecnológica A es estrictamente menor que 1 $(\bar{a} < 1)$ al cual, *si A es irreducible* corresponde un *autovector por la izquierda* $r > 0$, y tenemos $rA = \bar{a}\, r$.

Entonces, tenemos que $\forall i,\ 1 \le i \le n$:

$$r_1\, a_{1i} + \ldots + r_i\, a_{ii} + \ldots + r_n\, a_{ni} = \bar{a}\, r_i$$

es decir,

$$\forall i,\ 1 \le i \le n,\ \frac{r_1}{r_i} a_{1i} + \ldots + \frac{r_i}{r_i} a_{ii} + \ldots + \frac{r_n}{r_i} a_{ni} = \bar{a}$$

o aún,

(*)11 $\qquad a'_{1i} + \ldots + a'_{ii} + \ldots + a'_{ni} = \bar{a}, \quad 1 \le i \le n$

de donde la nueva matriz tecnológica A' tiene la propiedad de que

$$\forall i,\ \ 1 \leq i \leq n,\ \ \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \overline{a}$$

lo que supone que los vectores columna de A' suman todos lo mismo, a saber $\overline{a}$ autovalor máximo de A' (y de A).

Por otra parte, dado que

$$\forall i,\ \ 1 \leq i \leq n\ \ \ \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \overline{a}$$

Dado que *Mn* (R) conjunto de las matrices cuadradas de orden n es un espacio vectorial sobre R, se demuestra fácilmente que las aplicaciones

$$Mn\,(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}_{+} = \{x \in \mathrm{R}\ /\ x \geq 0\}$$

$$\text{a) } A = (a_{ij}) \to \|A\| = \sup_{j} \sum_{i=1}^{n} |\ a_{ij}|$$

$$\text{b) } A = (a_{ij}) \to \|A\|^{*} = \sup_{i} \sum_{j=1}^{n} |\ a_{ij}|$$

son normas en *Mn* (R), tenemos también $\sup_{i} \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \|A'\| = \overline{a}$ por lo que la norma de A' es igual a $\overline{a}$ y el vector $\overline{1} = (1,...,1)$ es autovector por la izquierda de A'. Ello significa económicamente que, haciendo abstracción de la componente trabajo en el sistema, las mercancías se intercambiarían una a una.

Por otra parte, de $(*)_{11}$ deducimos:

$$1 - a'_{ii} - \sum_{j \neq i} a'_{ji} = 1 - \overline{a} > 0$$

o bien

$$1 - a'_{ii} = (1 - \overline{a}) + \sum_{j \neq i} a'_{ji}$$

y como $1 - \overline{a} > 0$,

$$1 - a'_{ii} > \sum_{j \neq i} a'_{ji}$$

y la matriz $I - A'$ es de Leontief diagonal dominante por columnas.[3]

Consideremos ahora una tasa de beneficio Π, $\left(0 \leq \Pi < \frac{1}{\overline{a}} - 1\right)$, como r es autovector izquierdo de A,

$$r\,A = \overline{a}\,r$$

y

$$r\,(1 + \Pi)\,A = (1 + \Pi)\,\overline{a}\,r$$

por lo que $(1 + \Pi)\,\overline{a}$ es autovalor de $(1 + \Pi)\,A$, que admite r como autovector izquierdo.

Multiplicando por 1+Π los dos miembros de $(*)_{11}$, resulta $\forall i, \quad 1 \leq i \leq n$:

$$(1 + \Pi)\,a'_{1i} + (1 + \Pi)\,a'_{2i} + \ldots + (1 + \Pi)\,a'_{ni} = (1 + \Pi)\,\overline{a}$$

$$1 - (1 + \Pi)\,a'_{ii} - \sum_{j \neq i} (1 + \Pi)\,a'_{ji} = 1 - (1 + \Pi)\,\overline{a}$$

o aún:

---

[3] Decimos que (α_{ij}) matriz cuadrada de orden n es Leontief diagonal dominante por columnas si:
1) $\alpha_{ii} > 0$ y $\alpha_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$ (Leontief)
2) $\forall i, \quad 1 \leq i \leq n \quad \alpha_{ii} > \sum_{j \neq i} \left|\alpha_{ji}\right|$ (Diagonal dominante por columnas)

$$1-(1+\Pi)a'_{ii} = (1-(1+\Pi)\bar{a}) + \sum_{j\neq i}(1+\Pi)a'_{ji}, \quad 1\leq i\leq n$$

y siendo

$$1-(1+\Pi)\bar{a} > 0 \quad \left(\text{porque } \Pi < \frac{1}{\bar{a}}-1\right)$$

resulta que la matriz $I-(1+\Pi)A'$ es también Leontief diagonal dominante por columnas.

Lo anterior podemos resumirlo en la siguiente proposición.

(*)12 *Proposición*: Todo sistema tipo Leontief (o Leontief-Sraffa) con técnica $\begin{bmatrix} A \\ l \end{bmatrix}$ puede ser transformado en uno estructuralmente equivalente $\begin{bmatrix} A' \\ l' \end{bmatrix}$, que tiene las siguientes propiedades:

a) Los autovalores de A' son los mismos que los de A (y, por lo tanto, el autovalor máximo $\bar{a}$).

b) $\forall i, \quad 1\leq i\leq n \quad \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \bar{a}$ (las columnas de A' suman todas $\bar{a}$) y, por lo tanto, la norma de A', $\|A'\| = \sup_i \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \bar{a}$.

c) $\forall\Pi, \quad 0 \leq \Pi \leq \frac{1}{\bar{a}}-1$, las columnas de $(1+\Pi)A'$ suman todas $(1+\Pi)\bar{a}$; $\|(1+\Pi)A'\| = (1+\Pi)\bar{a}$ y la matriz $I-(1+\Pi)A'$ es Leontief diagonal dominante por columnas.

En lo que sigue, y salvo mención expresa que diga lo contrario, denotaremos A en lugar de A', l en lugar de l', etc., es decir, suponemos que la técnica del sistema ha sido previamente homogeneizada, de modo que en particular la matriz tecnológica A es tal que $\forall i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ji} = \bar{a}$.

Con el objetivo de ilustrar lo expuesto anteriormente, consideremos el siguiente ejemplo numérico.

$$\begin{bmatrix} (q_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 20 \\ 30 & 40 & 10 \\ 40 & 100 & 20 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} \\ (L_i) = (60,\ 40,\ 20), \qquad \sum L_i = 120 \end{bmatrix}$$

La matriz tecnológica es

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

y el vector de los coeficientes de trabajo es:

$$l = (1{,}2\ ,\ 0{,}4\ ,\ 0{,}1)$$

Se comprueba fácilmente que el autovalor máximo de la matriz A, raíz de la ecuación característica det $(\lambda\, I - A) = 0$, es $\bar{a} = 0{,}8$.

Calculamos el autovector por la izquierda asociado a $\bar{a} = 0{,}8$ resolviendo

$$(r_1, r_2, r_3)\ (\bar{a}\ I - A) = (0, 0, 0)$$

que tomando, por ejemplo, $r_3 = 1$, resulta: $r_1 = 4{,}8421, \quad r_2 = 4{,}315789, \quad r_3 = 1$

La nueva matriz de transacciones (q'_{ij}) se obtiene poniendo

$$q'_{ij} = r_i\, q_{ij}$$

es decir, multiplicando cada fila i de (q_{ij}) por el correspondiente r_i; asimismo,

$$\beta'_i = r_i\, \beta_i\,,\ Q'_i = r_i\, Q_i$$

La cantidad total de trabajo utilizado por cada industria sigue siendo la misma.

La nueva tecnología se obtiene haciendo $a'_{ij} = \frac{r_i}{r_j} a_{ij}$ y $l'_i = \frac{l_i}{r_i}$.

Resulta

$$A' = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}168292 & 0{,}48421 \\ 0{,}534783 & 0{,}4 & 0{,}215789 \\ 0{,}165217 & 0{,}231707 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$l' = (0{,}247826,\ 0{,}092682,\ 0{,}1)$$

y se observa fácilmente que $\forall j,\ 1 \le j \le 3$,

$$\sum_{i=1}^{3} a'_{ij} \approx \bar{a} = 0{,}8$$

5.2. ALGUNAS PROPIEDADES RELEVANTES DE ESTE TIPO DE MATRICES

1) Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrices cuadradas de orden n, tales que $\forall j,\ 1 \le j \le n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = b$$

poniendo $A \cdot B = (\gamma_{ij})$ con $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$, tenemos $\forall j,\ 1 \leq j \leq n,$

$$\sum_i \gamma_{ij} = \sum_i \left(\sum_k a_{ik}\ b_{kj} \right) = \sum_k b_{kj} \left(\sum_i a_{ik} \right) = a \left(\sum_k b_{kj} \right) = ab$$

y para este tipo de matrices se verifica

$$\|A \cdot B\| = \|A\| \cdot \|B\|$$

de lo que se deduce en particular

(*)13 $\quad \left\|A^n\right\| = \|A\|^n = a^n$

2) La suma de los elementos de cada columna de la matriz homogeneizada A es $\overline{a} < 1$ o, lo que es lo mismo,

$$\|A\| = \overline{a} < 1$$

Entonces, un resultado clásico nos indica

$$(I - A)^{-1} = I + A + \ldots + A^n + \ldots$$

y entonces $\forall j,\ 1 \leq j \leq n$ la suma de los elementos de la columna j de $(I - A)^{-1}$ será:

$$1 + \overline{a} + \ldots + \overline{a}^{\,n} + \ldots = \frac{1}{1 - \overline{a}}$$

de lo que se deduce también

(*)14 $\quad \left\|(I - A)^{-1}\right\| = \dfrac{1}{1 - \overline{a}}$

Por un razonamiento análogo, dada una tasa de beneficio Π, $0 \le \Pi < \frac{1}{\overline{a}} - 1$, la suma de los elementos de cada columna j de $(I - (1+\Pi)A)^{-1}$ es $\frac{1}{1-(1+\Pi)\overline{a}}$ por lo que $\left\| (I - (1+\Pi)A)^{-1} \right\| = \frac{1}{1-(1+\Pi)\overline{a}}$.

