

# Evaluación de la eficiencia comparativa: Indicadores y técnicas de análisis

Joaquim Vergés

4ª edición

**UAB**  
Universitat Autònoma  
de Barcelona



## Evaluación de la eficiencia comparativa: Indicadores y técnicas de análisis

4ª edición, Diciembre 2014

Joaquim Vergés-Jaime © <sup>1</sup>

Departament d'Economía de l'Empresa

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA  
Campus Bellaterra, Edif. B  
08193 Cerdanyola del Vallés (Barcelona)



<sup>1</sup> Evaluación de la eficiencia comparativa de empresas y entidades productivas: Indicadores y técnicas de análisis by Joaquim Vergés-Jaime is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/). Se agradecerá sinceramente cualquier comentario sobre esta versión: [joaquim.verges@uab.es](mailto:joaquim.verges@uab.es)

# Índice

1. Diferentes dimensiones del concepto de *eficiencia*, y requisitos para comparaciones válidas, 6
  - Eficiencia productiva ‘estándar’: Producir con los costes mínimos, 8
  - La tercera dimensión: Eficiencia de adaptación/respuesta a los cambios, 10
  - Alternativas de análisis: Temporal (longitudinal), y comparación entre empresas (horizontal), 12
  - Requisitos de homogeneidad, 12
  - La relación entre (indicador de) Eficiencia y nivel de Calidad (o Eficacia), 14
  - Condiciones adicionales en la comparación entre empresas públicas y privadas, 15
2. Indicadores para medir la eficiencia productiva de cualquier empresa o entidad productiva
  - Indicadores de “Resultados” (beneficios), 18
  - Indicadores de Costes Medios, 20
  - Indicadores de Productividad, 21
3. El cálculo de la productividad global en la práctica
  - Productividad Total de los Factores: Análisis longitudinal, 27
  - Cálculo de los IPG utilizando valores monetarios, 29
  - Los cálculos de los IPG por aproximación, 31
  - El cálculo por aproximación, cuando se opta por determinar directamente las tasas de variación de la productividad, 35
4. Indicadores de productividad global, en la comparación entre empresas
  - El esquema básico (longitudinal), cambiando la perspectiva, 37
  - Cálculo del diferencial de productividad A-B a partir de valores monetarios, 38
  - Comparación A-B no limitada a un año, 39
  - Comparación entre varias empresas, a lo largo de varios años, 40
  - El *análisis bidimensional* (cross section & cross time), 41
  - Componentes del diferencial de productividad entre A y B, 42
  - Cálculo por aproximación en la comparación entre empresas, 43
5. De los indicadores de productividad parcial (del Trabajo, ..etc.) a la comparación de productividad entre países
  - Productividad parcial o aparente de un factor, 46
  - Relación entre los indicadores de Productividad Parcial y el de Productividad total (IPG, TFP), 48
  - Indicadores de productividad en la comparación entre países, 49
6. Recapitulación: Relación entre Productividad, Coste Medio y Rentabilidad, 51
7. Técnicas o metodologías de análisis
  - Análisis longitudinal o temporal (‘cross time’), 56
  - Eficiencia comparativa: empresa “A” <----> empresa “B” (cross section simple), 59
  - Eficiencia comparativa: varias empresas A <-----> varias empresas B, 61
    - *Comparación de medias (análisis de la varianza)*, 61
    - *Utilizar una función polinómica (lineal)*, 62
    - *Funciones multiplicativas (‘translog’)*, 64
    - *Modelos tipo ‘función de producción’*, 66
    - *Modelos frontera (Funciones de producción frontera)*, 68
    - *Función de producción frontera, no paramétrica.- AED (DEA)*, 71
    - *Comparación AED vs. Función frontera paramétrica*, 73

- Análisis (o Regresión) con Datos de Panel, 75

## 8. Sobre la *fiabilidad* y *la relevancia* de los resultados cuantitativos, 78

### Anexo I: Sobre Indicadores de Productividad Parcial, 80

- Demostración de la relación entre el indicador de productividad global,  $\Pi^x$ , y los indicadores de productividad parcial de cada factor,  $\Pi_j^x$ , 80
- Discusión sobre la Productividad Parcial Aparente de los bienes de Capital o Equipos (costes de amortizaciones), y Nivel de Ocupación, 81

### Anexo II: El índice de Malmquist aplicado a la comparación de productividad entre empresas, 85

### Referencias citadas, 88

## INTRODUCCION

---

El presente texto responde a la idea de un manual o guía tanto para leer con fundamento como para efectuar estudios de eficiencia comparativa de empresas y otras organizaciones económicas. En primer lugar (apartados 3 a 6) se exponen los diferentes *indicadores* más frecuentemente utilizados en la práctica para medir la eficiencia; y se subraya tanto que cada uno de ellos nos mide la eficiencia entendida desde una perspectiva distinta, como que están de hecho relacionados entre sí. Y después (apartados 7 y 8) se exponen las *técnicas de análisis* también más frecuentes en los estudios o trabajos de investigación; es decir, las *metodologías más usuales* en los artículos de revistas científicas: cómo se suelen utilizar los indicadores para llegar a conclusiones fiables sobre la eficiencia comparativa, tanto en análisis longitudinal (en el tiempo) como –y sobre todo– en estudios *cross section* (comparar la eficiencia de dos o más tipos de empresas; públicas y privadas, por ejemplo). Previamente (apartados 1 y 2) se presentan las diferentes caras del concepto de eficiencia, y las condiciones que deberían darse siempre para que un cálculo y comparación de indicadores nos hable realmente de que la empresa A es más eficiente que la empresa B.

Dado el tema y el enfoque, concretamente los indicadores de productividad ocupan una parte destacada del texto. No solo porque en cierta manera miden el concepto más básico de *eficiencia* ('producir algo más, con los mismos recursos productivos, o producir lo mismo con algo menos de recursos') sino porque son utilizados tanto para evaluar la eficiencia comparativa de empresas y otras organizaciones económicas como para fundamentar los índices de productividad que se suelen publicar periódicamente sobre sectores de actividad o sobre países enteros.

Bellaterra-Cerdanyola (Barcelona),  
Diciembre 2014

English Abstract:

## **Evaluating comparative efficiency: Measuring variables and Analytical Techniques**

This monograph intends to be a handbook or guide regarding efficiency analysis tools, for those interested in either reading –and properly understanding- specialised papers on the topic, or in carrying out efficiency analysis studies.

In points 3 to 6 the more usual efficiency *measures* in the topic's literature are presented and discussed; and it is highlighted the fact that each of them measure companies' efficiency from a different perspective, at the time that, nevertheless, they are in fact formally interrelated.

Then, points 7 and 8 are devoted to explain the more usual techniques for efficiency/productivity analysis we can find in research works; that is those methodologies more usual in academic journals' articles: How the referred efficiency measures or indexes are applied (which means mainly the use of econometric tools) in order to get reliable conclusions on companies' comparative efficiency. The approach covers both longitudinal analysis (comparison over time) and cross-section analysis (comparing the relative efficiency of two or more types of companies; public-owned and private ones, f. e.).

The above is preceded (points 1 and 2) by a briefing on the different facets of the efficiency concept (what we talk about when we talk of efficiency), and a discussion on the necessary pre-conditions that should be present for any calculation and comparison of efficiency indexes may actually be interpreted as properly telling us 'company A is more efficient than company B'.

Bellaterra-Cerdanyola (Barcelona),  
December, 2014

## DIFERENTES DIMENSIONES DEL CONCEPTO DE EFICIENCIA, Y REQUISITOS PARA COMPARACIONES VÁLIDAS

---

Las proposiciones de la economía normativa sobre el comportamiento socialmente óptimo ('eficiente') de una empresa pueden resumirse en que ésta opere con *eficiencia asignativa* a la vez que con *eficiencia productiva*. La primera se refiere al comportamiento de la empresa respecto al conjunto de la sociedad: En economía del bienestar –y bajo el típico supuesto simplificador de que la empresa en cuestión produce un solo bien- se considera que la eficiencia asignativa con la que opera será tanto más alta como próximo esté su precio de venta al coste medio mínimo que técnica y socialmente es posible, para el volumen de producto a suministrar de forma estable; es decir, el coste medio de máxima eficiencia productiva a largo plazo <sup>2</sup>. Y esta última –la eficiencia productiva- se centra en el uso de los factores productivos por parte de la empresa; concretamente desde la perspectiva de la minimización de sus costes totales, dadas las unidades de output producidas. Y es a ésta a la que generalmente se refieren los estudios de eficiencia comparativa entre empresas.