5.3. INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA INVERSA $(I - (1 + \Pi) A)^{-1}$ HOMOGENEIZADA

Denotemos $(\alpha_{ij}) = (I - A)^{-1}$. Si suponemos que la matriz tecnológica A, así como el vector l de coeficientes de trabajo, permanecen constantes ante un incremento infinitesimal $\Delta\beta_j$ de β_j de $X = (I - A)^{-1}\beta$, tenemos:

$$X_i(\beta_1, ..., \beta_j, ..., \beta_n) = \alpha_{i1}\beta_1 + ... + \alpha_{ij}\beta_j + ... + \alpha_{in}\beta_n$$
$$X_i(\beta_1, ..., \beta_j + \Delta\beta_j, ..., \beta_n) = \alpha_{i1}\beta_1 + ... + \alpha_{ij}(\beta_j + \Delta\beta_j) + ... + \alpha_{in}\beta_n$$

de donde:

$$X_i(\beta_1, ..., \beta_j + \Delta\beta_j, ..., \beta_n) - X_i(\beta_1, ..., \beta_j, ..., \beta_n) = \alpha_{ij}\,\Delta\beta_j$$

y si suponemos que A permanece invariable cuando $\Delta\beta_j = 1$, α_{ij} representa la cantidad física de mercancía i necesaria para obtener una unidad física de mercancía final j. Entonces, cada columna j de $(I - A)^{-1}$ representa las cantidades físicas heterogéneas de mercancías necesarias directa e indirectamente en todo el sistema económico para obtener una unidad física de mercancía final j.

Por otra parte, $l\,(I - A)^{-1}$ es un vector cuya componente

$$j: \quad v_j = \alpha_{ij}\, l_1 + ... + \alpha_{nj}\, l_n$$

es representativa de la cantidad de trabajo utilizado directa e indirectamente para obtener una unidad j de mercancía final. Diremos que los v_j son los *coeficientes de trabajo verticalmente integrados*.

Como la matriz tecnológica fue homogeneizada, $(\alpha_{ij}) = (I - A)^{-1}$ tiene la propiedad $\forall j, \quad 1 \le j \le n$,

$$\alpha_{1j} + ... + \alpha_{ij} + ... + \alpha_{nj} = \frac{1}{1 - \bar{a}}$$

y, como consecuencia, si se diera la circunstancia de que

$l_1 = l_2 = ... = l_i = ... = l_n = t$

tendríamos que $\forall j, \quad 1 \le j \le n$,

$$v_j = t\, \alpha_{1j} + ... + t\, \alpha_{ij} + ... + t\, \alpha_{nj} = \frac{t}{1 - \bar{a}}$$

con lo que concluimos que *en un sistema homogeneizado, si los coeficientes de trabajo directo l_i son iguales, entonces los "valores" v_i también son iguales.*

Igualmente, y por un razonamiento análogo, si consideramos una tasa de beneficio Π, $0 \le \Pi < \frac{1}{\bar{a}} - 1$, de $p = lw\ (I - (1 + \Pi)A)^{-1}$, si todos los l_i son iguales a t, tomando $w = 1$, tendremos:

$$p_i(\Pi) = \frac{t}{1 - (1 + \Pi)\bar{a}}, \quad 1 \le i \le n$$

es decir, los precios son todos iguales y crecen al aumentar Π, según

$$p_i'(\Pi) = \frac{\bar{a}t}{(1-(1+\Pi)\bar{a})^2} \; .$$

5.4. PROPIEDADES DE LA INVERSA (*I* –(1 + *Π*) A)$^{-1}$ NORMALIZADA

Pongamos ahora,

$$p\left(\frac{1}{1+\Pi}I - A\right) = \frac{l}{1+\Pi}w$$

$$\alpha(\Pi) = (\alpha_{ij}(\Pi)) = (I - (1+\Pi)A)^{-1},$$

y

$$p(\Pi) = lw\alpha(\Pi) = lw(I - (1+\Pi)A)^{-1}$$

y denotemos

$$(\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)) = \frac{\alpha_{ij}(\Pi)}{\|\alpha_{ij}(\Pi)\|}$$

Como $\|\alpha_{ij}(\Pi)\| = \frac{1}{1-(1+\Pi)\bar{a}}$ (A es homogenizada) tenemos que la matriz $(\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi))$ es tal que $\|\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)\| = 1$ o lo que es lo mismo, $\forall j \; (1 \le j \le n)$, $\sum_i \tilde{\alpha}_{ij}(\Pi) = 1$ (la suma de los elementos de cada columna de $(\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi))$ es uno), por lo que existe $\lim_{\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}} \tilde{\alpha}_{ij}(\Pi) = (\tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi}))$.

Si denotamos

$$\tilde{p}(\Pi) = lw\frac{(I-(1+\Pi)A)^{-1}}{\dfrac{1}{1-(1+\Pi)\bar{a}}}$$

tenemos:

(*)15: $\tilde{p}(\Pi) = lw(1-(1+\Pi)\bar{a})\,(I-(1+\Pi)A)^{-1}$

o multiplicando los dos miembros por $I-(1+\Pi)A$:

(*)16: $\tilde{p}(\Pi)(I-(1+\Pi)A) = lw\,(1-(1+\Pi)\bar{a})$

y tomando limites en los miembros cuando $\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi} = \frac{1}{\bar{a}} - 1$ queda $\tilde{p}(\tilde{\Pi})\left(I - \frac{1}{\bar{a}}A\right) = 0$

o lo que es lo mismo $\tilde{p}(\tilde{\Pi})\,(\bar{a}I - A) = 0;$ ahora bien, siendo $\forall j$, $\sum_i \tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi}) = 1$ tenemos:

$$\tilde{p}_j(\tilde{\Pi}) = l_1\tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi}) + \ldots + l_n\tilde{\alpha}_{nj}(\tilde{\Pi})$$

$$\tilde{p}_j(\tilde{\Pi}) \leq \left(\inf_i\, l_i\right)\left(\sum_i \tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi})\right) = \inf_i\, l_i > 0$$

y también $\tilde{p}_j(\tilde{\Pi}) \leq \left(\sup_i l_i\right)\left(\sum_i \tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi})\right) = \sup_i l_i < +\infty$

por lo que podemos concluir que $\tilde{p}(\tilde{\Pi})$ es autovector izquierdo de *A* asociado al autovalor máximo $\bar{a}$ y siendo *A* homogenizada, $\tilde{p}(\tilde{\Pi})$es de la forma $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$ con $\alpha > 0$; es decir, cuando Π tiende a $\tilde{\Pi}$ los precios relativos tienden a ser todos iguales. Es un resultado que no bebería sorprendernos demasiado puesto que cuando Π tiende al tipo máximo de beneficio, la proporción de producto neto que va al trabajo tiende a cero y nos encontramos en una situación igual a cuando los coeficientes de trabajo directo l_i fueran iguales a cero.

De lo anterior se deducen una serie de propiedades interesantes de la matriz $\tilde{\alpha}_{ij}\left(\tilde{\Pi}\right)$:

a) De (*)6 tenemos:

$$\Pi\left(q_1 p_1 + \ldots\ldots + q_n p_n\right) + Lw = \beta_1 p_1 + \ldots\ldots + \beta_n p_n$$

Cuando Π tiende a $\tilde{\Pi}$, $\tilde{p}_i(\Pi)$tiende a $\tilde{p}_i\left(\tilde{\Pi}\right)$, Lw tiende a cero, por lo que, siendo los $\tilde{p}_i\left(\tilde{\Pi}\right)$ todos iguales, y poniendo $\tilde{p}_i\left(\tilde{\Pi}\right) = \tilde{p}$, tenemos:

$$\tilde{\Pi}\,\tilde{p}\left(\sum_i q_i\right) = \tilde{\Pi}\,\tilde{p}\left(\sum_{i,j} q_{ij}\right) = \tilde{p}\left(\sum_i \beta_i\right)$$

o lo que es lo mismo

(*)17 $$\tilde{\Pi} = \frac{\sum_i \beta_i}{\sum_{i,j} q_{ij}}$$

por lo que concluimos que en un sistema homogeneizado la razón entre excedente global y la suma de los medios de producción utilizados coinciden con el tipo máximo de beneficio. Es lo que Sraffa denomina *razón patrón (global)* para los sistemas patrón.[4]

b) Retomando la (*)15,

$$\tilde{p}(\Pi) = lw\left(\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)\right) = lw\left(1 - (1+\Pi)\overline{a}\right)\left(I - (1+\Pi)A\right)^{-1}$$

y dado que existe

$$\lim_{\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}} \tilde{\alpha}_{ij}(\Pi) = \left(\tilde{\alpha}_{ij}\left(\tilde{\Pi}\right)\right)$$

y también

$$\lim_{\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}} \tilde{p}(\Pi) = \tilde{p}\left(\tilde{\Pi}\right) = (\alpha, \ldots, \alpha), \alpha > 0$$

debemos tener:

$$\tilde{p}_i\left(\tilde{\Pi}\right) = \alpha = l_1 w \tilde{\alpha}_{1i}\left(\tilde{\Pi}\right) + \ldots\ldots + l_n w \tilde{\alpha}_{ni}\left(\tilde{\Pi}\right)$$
$$\tilde{p}_j\left(\tilde{\Pi}\right) = \alpha = l_1 w \tilde{\alpha}_{1j}\left(\tilde{\Pi}\right) + \ldots\ldots + l_n w \tilde{\alpha}_{nj}\left(\tilde{\Pi}\right)$$

de donde se deduce

$$\tilde{\alpha}_{1i}\left(\tilde{\Pi}\right) = \tilde{\alpha}_{1j}\left(\tilde{\Pi}\right), \ldots\ldots, \tilde{\alpha}_{ni}\left(\tilde{\Pi}\right) = \tilde{\alpha}_{nj}\left(\tilde{\Pi}\right)$$

es decir, en cada fila *k* de la $\left(\tilde{\alpha}_{ij}\left(\tilde{\Pi}\right)\right)$ los elementos $\left(\tilde{\alpha}_{kj}\left(\tilde{\Pi}\right)\right)$, $1 \leq j \leq n$ son iguales; o lo que es lo mismo, los vectores columna de $\left(\tilde{\alpha}_{ij}\left(\tilde{\Pi}\right)\right)$ son todos iguales.