Centrándonos en lo que sigue en la eficiencia productiva (o microeconómica, si se prefiere) ésta comporta a su vez dos dimensiones o componentes. Utilizando la terminología habitual: *eficiencia de gestión* (o a corto plazo, considerando la dimensión o estructura de la empresa como dada) y *eficiencia de escala* (si la empresa tiene o no la dimensión o estructura más adecuada para el volumen de producción requerido por la demanda).

Sin embargo, cuando en la práctica se pretende bien analizar el cambio en la eficiencia de una empresa a lo largo del tiempo, o bien comparar la eficiencia de varias empresas y explicar las diferencias observadas, se hace necesario introducir en el contexto habitual del análisis microeconómico una tercera dimensión o componente de lo que se entiende por 'que una empresa funcione eficientemente': la *eficiencia de adaptación-respuesta a los cambios*. Y se hace imprescindible además introducir el elemento 'calidad' del producto o servicio ofrecido, puesto que es una variable de gestión, no algo fijado o dado para un determinado bien (como, por simplificación, supone el concepto habitual de eficiencia productiva en los manuales de economía) sino que es algo (los niveles de calidad) susceptible de experimentar cambios, tanto a mejor como a peor. Y, por supuesto, un nivel de calidad diferente puede explicar que la eficiencia de una empresa -medida por el coste medio, por ejemplo- sea diferente a la de otra. Veamos primero un resumen sobre las dos

---

<sup>2</sup> Si la presión competitiva en el mercado del producto de la empresa es alta, podemos esperar que la eficiencia asignativa del conjunto de las empresas del mismo tenderá a su máximo: La fuerte competencia hará que cada empresa trate de minimizar su coste medio –para así poder reducir algo su precio y vender más (o, simplemente, para no quedarse fuera del mercado). En consecuencia tenderán a operar con una tasa de margen baja; la mínima para que les resulte interesante seguir operando como empresas en ese sector. E inversamente, si un bien o servicio está en manos de una sola empresa (monopolista) guiada por el criterio del beneficio, su tasa de margen tenderá a ser notablemente alta (la de maximización de resultados en régimen de monopolio) y por tanto la eficiencia asignativa será baja. (Puede verse sobre esto: Vergés, J., *Economía política de la intervención sobre el mercado*, Ed. Pirámide, Madrid, 2010, pág. 127-133).

dimensiones ‘estándar’ de la *eficiencia productiva*, para pasar seguidamente a considerar lo que implica la tercera. Y en el apartado siguiente pasaremos a abordar la relación entre eficiencia productiva y los niveles de *eficacia* o calidad.

### 1.1 Eficiencia productiva ‘estándar’: Producir con los costes mínimos

Como se ha apuntado, el concepto habitual de *eficiencia productiva* de una empresa –en el sentido de operar con el coste medio mínimo posible, dada la calidad del producto y la cantidad a producir- comporta dos requisitos o condiciones: operar tanto con *eficiencia de gestión* (no malgastar recursos) como con *eficiencia de escala* (estar adecuadamente dimensionada).

#### *Eficiencia de gestión*

Se entiende que una empresa funciona con plena *eficiencia de gestión* cuando, para suministrar a los consumidores o usuarios una determinada cantidad de bien (un producto o un servicio), lo hace con los costes totales menores posibles que le permite su estructura o dimensión en ese momento. Siempre y cuando, por supuesto, realice esta minimización de costes cumpliendo con las leyes (laborales, ambientales, sanitarias, etc.) y las costumbres laborales y sociales de la comunidad en la que opera.

Consideremos, por ejemplo, una empresa editorial, con una determinada estructura o dimensión (unas determinadas instalaciones de impresión, una plantilla de personal fijo, unos determinados locales...), y que ha colocado en el mercado un número concreto de libros durante el último año. Diremos que su *eficiencia de gestión* habrá sido mayor cuanto menor haya sido la suma de los costes en que ha incurrido para colocar tal producción en el mercado (costes del personal de preparación o de edición de los originales, derechos de autor, costes de papel y cubiertas, costes de impresión, de transporte y distribución de los libros, de publicidad y marketing, costes de administración, costes financieros, etc.). Es decir, cuanto menor resulte el coste medio por libro.

#### *Eficiencia de escala, y volumen estable de producción*

Supongamos que, efectivamente, dada su estructura/dimensión, estos costes totales son los mínimos razonablemente posibles. Podría ser, sin embargo, que, teniendo en cuenta el número de libros que viene produciendo o colocando en el mercado, sus costes totales pudieran ser todavía menores si su estructura o dimensión fuera más grande (más pequeña). En tal caso –y si tal volumen de producción se prevé estable- diremos que la empresa funciona con eficiencia de gestión, pero no con *eficiencia de escala*, porque está sub-dimensionada (sobre-dimensionada). La *ineficiencia de escala* significa tener una estructura demasiado grande o demasiado pequeña para producir el volumen estable de output a colocar en el mercado. Una empresa en este sentido sobredimensionada tendrá un exceso de costes de carácter fijo. Y una empresa subdimensionada tendrá generalmente un exceso de costes variables, porque estará forzando su nivel de producción más allá del que corresponde a su capacidad productiva instalada.

Visto desde otra perspectiva: si, dado el número de libros que viene produciendo/ colocando en el mercado de forma estable, la empresa no hubiera alcanzado unos costes totales más bajos ni ahorrando costes corrientes ni redimensionándose, entonces es que está operando tanto con plena eficiencia de gestión como con eficiencia de escala: está obteniendo su actual volumen de *output* con los costes mínimos posibles, no sólo a corto



plazo (dada su dimensión/ estructura) sino también a largo plazo, pues su dimensión/ estructura o capacidad de producción instalada es la adecuada a tal volumen de *output*.<sup>3</sup>

#### *Nivel de ocupación*

Desde luego, una empresa puede tener la dimensión/estructura adecuada para su nivel estable esperado de producción, pero a corto plazo –cada mes, por ejemplo- el volumen de producción real puede oscilar, debido, entre otras cosas, a variaciones en la demanda; bien sea por razones estacionales, o de tipo más bien aleatorio. Concretamente una caída de la demanda para una empresa que en principio está bien dimensionada hará que ésta opere con un *nivel de ocupación* de su capacidad productiva (la cual depende de su dimensión/ estructura) inferior al 100%. Y, como consecuencia, aunque opere también con eficiencia de gestión tendrá un coste medio algo superior al de máxima eficiencia productiva.<sup>4</sup>

#### *La realidad es dinámica*

Una determinada situación de plena eficiencia productiva se romperá en el momento que el volumen estable de *output* -el número de libros al año, por ejemplo- cambie substancialmente. Lo que quiere decir que conseguir la eficiencia de escala implica un cierto proceso de eventuales adaptaciones de la dimensión de la empresa a lo largo del tiempo. Esta adaptación (sea incrementando o disminuyendo su capacidad/estructura) no significará necesariamente que el coste total *medio por libro* sea mayor o menor. Si el volumen de producción es claramente superior a lo que se entiende por *escala mínima óptima* (e.m.o.) del sector, la adaptación de escala será simplemente la manera de mantener el coste medio en su nivel mínimo absoluto. Si, por el contrario, el volumen anual de libros que produce la editorial es inferior a la correspondiente e.m.o., y se diese el caso de que –debido a incrementos de la demanda- la empresa va re-adaptando su capacidad productiva al alza, ello le permitirá pasar a trabajar con un coste medio por libro cada vez inferior, hasta el momento que eventualmente alcance el volumen correspondiente a la e.m.o.