5.5. CONDICIÓN NECESARIA DE IGUALDAD DE PRECIOS PARA DISTINTOS TIPOS DE BENEFICIOS

Estudiamos ahora que condiciones deben darse en un sistema homogenizado para que a distintos tipos de beneficio Π y Π' correspondan precios relativos iguales $\tilde{p}(\Pi) = \tilde{p}(\Pi') = \tilde{p}$.

---

[4] Ver Sraffa (1975): Capitulo 4: “La mercancía patrón” del libro “Producción de mercancías por medio de mercancías”.

En primer lugar, los precios relativos del tipo $p_i(\Pi)$ son idénticos a los de tipo $\tilde{p}_i(\Pi)$, en efecto si $0 \leq \Pi \leq \tilde{\Pi}$, tenemos:

$$\frac{\tilde{p}_i(\Pi)}{\sum_i \tilde{p}_i(\Pi)} = \frac{p_i(\Pi)(1-(1+\Pi)\bar{a})}{\left(\sum_i p_i(\Pi)\right)(1-(1+\Pi)\bar{a})} = \frac{p_i(\Pi)}{\sum_i p_i(\Pi)}$$

y cuando $\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}$, los limites del numerador y del denominador existen y son distintos de cero. Tenemos:

$$\frac{\tilde{p}_i(\tilde{\Pi})}{\sum_i \tilde{p}_i(\tilde{\Pi})} = \lim_{\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}} \frac{p_i(\Pi)}{\sum_i p_i(\Pi)}$$

por lo que tenemos que los precios relativos $p_i(\Pi)$ son los mismos que los $\tilde{p}_i(\Pi)$ incluso cuando $\Pi = \tilde{\Pi}$.

Si $\tilde{p}(\Pi) = \tilde{p}(\Pi') = \tilde{p}$, de $(*)_{16}$ tenemos:

$$\tilde{p}\,(I-(1+\Pi)A) = lw\,(1-(1+\Pi)\bar{a})$$
$$\tilde{p}\,(I-(1+\Pi')A) = lw\,(1-(1+\Pi')\bar{a})$$

de donde y mediante cálculos elementales se obtiene:

$\dfrac{\Pi-\Pi'}{(1-(1+\Pi)\bar{a})(1-(1+\Pi')\bar{a})}\tilde{p}(\bar{a}I-A)=0$ o aun $\tilde{p}(\bar{a}I-A)=0$ y $\tilde{p}$ es autovector izquierdo de A.

Asimismo, de $\tilde{p}\,(I-(1+\Pi)A)=lw\,(1-(1+\Pi)\bar{a})$ y siendo $\tilde{p}$ autovector izquierdo, tenemos $\tilde{p}\,(I-(1+\Pi)\bar{a})=lw\,(1-(1+\Pi)\bar{a})$ por lo que $\tilde{p}=lw$ y siendo A homogeneizada los componentes de $\tilde{p}$ son todos iguales por lo que las de l también son iguales.

Ya hemos visto anteriormente[5] que si las componentes l_i del vector l eran iguales, los precios eran iguales para cualquier Π. Podemos pues enunciar:

(*)$_{18}$ *Teorema:* En un sistema homogeneizado, es condición necesaria y suficiente para que los precios relativos permanezcan invariantes al modificar Π $\left(0\leq\Pi\leq\tilde{\Pi}\right)$ que los coeficientes de trabajo directo l_i sean iguales.

Supongamos ahora que los coeficientes de trabajo directo son todos iguales a t ; los precios son entonces todos iguales y dependen solo de Π y de w:

$$p_i(\Pi)=\frac{tw}{1-(1+\Pi)\bar{a}}\ ,\ 0\leq\Pi\leq\tilde{\Pi}\,,$$

de (*)$_6$ tenemos:

$$(*)_{19}\qquad \Pi\, p_i(\Pi)\left(\sum_{i,j}q_{ij}\right)+Lw=p_i(\Pi)\left(\sum_i\beta_i\right)$$

dado Π, el valor del producto neto del sistema es $p_i(\Pi)\left(\sum_i\beta_i\right)$. Y el beneficio total de todas las industrias es $\Pi\, p_i(\Pi)\left(\sum_{i,j}q_{ij}\right)$.

[5] Ver páginas 18 y 19.

Denotamos W la parte del producto neto que va al trabajo. Sabemos que si $\Pi = 0$ $p_i(0)\left(\sum_i \beta_i\right) = L$ y entonces $W = 1$; por el contrario si $\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}$, $W = 0$ por lo que W varia entre cero y uno.

Dividiendo los dos miembros de (*)19 por $p_i(\Pi)\left(\sum_i \beta_i\right)$ y teniendo en cuenta (*)17 se obtiene $\frac{\Pi}{\tilde{\Pi}} + W = 1$ o aun $\Pi = \tilde{\Pi}(1 - W)$ lo que nos proporciona una relación lineal entre el tipo de beneficio Π y la proporción W del producto neto que va a los trabajadores.

5.5. EL SISTEMA HOMOGENEIZADO Y EL SISTEMA PATRON DE SRAFFA

Retomamos (*)6

$$\Pi(q_1 p_1(\Pi) + \ldots\ldots + q_n p_n(\Pi)) + Lw = \beta_1 p_1(\Pi) + \ldots\ldots + \beta_n p_n(\Pi)$$

y denotamos $W(\Pi)$ la parte del excedente que va a los trabajadores dado un tipo de beneficio Π. Tenemos:

(*)20 $$\Pi \frac{\sum_i q_i p_i(\Pi)}{\sum_i \beta_i p_i(\Pi)} + \frac{Lw}{\sum_i \beta_i p_i(\Pi)} = 1$$

Como $W = \frac{Lw}{\sum_i \beta_i p_i(\Pi)}$, si pretendemos que W dependa linealmente de Π, debe ser $\sum_i q_i p_i(\Pi)$ proporcional a $\sum_i \beta_i p_i$ ahora bien

$$\begin{aligned}
&\sum_i q_i p_i(\Pi) = \\
&q_1 p_1(\Pi) = q_1\left(l_1\alpha_{11}(\Pi) + l_2\alpha_{21}(\Pi) + \ldots\ldots + l_n\alpha_{n1}(\Pi)\right) \\
&+\ldots \\
&\vdots \\
&+ q_n p_n(\Pi) = q_n\left(l_1\alpha_{1n}(\Pi) + l_2\alpha_{2n}(\Pi) + \ldots\ldots + l_n\alpha_{nn}(\Pi)\right) \\
&\\
&= l_1\left(q_1\alpha_{11}(\Pi) + q_2\alpha_{12}(\Pi) + \ldots\ldots + q_n\alpha_{1n}(\Pi)\right) \\
&+\ldots \\
&\vdots \\
&+ l_n\left(q_1\alpha_{n1}(\Pi) + q_2\alpha_{n2}(\Pi) + \ldots\ldots + q_n\alpha_{nn}(\Pi)\right) \\
&\\
&= l \cdot \left(\alpha_{ij}\right) \cdot {}^t q
\end{aligned}$$

donde ${}^t q$ representa el vector columna cuyas componentes son los q_i, igualmente y por un razonamiento análogo $\sum_i \beta_i p_i = l \cdot \left(\alpha_{ij}\right) \cdot {}^t\beta$.

Si se dan las condiciones del sistema patrón de Sraffa, entonces $\forall_i$, $\frac{q_i}{\beta_i} = \frac{1}{\tilde{\Pi}}$.

Por lo que $\forall_i$, $\frac{q_i p_i(\Pi)}{\beta_i p_i(\Pi)} = \frac{1}{\tilde{\Pi}}$ y de $(*)_{20}$ resulta: $\frac{\Pi}{\tilde{\Pi}} + W = 1$ o bien $\Pi = \tilde{\Pi}(1 - W)$.

Relación lineal entre W y Π cuando el salario se expresa como proporción del producto neto patrón.

Para el sistema homogeneizado sabemos que si los l_i son iguales, entonces los $p_i(\Pi)$ también son iguales, que denotamos p y de $(*)_{20}$ directamente deducimos:

$$\frac{\sum_i q_i p}{\sum_i \beta_i p} = \frac{p\left(\sum_i q_i\right)}{p\left(\sum_i \beta_i\right)} = \frac{\sum_i q_i}{\sum_i \beta_i}$$

Como sabemos que (*)$_{17}$, $\dfrac{\sum_i q_i}{\sum_i \beta_i} = \dfrac{1}{\tilde{\tilde{\Pi}}}$ tenemos $\dfrac{\Pi}{\tilde{\tilde{\Pi}}} + W = 1$, $\Pi = \tilde{\Pi}(1-W)$ relación que ya habíamos encontrado anteriormente.

Podemos concluir que la relación lineal

(*)$_{21}$ $\qquad \Pi = \tilde{\Pi}(1-W)$

que se da para el sistema patrón de Sraffa, se da también para un sistema cualquiera previamente homogeneizado en el que los coeficientes de trabajo directo l_i sean todos iguales.

6. INTERPRETACIÓN DE LOS PRECIOS UTILIZANDO EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO

De (*)$_{12}$ sabemos que para Π, $0 \le \Pi < \dfrac{1}{\bar{a}} - 1$ la matriz $I - (1+\Pi)\, A$ es diagonal dominante por columnas (A homogeneizada) y sea D la matriz diagonal:

$D = (d_{ij})$, $\quad d_{ii} = 1 - (1+\Pi)\, a_{ii}$, $\quad d_{ij} = 0 \quad$ si $i \neq j$, entonces:

$$\left(I-\left(1+\Pi\right)A\right)D^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \frac{-a_{1j}\left(1+\Pi\right)}{1-\left(1+\Pi\right)a_{jj}} & \cdots & \frac{-a_{1n}\left(1+\Pi\right)}{1-\left(1+\Pi\right)a_{nn}} \\ \vdots & \cdots & 1 & & \\ \frac{-a_{21}\left(1+\Pi\right)}{1-\left(1+\Pi\right)a_{11}} & \cdots & & & \\ \vdots & \cdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}\left(1+\Pi\right)}{1-\left(1+\Pi\right)a_{11}} & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

de donde $\tilde{A}=I-\left[I-\left(1+\Pi\right)A\right]D^{-1}$ es una matriz tal que los términos diagonales son 0 y la suma de los elementos de cada columna j, $1\leq j\leq n$ es $\sum_{i\neq j}\frac{\left(1+\Pi\right)a_{ij}}{1-\left(1+\Pi\right)a_{jj}}<1$, porque $1-\left(1+\Pi\right)a_{jj}>\sum_{i\neq j}\left(1+\Pi\right)a_{ij}$ y $\tilde{a}_{jj}=0$, tenemos que $\|\tilde{A}\|<1$.

Entonces, la aplicación φ: $\mathrm{R}^n\rightarrow\mathrm{R}^n$ definida por:[6]

$$\varphi(p)=lD^{-1}+p\left[I-\left(I-\left(1+\Pi\right)A\right)D^{-1}\right]$$

(con w=1), es una contracción en R^n y admite un punto fijo único $\bar{p}$, y

$$\varphi(\bar{p})=lD^{-1}+\bar{p}-\bar{p}\left(I-\left(1+\Pi\right)A\right)D^{-1}=\bar{p}$$
$$\bar{p}\left(I-\left(1+\Pi\right)A\right)D^{-1}=l\,D^{-1}$$

y multiplicando por D a la derecha:

$$\bar{p}\left(I-\left(1+\Pi\right)A\right)=l$$

[6] Ver apéndice matemático: Corolario del teorema 1 y el teorema 2.

y $\overline{p}$ es la solución del sistema planteado. Además, $\forall\, p^0 \in \mathrm{R}^n$, $p^0 \geq 0$, la sucesión

$$p^0, p^1 = \varphi\,(p^0),\ldots, p^k = \varphi\,(p^{k\text{-}1}),\ldots$$

construida a partir de p^0, converge a $\overline{p}$, en donde p^k denota $\left(p_1^k,\ldots, p_n^k\right)$, $\quad k \geq 0$.

En lo que sigue, con el objetivo de aligerar la exposición haciéndola más comprensible y sin pérdida alguna de generalidad, consideraremos un sistema formado sólo por tres industrias e investigaremos cómo se forma, por ejemplo, el precio $\overline{p}_1$ de la mercancía 1.

Tenemos:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(1+\Pi)\,a_{12}}{1-(1+\Pi)\,a_{22}} & \dfrac{(1+\Pi)\,a_{13}}{1-(1+\Pi)\,a_{33}} \\[2ex] \dfrac{(1+\Pi)\,a_{21}}{1-(1+\Pi)\,a_{11}} & 0 & \dfrac{(1+\Pi)\,a_{23}}{1-(1+\Pi)\,a_{33}} \\[2ex] \dfrac{(1+\Pi)\,a_{31}}{1-(1+\Pi)\,a_{11}} & \dfrac{(1+\Pi)\,a_{32}}{1-(1+\Pi)\,a_{22}} & 0 \end{pmatrix}$$

Si partimos de $p^0 = 0$ y suponiendo que $w = 1$,

$$p^1 = \varphi\left(p^0\right) = \varphi\left(0\right) = lD^{-1} = \left(\frac{l_1}{1-(1+\Pi)\,a_{11}}, \frac{l_2}{1-(1+\Pi)\,a_{22}}, \frac{l_3}{1-(1+\Pi)\,a_{33}}\right)$$

y diremos que

$$p_i^1 = \frac{l_i}{1-(1+\Pi)\,a_{ii}}$$

es el precio elemental de primer orden de la mercancía i y, como se ve, los precios relativos de primer orden dependen no sólo de los l_i, sino también de los a_{ii} (aparte de Π).

Siguiendo el procedimiento iterativo tenemos:

$$p^2 = \varphi\left(p^1\right) = lD^{-1} + p^1\tilde{A}$$

y entonces

$$p_1^2 = \frac{l_1}{1-(1+\Pi)a_{11}} + \frac{l_2}{1-(1+\Pi)a_{22}} \cdot \frac{(1+\Pi)a_{21}}{1-(1+\Pi)a_{11}} + \frac{l_3}{1-(1+\Pi)a_{33}} \cdot \frac{(1+\Pi)a_{31}}{1-(1+\Pi)a_{11}} =$$

$$= \frac{1}{1-(1+\Pi)a_{11}}\left[l_1 + \frac{(1+\Pi)a_{21}}{1-(1+\Pi)a_{22}} \cdot l_2 + \frac{(1+\Pi)a_{31}}{1-(1+\Pi)a_{33}} \cdot l_3\right]$$

que podemos interpretar como la suma del precio elemental de la mercancía 1 más la contribución *directa* de los precios elementales de las mercancías 2 y 3 al precio de segundo orden de 1. Es decir, el vector de los precios de segundo orden se obtiene mediante actualización de los precios de primer orden con la matriz $\tilde{A}$, que podemos denominar “matriz de actualización”.

Por construcción de la sucesión (p^k), tenemos:

$$p^k = lD^{-1} + p^{k-1}\tilde{A}$$
$$p^{k+1} = lD^{-1} + p^k\tilde{A}$$

de donde

$$p^{k+1} - p^k = \left(p^k - p^{k-1}\right)\tilde{A}$$

En efecto, obtuvimos p^k actualizando p^{k-1}, y para obtener p^{k+1} es necesario actualizar también $p^k - p^{k-1}$.

7. CONSIDERACIONES EN TORNO A LA EVOLUCIÓN DE LOS PRECIOS EN UN SISTEMA HOMOGENEIZADO

En un sistema homogeneizado de

$$p\left(I-(1+\Pi)A\right)=lw$$

se deduce que si lw tiende a 0, lo que equivale a que Π tienda a $\frac{1}{\bar{a}}-1$, el vector de precios p tiende a ser autovector izquierdo de A y, dado que $\bar{1}=(1,...,1)$ es autovector izquierdo de A, deducimos que los precios tienden a ser todos iguales.

Lo anterior no significa en absoluto que en un sistema homogeneizado los precios no puedan cruzarse para un cierto valor de Π, pero es más difícil y si eso ocurre la variación de los precios relativos es muchísimo más suave.

Ilustremos lo anterior con un ejemplo numérico sencillo relativo a dos industrias.

Ejemplo numérico 1

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 50 & 20 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \overline{20} & \overline{80} \end{matrix} \end{array} \quad \beta=\begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} \quad Q=\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$L=(20,80)$$

Matriz tecnológica:

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}; \quad l=(l_1,l_2)=(0{,}2\ ,0{,}8)$$

el autovalor máximo $\bar{a} \approx 0{,}5701$ y la solución de $(v_1, v_2)\ (I - A) = (0{,}2\ ,\ 0{,}8)$ es:

$$\begin{cases} v_1 \approx 1{,}217391 \\ v_2 \approx 1{,}304347 \end{cases}$$

El tipo máximo de beneficio

$$\tilde{\Pi} = \frac{1}{\bar{a}} - 1 = 0{,}753905$$

y se comprueba que para $1 + \Pi = 1{,}071428$ la solución de

$$p\,\left(I - \left(1 + \Pi\right) A\right) = (0{,}2\ ,\ 0{,}8)$$

es

$$p_1 = p_2 = 1{,}4.$$

Los precios se cruzan, pues, para un tipo de beneficio relativamente bajo del 7,14%.

Asimismo, para $1+\Pi=1{,}5$ obtenemos:

$$\begin{aligned} p_1 &\approx 4{,}625 \\ p_2 &\approx 3{,}125 \end{aligned}$$

y para $1+\Pi=1{,}75$ tenemos:

$$\begin{aligned} p_1 &\approx 332 \\ p_2 &\approx 180 \end{aligned}$$

Homogeneizemos el problema. Resolviendo

$$(\alpha_1, \alpha_2)(\bar{a}\, I - A) = (0{,}0)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1{,}851166 \\ \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

tomando la mercancía 2 como numerario.