Cuando se da esta situación concreta (producción actual inferior a la e.m.o.), la empresa está operando a un volumen para el cual decimos que existen *economías de escala* por realizar. Es decir, aunque actúe con eficiencia de gestión y eficiencia de escala (dimensión adecuada al volumen de producción que debe realizarse), el volumen de producción es demasiado pequeño para que a la empresa le salga a cuenta utilizar la dimensión/tecnología más barata. En tal caso, si es la única empresa editorial en producir el tipo de libros que produce (es decir, si disfruta de un cierto poder de monopolio), la situación de la empresa puede ser económicamente estable, e incluso con buenas perspectivas: si la demanda de estos libros evoluciona en el futuro al alza, la empresa

---

<sup>3</sup> Como sea que el verificar si tal supuesta eficiencia máxima de gestión y de escala se da o no es algo virtualmente imposible en la práctica, lo más realista es partir de la base de que en principio *todas las empresas son en alguna medida ineficientes*; y, en general, lo son más cuanto más grande es el poder de mercado de que disfrutan. *Ineficiencia-X* es el término acuñado para referirse a este hecho. El concepto fue introducido por H. Liebenstein («Allocative Efficiency vs. X-Efficiency», en *American Economic Review*, 1966, junio, págs. 392-415) para referirse al fenómeno observado de la existencia de bolsas de ineficiencia en empresas privadas, aparentemente en contradicción con el objetivo de maximización de los beneficios. Se refiere a la existencia de un cierto exceso de costes, especialmente en el caso de empresas con poder monopolístico; exceso de costes que podría estar explicado por la falta de una efectiva presión competitiva sobre la empresa, lo que haría que en ésta se relajaran los esfuerzos por alcanzar una plena eficiencia productiva. Con el tiempo el concepto, *ineficiencia-X*, ha pasado a formar parte del lenguaje económico corriente.

<sup>4</sup> En el apartado segundo del Anexo I puede verse una aplicación concreta del concepto *nivel de ocupación*, como variable que incide en los indicadores de eficiencia de una empresa.

podrá adoptar una dimensión superior, lo que significará normalmente trabajar con una tecnología más barata, y por lo tanto con unos costes medios inferiores. Pero si, por el contrario, sus libros tienen que competir con los de otras empresas de mayores dimensiones (que tendrán, por lo tanto, costes medios inferiores), la situación de la empresa no será sostenible a largo plazo, porque aunque funcione con plena eficiencia de gestión y con eficiencia de escala su volumen de producción es comparativamente pequeño (inferior a la e.m.o.) y eso hace que tenga unos costes medios más altos que los de sus competidoras.

Obsérvese que esta última situación tendríamos que interpretarla como un signo de ineficiencia comparativa respecto a las competidoras, pero en un sentido de la eficiencia diferente a los dos anteriores. Eso nos lleva a la tercera dimensión de la eficiencia productiva de una empresa: la *eficiencia de adaptación/respuesta a los cambios* del binomio mercado y tecnología.

## 1.2 La tercera dimensión: Eficiencia de adaptación/respuesta a los cambios

Independientemente de su eficiencia productiva, la empresa editorial del ejemplo puede ser más o menos exitosa adaptándose a los cambios del mercado –principalmente cambios en los gustos o las necesidades de los consumidores- y/o adaptándose a las innovaciones tecnológicas. Adaptarse, en ambos aspectos, significará cambiar en alguna medida el tipo de libro o el servicio añadido que pueda darse con el libro. Comporta, en definitiva, *cambiar el tipo de producto* (o la gama de productos) que produce y vende. Por ejemplo, algunos libros técnicos se venden ahora con un programa de ordenador como complemento; y en general las nuevas tecnologías multimedia están cambiando las posibilidades del mundo editorial. Eso hace que por una parte en el sector se ofrezcan “nuevos productos” y, por otra, que como respuesta vayan cambiando también las demandas de los consumidores.

El binomio *eficiencia de gestión / eficiencia de escala* supone que el “producto” está dado (por ejemplo: suministrar electricidad; o libros de determinadas características; o un servicio de autobús entre los lugares A y B, con una frecuencia dada; etc.), y que lo que eventualmente va cambiando es el volumen que debe producir o colocar la empresa en el mercado cada año. Por el contrario, la eficiencia de adaptación aparece cuando consideramos que el propio producto que constituye la actividad de la empresa puede ser necesario ir modificándolo a lo largo del tiempo.

Las dos primeras dimensiones habituales de la eficiencia se resumen en: producir lo que tenga que producirse (una determinada cantidad de un bien con unas características dadas) incurriendo en los costes técnica y socialmente menores posibles; mientras que el concepto de *eficiencia de adaptación* tiene con ver con *qué es lo que tiene que producirse*.<sup>5</sup>

La ineficiencia de adaptación de una empresa –ya sea a las posibilidades que ofrecen los cambios tecnológicos, o a los cambios de los gustos o las necesidades de los usuarios/consumidores- se traduce normalmente en una paulatina reducción de la demanda

<sup>5</sup> Ciertamente, pueden haber casos en que esta cuestión de la adaptación dinámica de la actividad de la empresa no sea relevante. Por ejemplo, en el caso de las empresas que producen y suministran electricidad: el producto “kilovatios de electricidad” no parece admitir o estar sujeto a cambios cualitativos. Aunque, puede ser que ni estas empresas sean una excepción: no sería de extrañar, por ejemplo, que dentro de unos pocos años sea posible que a través de cualquiera de los enchufes eléctricos de las habitaciones podamos tener una videoconferencia y conectarnos a Internet. Tendríamos, entonces, a las empresas eléctricas ofreciéndonos también servicios de telecomunicaciones por la misma red eléctrica (lo que, entre otras cosas, les permitiría abaratar los dos productos).

para la empresa, y por lo tanto, en una gradual reducción de su actividad. Y si la ineficiencia de adaptación es significativa y persistente, fácilmente puede desembocar en que la empresa pase a tener pérdidas y tenga que plantearse su liquidación.<sup>6</sup>

Muchos de los temas que configuran los estudios de Administración y Dirección de Empresas, como *el análisis de la gama de productos idónea* o *la planificación estratégica*, tienen que ver fundamentalmente con esta dimensión de la eficiencia; así como también las actividades de estudios prospectivos de mercados o las de investigación y desarrollo (I+D)<sup>7</sup>. Y las decisiones sobre firmar acuerdos o alianzas estratégicas con otras empresas, o sobre reorganizar la empresa en “unidades de negocio” relativamente autónomas, por ejemplo, están también relacionadas con la *eficiencia de adaptación*.

Todas estas cuestiones de adaptación dinámica son tan relevantes para las empresas privadas como para las públicas, incluidas las más tradicionales. Eso resultará seguramente evidente para empresas como las telefónicas (hasta hace poco, en general, empresas públicas), porque su “producto” (servicios de telecomunicaciones) ha experimentado un cambio notable en los últimos años; pero no es este un caso excepcional. Hemos visto, por ejemplo, como en España la compañía ferroviaria nacional Renfe ha ido transformando sus grandes estaciones ferroviarias en verdaderos centros comerciales y de servicios, al tiempo que modificaba/ampliaba su oferta (AVE, Euromed). Incluso la tradicional Correos anunciaba recientemente a los usuarios —por correo, claro— que ofrece ahora «una gama de servicios (nuevos o adaptados) que es conveniente que conozcamos».<sup>8</sup>

En resumen, el objetivo de que una empresa —pública o privada— funcione de forma eficiente (dejando aparte la dimensión social, es decir, la eficiencia asignativa) tiene tres niveles o dimensiones: eficiencia de gestión, eficiencia de escala y eficiencia de adaptación. Visto desde otra perspectiva: si una empresa que opera en competencia con otras funciona con pérdidas puede ser debido a una determinada mezcla de estos elementos: que opere con un exceso de costes corrientes (*ineficiencia de gestión*), que no esté bien dimensionada (*ineficiencia de escala*) o que no esté respondiendo adecuadamente en cuanto a adaptarse a los cambios tecnológicos y de mercado. Aunque también puede ser, simplemente, que las pérdidas se deban a que los precios que están dispuestos a pagar los usuarios/consumidores no sean (o hayan dejado de ser) suficientes para cubrir los costes de la empresa; con lo que su actividad es (o ha pasado a ser) de las económicamente no autofinanciables (en el sentido de “actividad no rentable”).<sup>9</sup>

- -

Planteado el panorama más o menos completo anterior, por razones prácticas y de método lo que sigue está referido a la medición y comparación de la *eficiencia productiva* en sentido estricto; a menos que no se haga referencia explícita a la ‘tercera dimensión’ relativa a la adaptación a los cambios de mercado y tecnológicos.