El sistema homogeneizado es:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3701 \\ 0{,}2701 & 0{,}2 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 92{,}5583 \\ 30 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 185{,}1166 \\ 100 \end{pmatrix}$$

y el vector de los coeficientes de trabajo directo:

$$l = (0{,}10804 \text{ , } 0{,}8)$$

La solución de

$$(v_1, v_2)\ (I - A) = l$$

es

$$\begin{cases} v_1 = 0{,}657583 \\ v_2 = 1{,}304214 \end{cases}$$

Antes de calcular los precios para $1 + \Pi = 1{,}5$ y $1 + \Pi = 1{,}75$, observamos que en un sistema de dos industrias homogeneizado los precios no pueden cruzarse nunca, salvo si $l_1 = l_2$, en cuyo caso son iguales cualquiera que sea el tipo de beneficio admisible Π. En efecto, si para un Π tuviéramos $p_1 = p_2 = p$,

$$\begin{cases} \left(1-(1+\Pi)a_{11}\right) p - (1+\Pi)a_{21}\ p = l_1 \\ \quad -(1+\Pi)a_{12}\ p + \left(1-(1+\Pi)a_{22}\right) p = l_2 \end{cases}$$

o aún

$$\begin{cases} p-(1+\Pi)\bar{a}\ p = l_1 \qquad (a_{11}+a_{21}=\bar{a}) \\ p-(1+\Pi)\bar{a}\ p = l_2 \qquad (a_{12}+a_{22}=\bar{a}) \end{cases}$$

de donde necesariamente debe ser $l_1 = l_2$.

Si 1+Π=1,5

$$I-(1+\Pi)A = \begin{pmatrix} 0{,}55 & -0{,}55515 \\ -0{,}40515 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

y la solución de

$$p\ \left(I-(1+\Pi)A\right) = (0{,}10804\ ,\ 0{,}8)$$

es:

$$\begin{cases} p_1 \approx 2{,}4971 \\ p_2 \approx 3{,}125 \end{cases}$$

y para 1 + Π = 1,75 tenemos:

$$\begin{cases} p_1 \approx 194{,}6735 \\ p_2 \approx 195{,}2080 \end{cases}$$

Se observa que:

$$\frac{p_1}{p_1 + p_2} \approx \frac{p_2}{p_1 + p_2} \approx 0{,}5$$

7.1. SOBRE CUANDO SE INTERSECAN LOS PRECIOS

Consideremos el sistema

$$p\left(I - \left(1+\Pi\right) A\right) = l$$

y supongamos que existe una tasa de beneficio Π, $\left(0 \le \Pi \le \frac{1}{\bar{a}} - 1\right)$ para la que

$$p_i = p_j = p$$

Por comodidad de exposición y sin pérdida de generalidad, podemos suponer

$$p_1 = p_2 = p$$

y el sistema se escribe del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \left(1+\Pi\right) a_{11}\right) p - \left(1+\Pi\right) a_{21}\ p - \left(1+\Pi\right) a_{31}\ p_3 - \cdots - \left(1+\Pi\right) a_{n1}\ p_n = l_1 \\
&\quad - \left(1+\Pi\right) a_{12}\ p + \left(1 - \left(1+\Pi\right) a_{22}\right) p - \left(1+\Pi\right) a_{32}\ p_3 - \cdots - \left(1+\Pi\right) a_{n2}\ p_n = l_2 \\
&\quad - \left(1+\Pi\right) a_{13}\ p - \left(1+\Pi\right) a_{23}\ p - \cdots - \left(1+\Pi\right) a_{n3}\ p_n = l_3 \\
&\qquad \vdots \qquad \cdots \\
&\quad - \left(1+\Pi\right) a_{1n}\ p - \left(1+\Pi\right) a_{2n}\ p - \cdots + \left(1 - \left(1+\Pi\right) a_n\right) p_n = l_n
\end{aligned}$$

que es equivalente a:

$$(*)_{22}\qquad \begin{cases} \left(1-(1+\Pi)(a_{11}+a_{21})\right)p-(1+\Pi)a_{31}\ p_3-\cdots-(1+\Pi)a_{n1}\ p_n=l_1 \\ \left(1-(1+\Pi)(a_{12}+a_{22})\right)p-(1+\Pi)a_{32}\ p_3-\cdots-(1+\Pi)a_{n2}\ p_n=l_2 \\ \quad -(1+\Pi)(a_{13}+a_{23})\,p+\cdots=l_3 \\ \qquad \vdots \qquad \cdots \\ \quad -(1+\Pi)(a_{1n}+a_{2n})\,p-\cdots+\left(1-(1+\Pi)a_{nn}\right)p_n=l_n \end{cases}$$

sistema este de n ecuaciones con n – 1 incógnitas, siendo la condición necesaria y suficiente para que admita solución, que exista, Π, $\left(0\leq\Pi<\frac{1}{\bar{a}}-1\right)$, tal que el determinante de la matriz ampliada sea nulo:

$$\begin{vmatrix} 1-(1+\Pi)(a_{11}+a_{12}) & 1-(1+\Pi)(a_{12}+a_{22}) & \cdots & 1-(1+\Pi)(a_{1n}+a_{2n}) \\ -(1+\Pi)a_{31} & -(1+\Pi)a_{32} & \cdots & -(1+\Pi)a_{3n} \\ \vdots & & & \\ -(1+\Pi)a_{n1} & -(1+\Pi)a_{n2} & \cdots & -(1+\Pi)a_{nn} \\ l_1 & l_2 & & l_n \end{vmatrix}=0$$

es decir, al sumar las dos primeras filas de la matriz I – (1+ Π) A, obtenemos una matriz de n – 1 filas y n columnas; los vectores columna de esta matriz son, pues, linealmente dependientes y la relación de dependencia lineal debe mantenerse para las componentes l_i del vector l.

Ejemplo numérico 2

Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad l = (0{,}3\,,\,0{,}6\,,\,0{,}9)$$

$$\forall j, \quad 1 \leq j \leq 3 \qquad\qquad \sum_i a_{ij} = \overline{a} = 0{,}6$$

Si tomamos $1+\Pi = 1{,}25$, tenemos:

$$I - (1+\Pi)\,A = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0 & -0{,}375 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}25 \\ -0{,}125 & -0{,}25 & 0{,}875 \end{pmatrix}$$

y se comprueba que la solución de

$$p\ \left(I - (1+\Pi)\,A\right) = l$$

es $p = (1{,}6\,,\,2{,}4\,,\,2{,}4)$, es decir,

$$p_2 = p_3$$

Sumando en $I - (1+\Pi)\,A$ la segunda y la tercera filas, la matriz queda como sigue:

$$\begin{pmatrix} 0{,}375 & 0 & -0{,}375 \\ -0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}625 \end{pmatrix}$$

en la que la tercera columna es igual a dos veces la segunda menos la primera, relación que se mantiene entre los

$$l_i: \; 0{,}9 = 2 \,.\, 0{,}6 - 0{,}3$$

y el determinante de la matriz ampliada es el siguiente.

$$\begin{vmatrix} 0{,}375 & 0 & -0{,}375 \\ -0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}625 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}9 \end{vmatrix} = 0$$

Se comprueba que en la matriz anterior la tercera fila

$$l = (0{,}3\ ,\ 0{,}6,\ 0{,}9)$$

es igual a 1,6 veces la fila 1 más 2,4 veces la fila 2, pero (1,6 , 2,4, 2,4) era, precisamente, el vector de precios que correspondía a $\Pi = 0{,}25$ y $w = 1$.

El sistema que acabamos de considerar que es homogeneizado nos muestra que en un tal sistema los precios pueden perfectamente cruzarse pero, sin embargo, dado que tienden a ser todos iguales cuando Π tiende a $\frac{1}{\bar{a}} - 1$, los precios relativos de las correspondientes mercancías no pueden ser "excesivamente distintos" una vez que se cruzan.

Para una tasa de beneficio $\Pi = 0$, lo que hace distintos los precios es la diferente configuración del vector l y de hecho el valor del excedente β es (tomando $w = 1$) precisamente L, cualesquiera que sean los l_i, lo que permitiría a la "sociedad de los trabajadores" repartir el excedente por unidad de trabajo desarrollado.

A medida que aumenta el tipo de beneficio, el trabajo pierde importancia en la determinación del vector de precios, y es por ello que en un sistema homogeneizado, a medida que aumenta Π, la diferencia entre los precios $|p_i - p_j|$ se hace cada vez más pequeña (se crucen estos o no) hasta llegar al límte de ser todos iguales cuando

$$\Pi = \frac{1}{\bar{a}} - 1 .$$

En el ejemplo numérico 2, si $\Pi = 0$, tenemos:

$$p_1 = 0{,}931036$$
$$p_2 = 1{,}551721$$
$$p_3 = 1{,}655169$$

para $\Pi = 0{,}25$ sabemos que $p = (1{,}6\ ,\ 2{,}4\ ,\ 2{,}4)$ y para $\Pi = 0{,}5$:

$$p_1 = 4{,}394344$$
$$p_2 = 5{,}492927$$
$$p_3 = 5{,}323909$$

Si normalizamos estos precios:

para $\Pi = 0$ $\quad p' = (0{,}225\ ,\ 0{,}375\ ,\ 0{,}4)$

para $\Pi = 0{,}25$ $\quad p' = (0{,}25\ ,\ 0{,}375\ ,\ 0{,}375)$

para $\Pi = 0{,}5$ $\quad p' = (0{,}2888\ ,\ 0{,}3611\ ,\ 0{,}35)$

Como se observa, y como era de esperar, las diferencias entre los precios relativos de las mercancías disminuyen a medida que aumenta el tipo de beneficio.