---

<sup>6</sup> Obsérvese que esta situación de ir quedándose sin demanda es perfectamente compatible con el hecho de que la empresa vaya operando con plena eficiencia de gestión y que se vaya redimensionando a la baja adecuadamente (eficiencia de escala).

<sup>7</sup> Por supuesto, esta ‘eficiencia de adaptación al mercado’ no es un concepto novedoso. Es, de hecho, la idea en torno a la cual gira el concepto de ‘empresario /emprendedor dinámico/innovador’ Shumpeteriano.

<sup>8</sup> Bajo el lema publicitario «Tenemos soluciones rápidas para todo lo que *mandes*», el folleto describe los diferentes servicios estándares y los adaptables a las conveniencias del usuario. (Es fácil relacionar esta “diversificación” —así como esta primera publicidad masiva de Correos— con la necesidad de hacer frente a la competencia que le representan las numerosas empresas de mensajería).

<sup>9</sup> Este es el caso de muchos de los bienes que están subvencionados por los poderes públicos. Como determinados servicios culturales, de enseñanza o ciertos servicios de transporte, que socialmente se consideran importantes pero que dejados al juego del mercado no se producirían porque no son “rentables”.

### 1.3 Alternativas: Análisis temporal (longitudinal), y comparación entre empresas (horizontal).

Los estudios que tratan de evaluar la eficiencia económica relativa de tal o cual empresa —o de un determinado tipo de empresas (públicas / privadas; locales / extranjeras; cotizadas/ cooperativas; ...— pueden ser de dos tipos: Analizar los resultados de la empresa ‘A’ en cuestión —sus indicadores económicos— a lo largo de varios años (análisis longitudinal); o bien comparar esos indicadores de eficiencia con los de otra empresa, ‘B’, del mismo sector de actividad (por ejemplo, una empresa pública vs. una privada que realice una actividad similar).

El primer tipo de estudios (longitudinales, *cross time*) nos ofrece informaciones que se supone son significativas en sí mismas como indicadoras de “mala” o “buena” gestión en términos absolutos. O, más propiamente, como indicadores de que la eficiencia ha mejorado o empeorado en determinada proporción de un periodo a otro.<sup>10</sup> El segundo tipo de estudios —los que comparan dos o más empresas: análisis horizontal, *cross section*— son los más abundantes en la literatura sobre el tema. El planteamiento conceptual de estos es, generalmente, relativista: se basa en no definir ningún valor ‘estándar’ que represente idealmente la eficiencia óptima de las empresas objeto de comparación, sino partir de la base de que todas ellas pueden de hecho ser más o menos ineficientes. En consecuencia, la aproximación adoptada consiste en determinar si el grado de ineficiencia/eficiencia, medido según un determinado indicador, es mayor en unas que en otras.

De hecho, un estudio de eficiencia absoluta (longitudinal) de una empresa o de un conjunto de empresas podemos considerarlo formalmente también como un estudio *comparativo*, puesto que consiste básicamente en comparar las cifras correspondientes a un año (de coste unitario, de productividad, ...) con las de otros años. Podemos hablar, pues, de ellos como de estudios de *comparación temporal*; y de los propiamente comparativos (*cross section*) como de *comparación interempresas*.

### 1.4 Requisitos de homogeneidad para una evaluación de la eficiencia *comparativa*

La cuestión clave para que las conclusiones de cualquier estudio de eficiencia comparativa puedan considerarse relevantes o válidas es si se da una homogeneidad razonable entre las empresas cuyos resultados económicos se van a comparar (o bien entre la actividad de la empresa en los diferentes años a comparar, si se trata de un análisis longitudinal). Solo así podremos afirmar que las diferencias que muestre el indicador de eficiencia reflejan efectivamente diferente eficiencia productiva y no otros elementos. Hay tres causas básicas de que tal homogeneidad no se dé satisfactoriamente: 1) heterogeneidad en la actividad económica: el tipo de bien o servicio, o gama de productos no es del mismo tipo; 2) heterogeneidad del marco institucional: leyes laborales, ambientales, regulación, seguridad jurídica, .. , significativamente distintas; 3) diferentes niveles de calidad o eficacia en el suministro del bien o servicio.

#### *Homogeneidad en cuanto a la actividad económica*

En estudios comparativos interempresas, la condición de homogeneidad en cuanto a la actividad económica (bienes o servicios suministrados) es imprescindible para que al

<sup>10</sup> Generalmente, cuando este tipo de estudios están hechos desde dentro de la propia empresa, con destino a sus propietarios —en el caso de una EP, por encargo de la Administración pública que ejerce los derechos de propiedad— se habla de una *auditoría de gestión*.

comparar sus respectivos indicadores de eficiencia productiva las diferencias observadas puedan ser atribuidas a que la gestión de una de las empresas es más o menos exitosa que la de la otra, y no a que en realidad operan negocios distintos.

El riesgo de que se de esta heterogeneidad en un estudio es alto en el caso de utilizar fuentes secundarias para los datos, pues normalmente éstas ofrecen cifras agregadas que engloban empresas que suministran outputs que en realidad son distintos. Por ejemplo, dentro de la típica agrupación ‘empresas textiles’ de una base de datos económico-contables estarán normalmente incluidas empresas cuya actividad principal es tan heterogénea como: producción de hilo, fabricación de tejidos, confección de prendas de vestir, o servicios de tinte y apresto. Como consecuencia, si calculamos el valor del tal o cual indicador de eficiencia a partir de los valores agregados para ‘empresas textiles’ que nos suministra la base de datos, y lo comparamos con el valor de dicho indicador, calculado para una empresa concreta A que produce, por ejemplo, tejidos de un determinado tipo y cuya eficiencia comparativa queremos evaluar, la diferencia que muestre dicho indicador no nos dirá nada especialmente útil respecto a la eficiencia comparativa con la que opera dicha empresa.

Para estudios de tipo longitudinal también es necesaria esta condición de homogeneidad, aunque al tratarse de comparar los resultados económicos de diferentes años para una misma empresa, la homogeneidad en cuanto al tipo de actividad económica puede tomarse como dada. Aunque no siempre es así, ya que la empresa analizada puede también haber cambiado substancialmente su actividad económica (su output, o la composición de éste) a lo largo de los años estudiados.

#### *Homogeneidad en cuanto al marco institucional*

Una legislación laboral más favorable a los trabajadores en cuanto a jornada laboral, permisos y vacaciones (menor número de horas efectivas al año) hará que cualquier indicador de eficiencia de una empresa que opere en ese marco legislativo presente un valor menos favorable. Unas normas ambientales más estrictas en cuanto a contaminación atmosférica, de las aguas, acústica, o del uso del espacio público tendrá el mismo efecto. Normas regulatorias de mercado más exigentes sobre controles sanitarios, sobre información a los usuarios, o sobre prohibición de componentes potencialmente dañinos, aumentarán algo los costes de producción. Etc. etc.

Si las empresas a comparar operan en el mismo país, es razonable asumir que la homogeneidad en cuanto al marco institucional se da. Si comparamos empresas de distintos países, el riesgo de heterogeneidad del marco institucional será alto.

En el caso de análisis longitudinal de la eficiencia –una empresa, o varias empresas, a lo largo de varios años, en un determinado país- esta homogeneidad se da en principio. Aunque no necesariamente, puesto que las leyes y normas regulatorias pueden haber cambiado significativamente a lo largo del periodo estudiado.

Que la requerida homogeneidad no se dé de forma satisfactoria no significa que no tenga sentido efectuar mediciones de eficiencia comparativa (en el tiempo, *cross time*, o entre empresas, *cross section*). En todo caso exige tenerla en cuenta, bien para tratar de aislar sus efectos, bien a la hora de interpretar de los resultados. Otra cosa es que en muchos estudios el tema en si de las condiciones de homogeneidad ni siquiera se plantee.

#### *Homogeneidad en cuanto a los niveles de calidad*

También la falta de homogeneidad respecto a la calidad es frecuentemente que sea soslayada en los estudios comparativos. El *output* de la empresa A, aun siendo

nominalmente el mismo que el de la empresa B, con la que se quiere efectuar la comparación (por ejemplo, “servicio de transporte marítimo Barcelona-Génova”), puede ser significativamente diferente en lo que concierne a sus niveles de calidad o de eficacia en la prestación del servicio.<sup>11</sup> Y ocurre que generalmente a más calidad para un mismo *output*, más elevados son los costes de la empresa productora (y, por lo tanto, cualquier medida de su eficiencia económica –por ejemplo, el coste medio- mostrará un ‘empeoramiento’. Veamos esto más detenidamente:

### 1.5 La relación entre (indicador de) Eficiencia y Calidad (o Eficacia)

Aunque es un tema que suele obviarse en muchos estudios sobre eficiencia comparativa, para evaluar ésta se hace necesario tomar en cuenta no solo medidas de *eficiencia* sino también de la *eficacia* (o *calidad*), pues el nivel de la segunda afecta, normalmente en sentido contrario, a los indicadores que miden la primera.

Por *eficacia* en el suministro de un bien se entiende la medida en que una empresa o cualquier organización está efectivamente cubriendo las demandas, necesidades o expectativas de sus usuarios/clientes de forma satisfactoria. Eso quiere decir, normalmente, que el bien o servicio prestado a los clientes/usuarios lo ha sido en la forma (en cuanto a regularidad, garantía de servicio, no colas de espera, ..etc.) y, sobre todo, la *calidad* requerida o esperada.

La eficacia –o calidad- suele poderse concretar midiendo diferentes atributos (o parámetros) del bien, según sea la naturaleza de éste. Por ejemplo ¿qué proporción de cartas es entregada por Correos al día siguiente de ser depositadas en el buzón? o, ¿cuál es el grado de puntualidad de los trenes de la línea L? o, ¿cual es la duración del viaje, el grado de seguridad, y el de confortabilidad de el servicio de autobuses A? ¿cuál es la *gama de servicios* médicos o de diagnóstico que presta un centro sanitario? ¿idem, la de un servicio de asistencia a usuarios de ordenadores?

No nos ha de sorprender, por tanto, que los usuarios/consumidores, y las asociaciones representativas de estos, estén especialmente interesados en el mantenimiento o incremento de los indicadores de *eficacia* o calidad del servicio prestado por tal o cual empresa –sobre todo en el caso de servicios públicos (sean las empresas que los prestan públicas o privadas). Y que raramente les preocupe la mayor o menor *eficiencia* con la que operen dichas empresas. Será en todo caso a sus propietarios a quines preocupará el tema de la eficiencia.

Ocurre, sin embargo, que los niveles de *eficacia* (*calidad*) y de *eficiencia* de una empresa están relacionados, como es fácil deducir. Y concretamente *están, en general, inversamente relacionados*. Dicho brevemente: La medida de la *eficiencia* tiene que ver con la relación entre el volumen del bien o servicio suministrado y el consumo de factores, o costes, en que ha incurrido la empresa suministradora. Por eso los costes unitarios o la productividad son indicadores típicos para medir el grado de eficiencia. Y, por otra parte, la eficacia o calidad se mide mediante parámetros que miden atributos del bien o servicio. En ciertos casos es posible incrementar tal o cual parámetro de calidad/eficacia sin que haya repercusiones en los costes de producción; bien sea porque se ha podido mejorar la forma en que se organizan y utilizan los factores (especialmente el trabajo), o porque se ha

---

<sup>11</sup> En el caso de un análisis longitudinal para una determinada empresa, ‘A’, este motivo de heterogeneidad consistiría en que los niveles de calidad o eficacia del servicio de dicha empresa sean diferentes de un año a otros.

introducido una determinada innovación tecnológica. Pero, normalmente no es así: Aumentar en alguna medida la *eficacia* (alguno de los atributos que definen la calidad o prestaciones del producto o servicio) significa que su coste unitario aumentará; con lo que la *eficiencia* de la empresa *aparentemente* disminuirá. Y a la inversa: una fuerte presión sobre la dirección de la empresa -por parte de los propietarios, del mercado, ..- en la línea de que ésta aumente su grado de eficiencia (lo que, normalmente significa que reduzca sus costes, dado un determinado nivel de producción) lleva en muchos casos a la gerencia de la empresa a reducir en alguna medida la calidad o el nivel del servicio prestado a los usuarios<sup>12</sup>.

Por supuesto, se trata de una cuestión general, no específica de la gestión de un tipo de empresas u otro: normalmente, aumentar en un determinado aspecto la calidad de un bien o de un servicio implica inevitablemente incrementar su coste unitario; mientras que el grado de eficiencia *real* en la utilización del trabajo y demás factores por parte de la empresa suministradora será seguramente el mismo. Obsérvese que esta última afirmación (la eficiencia *real* no ha cambiado) puede parecer contradictoria con lo que se ha dicho antes, pero se trata simplemente de que ahora por eficiencia *real* nos estamos refiriendo a la *eficiencia como tal*, no al valor del *indicador utilizado para medirla*: Una cosa es considerar el coste unitario como un indicador para medir la eficiencia, y otra es el grado de eficiencia en sí de la empresa, puesto que el coste unitario de un bien o de un servicio depende también de los niveles de calidad que quieran mantenerse para el mismo (aparte de los precios que se paguen por el trabajo y demás factores). Es por ello que para que una variación en los costes unitarios de una empresa de un periodo a otro podamos interpretarla como la repercusión de un cambio en su eficiencia productiva propiamente dicha, debería darse que los niveles de calidad o de eficacia referidos al bien o al servicio producidos fuesen idénticos (o simplemente sin notables diferencias) en ambos periodos. Y lo mismo es válido al comparar los costes unitarios (o cualquier otro indicador utilizado para medir la eficiencia) de dos empresas: para que la diferencia podamos atribuirla a que una empresa tiene una eficiencia productiva superior a la de la otra es necesario que los niveles de calidad o de eficacia de ambas sean aproximadamente los mismos.<sup>13</sup>

## 1.6 Condiciones adicionales en la comparación entre empresas públicas (EP) y privadas

*¿Con que empresa/s privada/s comparar?*

Con relación a la necesaria homogeneidad respecto a la actividad económica (tipo de output), es un hecho que no siempre existen empresas privadas comparables a la EP cuya eficiencia se querría evaluar. Por ejemplo, en casos de grandes EP de servicios públicos como ferrocarriles, aeropuertos, o transporte urbano. Al estar en una situación monopolista es difícil encontrar empresas privadas que realicen la misma actividad. Esto explica que los estudios empíricos se orienten en estos casos a comparar la EP en cuestión con otra/s, de la misma actividad, de otros países. Pero esto comporta un nuevo tipo de heterogeneidad: El marco institucional (laboral, fiscal, medioambiental, usos sociales, ...)

---

<sup>12</sup> No siempre, evidentemente. Si la empresa no está operando con plena eficiencia productiva, la referida presión de los propietarios a reducir costes puede traducirse total o parcialmente en un intento por parte del/la gerente de la empresa de eliminar costes realmente innecesarios; es decir, de pasar a producir efectivamente de forma más eficiente sin alterar los niveles de eficacia o calidad.

<sup>13</sup> Un ejemplo simple: Con una misma eficiencia productiva en el uso de los factores, una empresa tendrá un coste unitario más alto si, por ejemplo, produce una camisa con tejido de algodón que si lo hace con una materia prima más barata, como cierta fibra de poliéster.

es entonces distinto; como también en general lo son los precios y salarios relativos. Y todo esto influye sobre los respectivos costes unitarios; o sobre el valor del que sea el indicador de eficiencia que se vaya a utilizar. La solución consistiría desde luego en, una vez determinado el diferencial de eficiencia, aislar la parte que puede atribuirse al diferente marco económico-institucional; pero esto resulta en la práctica extremadamente complejo (por lo que tiende –también– a soslayarse).

*La asimetría de ser utilizada la EP para objetivos de política económica*

No obstante, el elemento específico de heterogeneidad más relevante es la posible existencia de repercusiones negativas sobre las cuentas de la EP cuya eficiencia comparativa se quiere evaluar, debido a que ésta haya sido utilizada por el gobierno para objetivos sociales extra-productivos. Esto constituye un problema para la evaluación de la eficiencia comparativa respecto a la empresa privada, pues no es habitual que el investigador disponga de información sobre el importe de dichas repercusiones negativas (costes extras y/o de minoraciones de ingresos: ‘costes de intervención’). Repercusiones negativas que no existirán en el caso de la/s empresa privada con la que se vaya a comparar<sup>14</sup>.