8. SOBRE EL DENOMINADO “SALARIO DE SUBSISTENCIA”

Supongamos ahora que los bienes que integran el llamado “salario de subsistencia” están incluidos en la tecnología del sistema; el trabajo es, pues, considerado como cualquier mercancía. Ello no implica en absoluto que se trate de una “*economía de esclavos*” ni que los "*hombres sean tratados como caballos*", como veremos más adelante.

La dificultad fundamental (intrínseca al problema de este planteamiento) reside en definir qué se entiende por "subsistencia", cuestión que dependerá de los contextos histórico, institucional, etc.; aparte de la relación de "poder" que existe entre la "sociedad del trabajo" y la "sociedad del capital".

Supongamos por un momento que han sido perfectamente definidos los bienes de subsistencia; a cada unidad de trabajo debe corresponder un conjunto de bienes proporcionados por las distintas industrias, y dado un posible tipo de beneficio Π, este debe afectar también a estos bienes, así como al trabajo empleado. En cualquier caso, si el tipo de beneficio es positivo (lo que supone que existe excedente), parte de este corresponde al trabajo y el trabajador puede utilizarlo mejorando su "nivel de subsistencia" o bien como "acumulación de capital".

De las consideraciones anteriores deducimos la conveniencia de ampliar la matriz de transacciones introduciendo una nueva columna relativa a las mercancías consumidas por el trabajo y una fila relativa a las cantidades de trabajo empleadas.

Por comodidad de exposición y coherencia con notaciones anteriores, el vector columna será

$$(q_{1,n+1}, q_{2,n+1}, \ldots, q_{n,n+1}, q_{n+1,n+1})$$

el cual representa el salario de subsistencia del sistema; el vector fila

$$(q_{n+1,1}, \ldots, q_{n+1,n+1})$$

representa las cantidades de trabajo utilizadas por las distintas industrias. El término

$$q_{n+1,n+1}$$

representa las unidades de trabajo consumidas por el propio trabajo durante el período considerado y que es necesario “reponer” para asegurar el posterior funcionamiento del sistema; de todas formas, no existiría problema alguno en considerar

$$q_{n+1,n+1} = 0$$

Asimismo,

$$Q_{n+1} = q_{n+1,1} + ... + q_{n+1,n} + q_{n+1,\, n+1}$$

será la cantidad total de trabajo utilizado por las industrias 1, 2,..., n, n+1, y suponemos

$$\beta_{n+1} = 0$$

lo que significa que no existe trabajo excedente.

En lo que sigue continuaremos denotando como A la matriz tecnológica del sistema original con autovalor máximo $\bar{a} < 1$, y ahora denotaremos A^+ la matriz ampliada, obtenida al aumentar la matriz de transacciones con una columna relativa a las distintas mercancías de subsistencia y con una fila relativa a las cantidades de trabajo empleadas por las distintas industrias; $\bar{a}^+ \leq 1$ representará el autovalor máximo de A^+. Evidentemente

$$\bar{a}^+ > \bar{a}$$

Si suponemos ahora que la remuneración del trabajo se encuentra íntegramente dentro del sistema y que el tipo de beneficio admisible Π, $\left(0 \leq \Pi \leq \frac{1}{\bar{a}^+} - 1\right)$, el sistema de precios se escribiría

$$p\left(I-(1+\Pi)A^{+}\right)=0$$

Suponemos que el sistema fue previamente homogeneizado, es decir, la matriz A^{+} es tal que $\forall j,\ 1 \le j \le n,$

$$\sum_i a_{ij}^{+}=\overline{a}^{+}$$

para que el sistema tenga solución con significado económico

$$\left(\det\left(I-(1+\Pi)A^{+}\right)=0\right)$$

Π debe ser igual a $\tilde{\Pi}=\frac{1}{\overline{a}^{+}}-1$, en cuyo caso las soluciones son del tipo

$$p=\alpha\overline{1}=(\alpha,...,\alpha),\ \ \alpha>0$$

y las mercancías –incluida la mercancía trabajo– se intercambian "una a una", es decir, los precios son todos iguales.

Si $\tilde{\Pi}>0$, lo que equivale a $\overline{a}^{+}<1$, es decir, si el sistema dispone de excedente positivo después de la remuneración del trabajo, el valor del excedente, tomando p = (1,..., 1,..., 1), será

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i$$

El sistema se escribe:

$$(*)_{23} \qquad \begin{cases} \left(1+\tilde{\Pi}\right)\left(q_{11}+\cdots+q_{n1}+q_{n+1,1}\right)=Q_1 \\ \cdots \\ \left(1+\tilde{\Pi}\right)\left(q_{1j}+\cdots+q_{nj}+q_{n+1,j}\right)=Qj \\ \cdots \\ \left(1+\tilde{\Pi}\right)\left(q_{1,n+1}+\cdots+q_{n,n+1}+q_{n+1,n+1}\right)=Q_{n+1} \end{cases}$$

poniendo

$$q_i^+ = q_{i1} + \ldots + q_{in} + q_{i,\,n+1}, \quad 1 \leq i \leq n+1$$

y teniendo en cuenta que

$$Q_i = q_i^+ + \beta_i$$

sumando por columnas obtenemos

$$\tilde{\Pi}\left(q_1^+ + \ldots + q_n^+ + q_{n+1}^+\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i$$

siendo la parte del excedente que corresponde a cada industria j $1 \leq j \leq n+1$:

$$\tilde{\Pi}\left(q_{1j} + \ldots + q_{nj} + q_{n+1,j}\right)$$

Para un vector

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \\ Q_{n+1} \end{pmatrix}$$

de producción total fijo, la matriz tecnológica A^+ aumenta o disminuye, según lo hagan los consumos intermedios y, en particular, según lo haga la columna n+1, que representa (en cantidades) la remuneración del trabajo. Como caso extremo, si la columna n+1 de $\left(q_{ij}^+\right)$ es igual al excedente del sistema, entonces el autovalor máximo $\bar{a}^+$ de A^+ es igual a 1, lo que se corresponde con $\tilde{\Pi}$ =0.

Ejemplo numérico 3

Con objeto de ilustrar lo anterior, consideremos el sencillo ejemplo siguiente de tres industrias y de una cuarta industria trabajo representadas por:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 & 4{,}4 \\ 2 & 2 & 6 & 6{,}6 \\ 4 & 4 & 3 & 0{,}2 \\ 10 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} 22{,}6 \\ 3{,}4 \\ 18{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 30 \\ 22 \end{pmatrix}$$

siendo la matriz tecnológica:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}\overline{3} \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}0\overline{09} \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}\overline{09} \end{pmatrix}$$

Suponemos que el sistema ha sido previamente homogeneizado, de modo que

$$\forall j, \;\; 1 \le j \le 4, \qquad \sum_i a_{ij}^+ = \bar{a}^+ = 0{,}6$$

al que corresponde un tipo máximo de beneficio $\tilde{\Pi} = \dfrac{1}{\bar{a}^+} - 1 = 0{,}\overline{6}$

que admite p = (1,1,1,1) como autovector asociado por la izquierda, solución de

$$p\left(I-\left(1+\tilde{\Pi}\right)A\right)=0$$

El valor total del excedente es $\sum_{i=1}^{4}\beta_i = 44{,}8$ unidades monetarias

de las que corresponden a cada industria j, $1 \le j \le 4$: $\tilde{\Pi}\left(\sum_i q_{ij}\right)$

$0{,}\overline{6}\cdot 24 = 16$ a la industria 1

$0{,}\overline{6}\cdot 12 = 8$ a la industria 2

$0{,}\overline{6}\cdot 18 = 12$ a la industria 3

$0{,}\overline{6}\cdot 13{,}2 = 8{,}8$ a la industria trabajo

cuya suma es, precisamente, 44,8.

Observamos, por otra parte, que en la cuarta columna de q_{ij}^{+}, que corresponde al trabajo,

$$\sum_i q_{i4}^{+} + \tilde{\Pi}\left(\sum q_{i4}^{+}\right) = 13{,}2 + 8{,}8 = 22$$

que es, precisamente, la cantidad total de unidades de trabajo empleadas; hecho este que no debería sorprendernos, pues de la última ecuación de $(*)_{23}$, teníamos:

$$\left(1+\tilde{\Pi}\right)\left(q_{1,n+1}+\ldots+q_{n,n+1}+q_{n+1,n+1}\right)=Q_{n+1}$$

que es la cantidad total de trabajo empleado.

APÉNDICE MATEMÁTICO

1. ÁLGEBRA DE BANACH *Mn* (R)

Denotaremos *Mn* (R) el conjunto de matrices cuadradas de orden *n* con coeficientes reales. Para

$$A = (a_{ij}) \in Mn\ (\mathrm{R})$$

i es el índice de la fila y j el de la columna.

Dados

$$A = (a_{ij}) \in Mn\ (\mathrm{R})$$
$$B = (b_{ij}) \in Mn\ (\mathrm{R})$$
$$\lambda \in \mathrm{R}$$

y con las operaciones habituales

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$
$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

de suma y producto por un escalar, *Mn* (R) es un espacio vectorial sobre R.

Además, en *Mn* (R) disponemos de otra ley de composición interna, producto de matrices cuadradas:

$$A \,.\, B = (a_{ij}) \,.\, (b_{ij}) = (\gamma_{ij})$$

donde

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

el producto es asociativo $\forall\, A, B, C \in\ Mn$ (R):

$$A\,.\,(B\,.\,C) = (\mathrm{A}\,.\,B)\,.\,C$$

es distributivo respecto de la suma $\forall\, A, B, C \in\ Mn$ (R):

$$A\,(B + C) = \mathrm{A}\,.\,B + A\,.\,C$$

admite un elemento neutro, matriz identidad I.

Proposición 1.

Las aplicaciones

$$Mn\,(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}_{+} = \{x \in \mathrm{R}\ /\ x \geq 0\}$$

$$\text{a) } A = (a_{ij}) \to \|A\| = \sup_{j} \sum_{i=1}^{n} |\, a_{ij} |$$

$$\text{b) } A = (a_{ij}) \to \|A\|^{*} = \sup_{i} \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} |$$

son normas en Mn (R).

Demostremos a) –la demostración de b) es equivalente–:

1) $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{j} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | = 0 \Leftrightarrow \forall\, i, j\ \ a_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2) $\forall\lambda \in$ R, $\|\lambda A\| = \sup_j \sum_{i=1}^{n} |\lambda\, a_{ij}| = |\lambda|\, \|A\|$

3) $\forall\, A, B \in$ *Mn* (R), $\|A+B\| = \sup_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \le \sup_j \sum |a_{ij}| + \sup_j \sum |b_{ij}| = \|A\| + \|B\|$

Mn (R) es, pues, un espacio vectorial normado.

Proposición 2.

Mn (R) es completo. Tenemos que demostrar que toda sucesión de Cauchy $(A^t)_t$ de elementos de *Mn* (R) es convergente en *Mn* (R).

Denotando $A^t = \left(a_{ij}^t\right)$ como $(A^t)_t$ es de Cauchy en *Mn* (R),

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, t_0 \in \mathrm{N} \,/\quad p \ge t_0, \quad q \ge t_0 \Rightarrow \left\|A^p - A^q\right\| < \varepsilon$$

pero

$$\left\|A^p - A^q\right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \sup_j \sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij}^p - a_{ij}^q \right| < \varepsilon$$

en particular, fijados i y j,

$$\left| a_{ij}^p - a_{ij}^q \right| < \varepsilon$$

por lo que la sucesión de números reales $\left(a_{ij}^t\right)_t$ es de Cauchy en R completo y converge a un número real que denotaremos a_{ij}.

Demostremos ahora que $(A^t)_t$ converge a $A=(a_{ij})$ en Mn (R). Sea $\varepsilon \in$ R, $\varepsilon > 0$, como $\left(a_{ij}^t\right)_t$ converge en R a a_{ij},

$$\exists\, t\,(i, j) \in \mathrm{N} \;/\quad t \geq t\,(i, j) \;\Rightarrow\; \left| a_{ij}^t - a_{ij} \right| < \frac{\varepsilon}{n}$$

tomemos

$$t_0 = \sup\ \left\{ t\,(i, j),\quad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n \right\}$$

entonces $\forall t \geq t_0$ y $\forall j$, $1 \leq j \leq n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij}^t - a_{ij} \right| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

de donde resulta

$$\sup_j \left(\sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij}^t - a_{ij} \right| \right) < \varepsilon$$

o aun

$$\left\| A^t - A \right\| < \varepsilon$$

lo que demuestra que la sucesión $(A^t)_t$ converge a A.

Proposición 3.

$$\forall\ A, B \in\ Mn\ (\mathrm{R}),\quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Sea $A \, . \, B = (\gamma_{ij})$, con

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, b_{kj}$$

tenemos:

$$\|A \cdot B\| = \| (\gamma_{ij}) \| = \sup_j \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \gamma_{ij} \right| \right) = \sup_j \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, b_{kj} \right| \leq \sup_j \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| a_{ik} \, b_{kj} \right| \leq$$

$$\leq \sup_j \sum_{i=1}^{n} \left| b_{ij} \right| \left(\sum_{k=1}^{n} \left| a_{ki} \right| \right) \leq \|A\| \sup_j \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} \right) = \|A\| \cdot \|B\|$$

La norma elegida es, pues, "compatible" con el producto de matrices. Además, es evidente que la norma de la matriz de identidad es 1:

$$\|I\| = 1$$

Resumiendo lo expuesto en las proposiciones 1, 2 y 3, podemos afirmar que *Mn* (R) es un *álgebra de Banach con unidad I*.

Cabe resaltar que, respecto de la norma

$$\|A\|^{*} = \sup_i \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|$$

que denominaremos "*norma dual*", *Mn* (R) es también un álgebra de Banach con unidad *I*. La demostración es similar a la efectuada y utilizaremos una u otra según convenga al contexto en el que nos encontremos.

2. EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO

Demostramos que Mn (R) es un álgebra de Banach y luego en particular es un *espacio métrico completo* dotado de la distancia

$$d\colon Mn\,(\mathrm{R}) \times Mn\,(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}_+$$
$$(A, B) \to d\,(A, B) = \|A - B\|$$

Definición.

Sea (E, d) un espacio métrico –por ejemplo, Mn (R)– y

$$\varphi\colon E \to E$$
$$x \to \varphi\,(x)$$

diremos que φ es una contracción en E si

$$\exists\, k \in \mathrm{R}, \quad 0 \leq k < 1$$

tal que

$$\forall x, y \in E, \qquad d\,(\varphi\,(x), \varphi\,(y)) \leq k\, d\,(x, y)$$

Definición.

Diremos que $\bar{x}$ es punto fijo de φ, contracción en E, si

$$\varphi\,(\bar{x}) = \bar{x}$$

Teorema del punto fijo.

En un espacio métrico completo, toda contracción φ admite un punto fijo único $\bar{x}$ y, además, $\forall x_0 \in E$ la sucesión iterativa construida a partir de x_0:

$$x_0,\ x_1 = \varphi(x_0), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \dots$$

converge a $\bar{x}$.

En efecto, sea

$$x_0 \in E \text{ y } x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n \geq 1$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}
& d(x_1, x_2) = d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq k\, d(x_0, x_1) \\
& d(x_2, x_3) = d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq k\, d(x_1, x_2) \leq k^2\, d(x_0, x_1) \\
& \dots \\
& d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n\, d(x_0, x_1) \\
& \dots \\
& d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\
& \qquad \leq k^n\, d(x_0, x_1)\, (1 + k + \dots + k^p + \dots) \leq \\
& \qquad \leq k^n\, d(x_0, x_1) \cdot \frac{1}{1+k} \quad \text{(porque } 0 \leq k < 1\text{)}
\end{aligned}$$

término este que tiende a cero cuando

$$n \to +\infty$$

por lo que la sucesión $(x_n)_n$ es de Cauchy en E completo, y admite un límite $\bar{x}$.

Dado que toda contracción es una aplicación continua (incluso uniformemente continua), tenemos:

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \bar{x}$$

y $\bar{x}$ es punto fijo de φ.

Demostremos que $\bar{x}$ es único. Supongamos que $\bar{x}'$ también es punto fijo. Tenemos:

$$d(\bar{x},\bar{x}') = d(\varphi(\bar{x}),\varphi(\bar{x}')) \leq k\, d(\bar{x},\bar{x}')$$

y siendo k, $0 \leq k < 1$, lo anterior sólo puede darse si

$$d(\bar{x},\bar{x}') = 0$$

es decir, que $\bar{x} = \bar{x}'$.

Teorema 1.

Para que $A \in Mn\,(\mathrm{R})$ sea inversible en $Mn\,(\mathrm{R})$, es necesario y suficiente que exista $D \in Mn\,(\mathrm{R})$, D inversible y tal que

$$\left\| I - A\,D^{-1} \right\| = K < 1$$

En efecto, si A es inversible, tomando $D = A$ tenemos

$$\left\| I - A \cdot A^{-1} \right\| = 0 < 1$$

Recíprocamente, supongamos que existe D inversible tal que

$$\| I - A D^{-1} \| = k < 1$$

Entonces, la aplicación

$$\Phi : Mn\,(\mathrm{R}) \to Mn\,(\mathrm{R}) :$$
$$\Phi\,(x) = D^{-1} + x\,\left(I - A D^{-1}\right)$$

es tal que

$$\| \Phi\,(x) - \phi\,(x') \| = \| (x - x')\left(I - A D^{-1}\right) \| \le \| x - x' \| \cdot \| I - A D^{-1} \|$$

(porque Mn (R) es un álgebra de Banach).

Siendo

$$\| I - A D^{-1} \| = k < 1$$

tenemos

$$d\,\left(\Phi\,(x), \Phi\,(x')\right) = \| \Phi\,(x) - \Phi\,(x') \| \le k\,\| x - x' \| = k\,d\,\left(x, x'\right)$$

y Φ es contracción en Mn (R) completo, por lo que admite un punto fijo único $\bar{x}$.

Siendo $\bar{x}$ punto fijo de Φ,

$$\Phi\,(\bar{x}) = \bar{x}$$

o aun

$$D^{-1} + \bar{x}\,\left(I - A D^{-1}\right) = \bar{x}$$

de donde

$$\bar{x}\ A\,D^{-1} = D^{-1}$$

y multiplicando por D a la derecha,

$$\bar{x}\ A = I$$

y $\bar{x}$ es la inversa de A.

Además, $\forall\, x_0 \in Mn$ (R) la sucesión

$$x_0,\ x_1 = \Phi\,(x_0), \ldots,\ x_n = \phi\,(x_{n-1}), \ldots$$

converge a

$$\bar{x} = A^{-1} \qquad \text{(Teorema del punto fijo)}$$

Corolario.