Visto desde otra perspectiva: El resultado contable (beneficio o pérdida) que presenten las cuentas de la EP no será representativo de su funcionamiento económico real si ésta viene siendo utilizada para objetivos de política económica (como por otra parte es normal y lógico que lo sea, puesto que es uno de los motivos de que, históricamente hablando, existan EP). A menos que los *costes de intervención* que tal utilización genere a la empresa no hayan sido compensados financieramente por el Gobierno en el mismo ejercicio económico. Y este problema no se salva descartando los indicadores basados en los resultados y optando por indicadores tipo coste medio o tipo índice de productividad: Si una parte de los costes totales que presentan las cuentas de esa EP no existirían de no haberse dado la intervención gubernamental, el coste medio se ve afectado al alza; y en tanto que esos mayores costes serán la expresión monetaria de un consumo extra de algunos factores, derivado de la intervención gubernamental, también el indicador de productividad global de la empresa aparecerá mermado.

*El objetivo a perseguir señalado a la EP puede no ser el del Beneficio*

Consideremos la posibilidad de que a la gerencia de una EP no se le haya señalado como objetivo estratégico de la gestión la maximización del beneficio sino la maximización del volumen de actividad o de servicio ofrecido, condicionada a operar con equilibrio financiero. Una posibilidad lógica, por otra parte, pues se trata de un criterio basado de hecho en la eficiencia asignativa, como criterio de eficiencia social para una unidad productiva<sup>15</sup>. En tal caso no podemos sorprendernos si al comparar los datos de la gestión de esa EP con los de una empresa privada, de actividad similar, utilizando para ello un indicador de beneficios, el resultado es favorable a la empresa privada.

Visto desde otra perspectiva: un indicador basado en los beneficios (beneficio absoluto, tasa de margen, tasa de rentabilidad, ...) no es un buen indicador para medir la eficiencia

<sup>14</sup> Si nos referimos a estudios de comparación temporal, la falta de homogeneidad de las cifras por este motivo provendrá de que las mencionadas repercusiones negativas serán probablemente diferentes de un año a otro.

<sup>15</sup> *Eficiencia asignativa* que, por cierto, también implica como pre-condición que la empresa opere con los costes estrictamente necesarios, dado su nivel de actividad; es decir, que opere con eficiencia productiva; igual que exige el criterio del beneficio. (Puede verse sobre esto: Vergés, J. (2010) op. cit. pág. 259-270.



comparativa en tales situaciones. Sin embargo si que lo sería un indicador tipo coste medio o tipo productividad, al no depender éstos de los precios de facturación a los usuarios <sup>16</sup>

---

<sup>16</sup> Se remite sobre esto a la referencia anterior.

## 2

## INDICADORES PARA MEDIR LA EFICIENCIA PRODUCTIVA DE CUALQUIER EMPRESA O ENTIDAD

---

El coste medio (CM) es, en principio, el indicador más directo para —haciendo comparaciones con el coste medio de otra empresa o con un coste medio mínimo teóricamente alcanzable— medir la eficiencia económica con la que opera una determinada empresa; o, si se prefiere, su competitividad. Del mismo modo que una medida de su productividad global nos permite evaluar específicamente su eficiencia productiva. El problema es que el caso más habitual es el de empresas/entidades que suministran diferentes productos o servicios (multiproducto), por lo que no es posible realizar el cálculo del coste unitario de cada producto sin hacer supuestos arbitrarios sobre el reparto de los costes comunes<sup>17</sup>. Aunque en tal caso general son posibles aproximaciones razonables en la medición de la eficiencia productiva utilizando *indicadores globales* (referidos al conjunto de la actividad de la empresa) como: tasa de margen, tasa de costes sobre ingresos, tasa de rentabilidad, o —mejor como después veremos— un indicador de productividad global. Precisaremos a continuación las respectivas definiciones de esos y otros indicadores habituales, desde la perspectiva de su aplicación en la práctica. Esto en el sentido, sobre todo, de ser realista: tener en cuenta que, cuando se aplican estos indicadores, los datos cuantitativos de base de que dispondremos son, en la mayor parte de los casos, los que aparecen habitualmente en las cuentas de resultados y en los informes anuales (“memorias”) de las empresas —a menos que el estudio de evaluación de eficiencia se haga ‘desde dentro de la/cada empresa, con toda la mucho mayor información que eso supone..

### 2.1 Indicadores de “Resultados” (beneficios)

(1) *Resultado* propiamente dicho, en valor absoluto.

El Resultado que presenten las cuentas de una empresa para un periodo determinado puede tomarse como indicador de eficiencia, aunque —como es bien conocido— comporta limitaciones que pueden llegar a invalidarlo para tal fin. Un resultado positivo (beneficio) no es necesariamente la consecuencia de una gestión eficiente<sup>18</sup>, ya que la empresa puede no actuar en un mercado competitivo sino en condiciones de monopolio u oligopolio<sup>19</sup>. Y un resultado negativo (pérdidas) no necesariamente es un indicador fiable de ineficiencia, porque las pérdidas pueden ser el resultado conjunto de varias causas: 1) un

---

<sup>17</sup> Véase, por ejemplo, referencia anterior, páginas 252-254.

<sup>18</sup> Entendiendo la eficiencia empresarial en el sentido amplio definido en el primer apartado: eficiencia de gestión, más eficiencia de escala, más eficiencia de adaptación.

<sup>19</sup> Poseer una patente es ya, por ejemplo, disfrutar de una situación monopolística sobre un producto, servicio o procedimiento productivo.

funcionamiento ineficiente; 2) una caída brusca de la demanda; y –en el caso de una EP- 3) que venga obligada a aplicar precios políticos; y/o 4) que tenga unos costes adicionales como consecuencia de ser utilizada por el gobierno para determinados objetivos macroeconómicos y sociales.

Salvadas estas cuestiones, en todo caso el concepto de resultado o beneficio a tener en cuenta cuando se pretende hablar sobre el grado de eficiencia productiva de la empresa tendrá que ser el que en la terminología contable se entiende por *beneficio de la explotación* (o *beneficio operativo*), el cual excluye tanto 1) los gastos financieros que pueda tener la empresa<sup>20</sup> (y los posibles ingresos financieros), como 2) los posibles ingresos y costes ajenos a la producción del *bien* o servicio que constituye la actividad propia de la empresa, así como 3) los de carácter extraordinario<sup>21</sup>.

*Beneficio de la explotación = Ingresos de la Explotación – Costes de la Explotación*

$$BE = IE - CE ; \quad (\text{para un periodo determinado: un año, un semestre, etc.})$$

El concepto de *CE* se corresponde con lo que en terminología más típicamente económica sería ‘el valor monetario del consumo de factores’ par un periodo:  $CE \equiv \sum_j F_j \cdot K_j$  (donde *F* representa la cantidad de factor ‘j’ consumida, y *K* su precio de adquisición (medio)). De la misma manera que el concepto de *IE* se corresponde con el de ‘valor monetario del output suministrado’ durante el mismo periodo:  $IE \equiv \sum_i q_i \cdot P_i$  (donde *q* representa la cantidad del bien ‘i’ colocada en el mercado, y *P* el precio (medio) al que se ha facturado).

(2) *Tasas de beneficios* (o beneficio relativo).

El beneficio en valor absoluto tiene, como indicador, la indudable ventaja de la sencillez, sin embargo no siempre resulta útil. Por ejemplo, no lo es demasiado cuando queremos comparar los resultados económicos de dos empresas de tamaño o volumen de actividad muy diferentes. Debido a ello se ha generalizado la utilización preferente de las tasas de beneficio, que representan valores relativos y que, por lo tanto, son válidas para comparar empresas de diferentes tamaños. Principalmente la *tasa de margen sobre ingresos*; y preferentemente –por su mayor proximidad a la idea de eficiencia- la calculada utilizando el *beneficio de la explotación*:

$$\text{Tasa de margen sobre Ingresos: } m = \frac{\text{Beneficio de la Explotacion}}{\text{Ingresos de la Explotacion}} = \frac{BE}{IE}$$

La otra medida más habitual del beneficio relativo es una *tasa de rentabilidad*. Por ejemplo, la siguiente *tasa de rentabilidad sobre capitales invertidos* para un periodo determinado: *tasa de rentabilidad de la explotación*:

$$r = \frac{\text{Beneficiodela Explotacion}}{\text{Capital o Inversion Financiera Ttotal}} = \frac{BE}{FP+EF} = \frac{BE}{RT}$$

FP = fondos propios; EF = Exigible financiero (= créditos o endeudamiento no comercial)

<sup>20</sup> Conviene que queden excluidos estos gastos —que corresponden a los intereses del endeudamiento no comercial que tiene la empresa— ya que el hecho de que estos gastos sean superiores o inferiores depende de la estructura de financiación de la empresa (que es en última instancia una decisión de política empresarial de los máximos responsables de la empresa) y no de que la empresa en un periodo determinado produzca un producto o servicio concreto en menor o mayor cantidad.