Con las anotaciones del teorema anterior $\forall\, l \in R^n$,

$$\begin{aligned} \varphi : R^n &\longrightarrow R^n \\ p &\longrightarrow lD^{-1} + p\left(I - AD^{-1}\right) \end{aligned}$$

es una contracción en R^n que admite un punto fijo único $\bar{p}$ solución de $pA = l$, $\forall\ p^0 \in R^n$, $\bar{p}$ es el limite de la sucesión iterativa:

$$p^0,\ p^1 = \varphi\left(p^0\right), \ldots\ldots,\ p^n = \varphi\left(p^{n-1}\right), \ldots\ldots$$

En efecto, tomando como norma en R^n, $\|p\| = \sup_i |p_i|$ tenemos:

$$\|\varphi(p) - \varphi(p')\|_{R^n} = \|(p - p')(I - AD^{-1})\|_{R^n} \le \|I - AD^{-1}\|_{Mn(R)} \|p - p'\|_{R^n}$$
$$= k\|p - p'\| \qquad con \quad k < 1$$

Por lo que φ es una contracción en R^n, que admite un punto fijo único $\overline{p}$ al que para $\forall \ p^0 \in R^n$ converge la sucesión iterativa:

$$p^0,\ p^1 = \varphi(p^0), \ldots\ldots, p^n = \varphi(p^{n-1}), \ldots\ldots$$

y tenemos $\varphi(\overline{p}) = \overline{p}$, $lD^{-1} + \overline{p} - \overline{p}AD^{-1} = \overline{p}$ a lo que es lo mismo $\overline{p}A = l$.

Definición.

Sea $A = (a_{ij}) \in Mn$ (R), diremos que A es de diagonal dominante por columnas si $\forall\, j$, $1 \le j \le n$,

$$|a_{jj}| > \sum_{i \ne j} |a_{ij}|$$

De forma similar diremos que A es diagonal dominante por filas si $\forall\, i$, $1 \le i \le n$,

$$|a_{ii}| > \sum_{j \ne i} |a_{ij}|$$

Definición.

Sea $A = (a_{ij}) \in Mn$ (R), diremos que A es de tipo Leontief si

$$\begin{cases} a_{ii} > 0 & \forall i \\ a_{ij} \le 0 & \text{si } i \ne j \end{cases}$$

Teorema 2.

Si $A = (a_{ij}) \in Mn$ (R) es Leontief diagonal dominante por columnas, A es inversible en Mn (R) y, además,

$$A^{-1} \geq 0$$

Siendo A diagonal dominante y Leontief, $\forall\, j, \quad 1 \leq j \leq n$,

$$a_{jj} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$$

consideraremos, entonces, la matriz $D = (d_{ij})$ definida por

$$d_{jj} = a_{jj}$$
$$d_{ij} = 0 \qquad \text{si } i \neq j.$$

Necesariamente

$$d_{jj} = a_{jj} > 0$$

por lo que la matriz diagonal D es inversible en Mn (R) y siendo A diagonal dominante, $\exists\, k \in$ R, $0 \leq k < 1$, tal que

$$\left\| I - A\,D^{-1} \right\| = \sup_j \left[\frac{1}{a_{jj}} \left(\sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right) \right] \leq k < 1$$

por lo que la aplicación

$$\Phi : Mn\,(\mathrm{R}) \rightarrow Mn\,(\mathrm{R}) :$$

$$\Phi\,(x) = D^{-1} + x\,\left(I - A\,D^{-1}\right)$$

es una contracción en Mn (R) y admite un punto fijo único $\bar{x} = A^{-1}$.

Además, dado que $D^{-1} \geq 0$ y $\left(I - A\,D^{-1}\right) \geq 0$ partiendo de $x_0 \geq 0$, la sucesión $x_0, x_1 = \Phi\,(x_0),\ldots, x_n = \phi\,(x_{n-1}),\ldots$ es tal que $x_n \geq 0 \quad \forall\, n$ y, en consecuencia, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = \bar{x} = A^{-1}$

Para las matrices Leontief diagonal dominantes por filas tenemos un resultado equivalente considerando ahora la aplicación

$$\Phi : Mn\,(\mathrm{R}) \to Mn\,(\mathrm{R}) :$$
$$\Phi\,(x) = D^{-1} + \left(I - D^{-1}A\right)\,x$$

Teorema 3.

Si $A \in Mn$ (R) y λ es autovalor de A, se tiene $|\lambda| \leq \|A\|$.

Sea λ autovalor de A, entonces $\exists\, x \in \mathrm{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $A\,x = \lambda\,x$ o, lo que es lo mismo, $(\lambda\,I - A) = 0$ o $\lambda\,I - A$ no inversible en Mn (R).

Entonces (teorema 1), para toda matriz D inversible se tiene:

$$\left\| I - (\lambda\,I - A)\,D^{-1} \right\| \geq 1$$

si $\lambda = 0$, ello significa que A es no inversible y, obviamente,

$$|\lambda| = 0 \leq \|A\|$$

Supongamos $\lambda \neq 0$ y consideremos la matriz diagonal $D = (d_{ij})$ donde

$$d_{ii} = \lambda \quad \text{y} \quad d_{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

Tenemos $\left\| I - (\lambda\, I - A)\, D^{-1} \right\| = \sup_j \left[\frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \right] = \frac{1}{\lambda} \|A\|$ y como debe ser $\frac{1}{|\lambda|} \|A\| \geq 1$, resulta $|\lambda| \leq \|A\|$.

Teorema 4.

a) Sea $A \in Mn$ (R), $A \geq 0$ y tal que $\forall\, j$, $1 \leq j \leq n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \bar{a} = \|A\|$$

entonces $\bar{a}$ es autovalor real máximo de A que admite $\bar{1} = (1,...,1)$ como autovector por la izquierda.

b) Sea $A \in Mn$ (R), $A \geq 0$ y $\lambda \in$ R, tal que $\lambda > \|A\|$ entonces $(\lambda\, I - A)$ es inversible y $(\lambda\, I - A)^{-1} \geq 0$.

Demostración.

a) Resulta que $\bar{1}\ A = \bar{a}\ \bar{1}$ y $\bar{a}$ es autovalor real. Por otra parte, dado que para todo autovalor λ, $|\lambda| \leq \|A\|$ (teorema 3), resulta que $\bar{a}$ es autovalor máximo.

b) Consideremos la matriz $D = (d_{ij})$ donde $d_{ii} = \lambda$ y $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Tenemos que $\left\| I - (\lambda\, I - A)\, D^{-1} \right\| = \frac{\|A\|}{\lambda} < 1$ y la aplicación

$$\Phi : Mn\,(\mathrm{R}) \to Mn\,(\mathrm{R}) :$$
$$\Phi\,(x) = D^{-1} + x\,\left(I - (\lambda\, I - A)\,D^{-1}\right)$$

es una contracción en Mn (R) que admite un punto fijo único $\bar{x} = (\lambda\, I - A)^{-1}$ y dado que $D^{-1} \geq 0$ y $I - (\lambda\, I - A)\,D^{-1} \geq 0$, partiendo de $x_0 \geq 0$, la sucesión

$$x_0,\, x_1 = \Phi\,(x_0), \ldots,\, x_n = \Phi\,(x_{n-1}), \ldots$$

es tal que $x_n \geq 0 \quad \forall n$, por lo que $\bar{x} = (\lambda\, I - A)^{-1} = \lim\, x_n \geq 0$.

Corolario.

El autovalor máximo $\bar{a}$ de $A \geq 0$ es el extremo inferior del conjunto:

$$T\,(A) = \left\{a \in R \,/\, \forall\, \lambda \in (a, +\infty),\ (\lambda\, I - A) \text{ inversible y } (\lambda\, I - A)^{-1} \geq 0\right\}$$

Teorema 5 (de Perron-Frobenius).

Toda matriz $A \in Mn$ (R), $A \geq 0$, A irreducible admite un autovalor máximo $\bar{a}$ real y estrictamente positivo, al que corresponde un autovector $\bar{x}$ positivo (admitido por sobradamente conocido).

REFERENCIAS

BOURBAKI (1967): *Thèories spectrales*, cap. 1: "Algèbres normées". Paris: Hermann.

DEBREU, G.; HERSTEIN, I.N. (1953): "Non Negative Square Matrices", *Econometrica*, 21, pp. 597-607.

GANTMACHER (1966): *Thèorie de matrices*, t. 2. Paris: Dunod.

LEONTIEF, V. (1951): *The Structure of American Economy 1919-1929*. New York: Oxford University Press.

MADDOX, J.J. (1980): "Infinite Matrices of Operators", *Lectures Notes in Mathematics*, 786. Springer Verlag.

MCKENZIE, L. (1959): "Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory", en Arrow, Karlin y Suppes [ed.]: *Mathematical Methods in the Social Sciences*. Stanford University Press.

PASSINETTI, L. (1983): *Lecciones de teoría de la producción*. Fondo de Cultura Económica.

QUIÑOÁ, J.L. (1983): *Inversibilidad en álgebras de Banach de matrices infinitas y aplicación a los sistemas de ecuaciones de orden infinito*. (Tesis doctoral). Zaragoza.

QUIÑOÁ, J.L. (1992): "Sur un type de matrice infinie de diagonale dominante dans la thèorie économique", *European Meeting of the Econometric Society*. Bruselas.

SCHAEFER, H.H. (1975): *Espacios vectoriales topológicos*. Teide.

SRAFFA, P. (1975): *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Oikos-tau.