<sup>21</sup> Para una definición más rigurosa de *Beneficio de la Explotación* (u *Operativo*) se remite a un manual de contabilidad.

Y, menos utilizada como indicador pero igualmente útil, está también la *tasa de Ingresos sobre Costes*,

$$\frac{IE}{CE} \equiv 1 + m' ; (m' = \text{tasa de margen sobre costes, } BE/CE)$$

tasa que puede interpretarse como una cierta aproximación a la relación global Output/Input global.

Para interpretar los valores que se obtengan de estas variables en una aplicación dada, es importante tener en cuenta que entre  $r$  y  $m$  existe una bien conocida relación funcional: la primera depende en parte de la segunda:

$$r = \frac{BE}{RT} \equiv m \cdot \frac{IE}{AE} \cdot \frac{AE}{RT}; \quad \text{donde } AE = \text{Valor del Activo (de la explotación, u operativo)}$$

Es decir, que la tasa de *margen sobre ingresos* es concretamente una variable explicativa de la variable *rentabilidad sobre la inversión*, la cual (la rentabilidad) depende además de una variable de tipo técnico,  $IE/AE$  (ingresos por unidad de inversión en activos), y de una variable relacionada con la estrategia financiera de la empresa,  $AE/RT$ ; un índice que mide la importancia relativa de la financiación con crédito comercial (de proveedores, como más habitual), crédito que –a diferencia del crédito financiero (de la banca, por emisión de obligaciones, ..)- no genera coste financiero.

## 2.2 Indicadores de costes medios

Si estamos ante un caso de empresa uni-producto (por ejemplo una empresa productora de electricidad), el coste medio unitario será posible y fácil calcularlo; y, evidentemente, útil para cualquier consideración sobre eficiencia productiva:

$$\text{Coste medio: } CM = \frac{CE}{\text{Unidades de producto}}$$

Pero el caso más general es el de empresa multiproducto; y entonces el posible cálculo de los diferentes CM choca con el problema de la arbitrariedad de cualquier reparto de los costes comunes. Además de que las cuentas de resultados que habitualmente se publican de las empresas no suelen llevar información sobre los costes totales en forma desglosada, en el sentido de distinguir entre costes específicos para cada producto y costes comunes o ‘gastos generales’. Por lo que ni siquiera un cálculo ‘arbitrario’ de los respectivos CM para cada producto es posible de realizar para un/a investigador/a externo/a.

Un indicador alternativo –si bien de significado excesivamente genérico- es el de *tasa de costes sobre ingresos*:

$$\text{Tasa de costes s/ ingresos: } tc = \frac{\text{Costes de la explotación}}{\text{Ingresos de la explotación}} = \frac{CE}{IE}$$

Aunque, ciertamente, esto equivale a medir, en otros términos, lo mismo que mide la anteriormente referida tasa de margen sobre ingresos<sup>22</sup>, ya que:  $1 - (CE/IE) = m$

En determinados casos de empresas multiproducto hay sin embargo otra alternativa: calcular un coste unitario *como si se tratara de una empresa uniproducto*, dividiendo los costes totales por una cantidad (Q) que pueda considerarse como representativa del conjunto de las unidades de los diferentes *outputs* de la empresa,  $Q=f(q_i)$ . Eso es, por ejemplo, lo que se acostumbra a hacer al analizar empresas de transporte de pasajeros:

<sup>22</sup> Así como también lo mismo que mide, a la inversa, la tasa de Ingresos sobre Costes referida antes.

$$\text{“CM”} = \frac{\text{Costes de la explotacion } CE}{n^\circ \text{ de Pasajeros - kilometro } Q}; \quad Q = \sum_i q_i \cdot km_i$$

Donde:  $q_i = n^\circ$  de pasajeros de la linea ‘i’;  $km_i =$  Distancia o recorrido de la linea ‘i’, en km.

En cualquier caso, entre la variable  $m$  y la variable  $CM$  existe también una –menos conocida pero no por ello menos útil- relacional funcional, en la que la segunda es una variable explicativa de la primera. La relación es especialmente clara en el caso de que la empresa produzca un solo bien:

$$m \equiv 1 - \frac{CE}{IE} \equiv 1 - \frac{CE}{q \cdot P} \equiv 1 - CM \cdot \frac{1}{P} \quad ; \text{ siendo: } P = \text{Precio de venta};$$

## 2.3 Indicadores de productividad

### *Conceptos básicos*

Productividad y eficiencia productiva son conceptos casi sinónimos. En el caso de una empresa que produjese un solo *output* a partir de un solo *input*, la definición general de productividad,

$$\text{Productividad} = \frac{\text{Unidades de producto (output) producidas (suministradas)}}{\text{Unidades de factor (input) utilizadas para ello}} = \frac{q}{F} = \Pi$$

sería perfectamente calculable. Y, como puede verse, si la inversa de la productividad la multiplicamos por el precio del factor obtenemos precisamente el coste medio del producto, ( $CM$ ).

$$\frac{F \cdot K}{q} = CM \quad ; \text{ donde } K = \text{precio de compra/contratación del factor.}$$

Productividad y coste medio son pues, en cierto modo, dos maneras de medir la misma realidad, siempre que el precio del factor no variase. Pero como los precios de los factores suelen variar en el tiempo, y/o o ser diferentes de una empresa a otra, si de lo que se trata es de comparar la eficiencia de una empresa ‘A’ con la de la empresa ‘B’ que produce el mismo tipo de bien (o bien se trata de comparar la eficiencia de una empresa en el año ‘1’ con la que presentaba en el año ‘0’), la diferencia que se observe entre los respectivos costes medios

$$CM^1 = \left( \frac{F \cdot K}{q} \right)^1 ; \quad CM^0 = \left( \frac{F \cdot K}{q} \right)^0 \quad ; \quad CM^1 \leftarrow \text{causas de la } \neq \rightarrow CM^0$$

donde ‘1’= empresa A (o bien, año en estudio); ‘0’= empresa B (o bien, año anterior)

puede tener dos causas: que la productividad sea diferente, y que el precio pagado por el factor sea diferente.

$$\frac{q^1}{F^1} \cdot \frac{1}{K^1} \quad (\neq?) \quad \frac{q^0}{F^0} \cdot \frac{1}{K^0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi^1 = q^1 / F^1 \quad (\neq?) \quad \Pi^0 = q^0 / F^0 : \text{ la productividad es diferente} \\ K \quad (\neq?) \quad K^0 : \text{ el precio pagado por el factor es diferente} \end{array} \right.$$

En muchos casos el interés de la investigación se centra en la productividad, y no en el coste unitario, por entender que el hecho de que el precio de coste del factor (salario, por ejemplo) sea diferente puede responder a decisiones políticas (de política de empresa) y no a que la gestión de la empresa haya sido más o menos eficiente. O, simplemente, el interés

de la investigación se centra en la productividad porque se considera relevante aislar este elemento como sinónimo de eficiencia productiva. En definitiva, que un menor coste medio no necesariamente indica que la eficiencia sea mayor, puesto que este indicador depende también del precio que se paga por el factor.

Centrándonos en el indicador de productividad, hay que destacar que la variable más utilizada no es tanto el valor en sí de la productividad ( $\Pi$ ) sino, bien su índice de variación ( $\pi$ ), o bien su tasa de cambio en el periodo estudiado ( $t$ ):

$$\text{índice de variación, } \pi = \frac{\Pi^1}{\Pi^0} ; \quad \text{tasa de variación nominal, } t' = \pi - 1$$

$$\text{tasa de variación equivalente continua}^{23} \quad t = \ln\left(\frac{\Pi^1}{\Pi^0}\right)$$

En la literatura sobre el tema se ha impuesto la segunda versión de la tasa de variación, por las facilidades de cálculo que permite. Y, especialmente, porque esta tasa,  $t$ , también puede expresarse en términos de la diferencia entre la tasa de cambio en el volumen de producto y la tasa de cambio en el volumen de factor:

$$t = \ln \frac{q^1}{q^0} - \ln \frac{F_j^1}{F_j^0} \equiv q^\wedge - F^\wedge$$

lo que nos da una práctica lectura, claramente intuitiva, del concepto de variación (o diferencial) de la productividad de la empresa: Si el volumen de producto es un 22% mayor que el año anterior y el volumen de factor un 16% superior, entonces la productividad ha aumentado en un 6% .

En cualquier caso es esta metodología –diferencia de tasas de variación– la que más frecuentemente encontraremos en las publicaciones y trabajos sobre el tema; probablemente por la ventaja que tiene de mostrar algo así como las dos componentes que determinan la tasa de variación de la productividad:  $t = q^\wedge - F^\wedge$ .

<sup>23</sup> Ambos tipos de tasas dan valores similares cuando el cambio observado es relativamente pequeño. Por ejemplo:  $(42/40)-1 = 0,05$  , (+5%) ; y  $\ln(42/40) = 0,049$  , (+4,9 %).

Ejemplo numérico simplificado, ilustrativo de las variables o indicadores expuestos hasta aquí  
(relativo a una comparación *longitudinal*, temporal)

Año '0' (base)			Año '1' (año en estudio)	
	9.000 €	Ingresos (IE)	15.381,6	
	= 3.000 × 3 €		= 4.524×3,4	
	7.200 €	Costes totales (CE)	11.310	
	= 600 × 12 €		= 870 ×13	
	1.800 €	Beneficio (BE)	4.071,6	
2,4	7.200/3000	Coste medio (CM)	11.310/4524	2,5
5	3000/600	Productividad (PI)	4524/870	5,2
20 %	1800/9000	Tasa de margen (m)	4.071,6/15.381,6	26,47 %
1,25	9000/7200	Ingresos/Costes	15.381,6/11.310	1,36
1,25	"	Ingresos <sup>0</sup> /Costes <sup>0</sup>	(4524×3)/(870×12)	1,3
2,4		Coste medio <sup>0</sup>	(870×12)/4.524	2,307
	4.500	Recursos Totales	7.000	
	7.500	Activo de la Expl.	13.000	
40 %		Tasa de rentabilidad s/rt		58,2 %
	+ 3,992 % (t)	← Tasa de cambio en la Productividad → (t')		+ 4,- %
		Tasa de cambio en el coste medio → (t')		+ 4,2 %
	- 3,952 % (t)	← Tasa de cambio en el coste medio <sup>0</sup> (a precio constante), → (t')		- 3,85 %
q <sup>^</sup> - F <sup>^</sup> =	q <sup>^</sup> = + 41,078 %	← Tasa de cambio en las unidades de Producto (q <sup>^</sup> ) → (t')		+ 50,8 %
+3,992 %	F <sup>^</sup> = + 37,156 %	← Tasa de cambio en las unidades de factor (F <sup>^</sup> ) → (t')		+ 45,0 %
		← Tasa de cambio en la ratio Ingresos/Costes → (t')		+ 8,8 %
	+ 3,992 %	← Tasa de cambio en la ratio (Ingresos) <sup>0</sup> /(Costes) <sup>0</sup> → (t')		+ 4,- %
		(..) <sup>0</sup> = a precios constantes, del año base		

El principal problema en la práctica es, sin embargo, cómo cuantificar la productividad en un caso 'normal', entendiéndose por tal aquel en el que –contrariamente al ejemplo numérico anterior- no solo la empresa utiliza, como es inevitable en la realidad, más de un factor (personal, materiales, energía...) sino que produce o suministra más de un *output* (empresa multiproducto). Las soluciones habituales a este problema de la medición de la productividad consisten en utilizar, bien *indicadores de productividad parcial* (para un factor determinado), bien un *indicador de productividad global*. Vayamos por partes.

#### *Indicador de Productividad Global.- Situación simplificada: Empresa uni-producto*

Supongamos que la empresa (o las empresas a comparar) producen un solo producto, a partir, como es habitual, de personal y otros factores. En tal caso no hay problema, por ejemplo, para calcular el coste medio de cada año,

$$CM = \frac{\sum_j F_j \cdot K_j}{q} ; \quad j = 1, 2, \dots \text{ denota los diferentes factores}$$

pero si queremos calcular su indicador de productividad, la fórmula sencilla anterior – unidades de producto dividido por unidades de factor- no es aplicable, porque hay mas de

un factor. Una posible alternativa es, por supuesto, calcular para cada año (o para cada empresa)<sup>24</sup> tantas *productividades parciales* como factores,

$$\Pi_j = \frac{q}{F_j}; \text{ por ejemplo: } \frac{\text{Toneladas de cemento}}{\text{Horas de trabajo directo}}; \quad \text{ó} \quad \frac{\text{Toneladas de cemento}}{\text{Costes de combustible}}$$

Pero si lo que se pretende es una medida global de la productividad de la empresa no es posible –o es excesivamente complejo, como veremos después- construirla a partir de esos valores de productividad parcial, pues son medidas heterogéneas entre sí. Volveremos más adelante sobre los indicadores de productividad parcial –especialmente respecto al factor trabajo (apartado 5). Sigamos ahora con la perspectiva de la productividad global. Para una situación sencilla como la indicada –un producto (cemento, electricidad, .. por ejemplo), varios factores (trabajadores, combustible, equipos, ...- está ampliamente aceptada como definición de la *productividad global* de la empresa el cociente entre las unidades de producto y un agregado de los factores, a modo de ‘cifra de input global’. Siendo tal agregado una cifra consistente en la suma de las diferentes cantidades de factores, ponderadas con unos determinados pesos o parámetros:  $\sum_j F_j \cdot \sigma_j$ . Unos parámetros ( $\sigma_j$ ) que han de ser siempre los mismos para los cálculos del ‘input global’ de cada año. Generalmente se conviene en tomar como tales pesos los precios de compra o contratación de los respectivos factores para un periodo determinado, periodo ‘0’:  $\sigma_j = K_j^0$ . Con este procedimiento, la cifra resultante como agregado de los factores para un año determinado equivale a los costes totales de la empresa para ese año, recalculados a precios constantes (a precios del año base). Así, si de lo que se trata es de calcular (comparar) la productividad de una empresa uni-producto en dos años consecutivos, ‘0’ y ‘1’, los respectivos indicadores de productividad global serán:

$$\Pi^1 = \frac{q^1}{\sum_j F_j^1 \cdot K_j^0}; \quad \Pi^0 = \frac{q^0}{\sum_j F_j^0 \cdot K_j^0}; \quad t = \ln\left(\frac{\Pi^1}{\Pi^0}\right) \quad [1]$$

Por otra parte, este cálculo es totalmente equivalente -si lo que nos interesa es concretamente determinar *en cuanto ha cambiado* la productividad- a utilizar la forma de calcular la tasa de variación de la productividad,  $t$ , como la diferencia entre la tasa de cambio en el producto menos la tasa de cambio media de los factores –que hemos visto antes:

$$t = \ln \frac{\Pi^1}{\Pi^0} \equiv \ln \frac{q^1}{q^0} - \ln \sum_j \frac{F_j^1}{F_j^0} \cdot a_j^0 \quad [2]$$

$$\text{ó: } \quad t = q^\wedge - \ln(\text{media ponderada de los índices de variación de los factores}) \\ \equiv q^\wedge - (tasa de variación media de los factores); \quad t = q^\wedge - F^\wedge$$

donde los coeficientes  $a_j^0$  representan la proporción que el factor ‘j’ representa en los costes totales del periodo tomado como base: periodo ‘0’<sup>25</sup>. (Puede verificarse que, efectivamente, ambos cálculos de la tasa de variación  $t$ -[1] y [2]- dan el mismo resultado).

<sup>24</sup> La comparación temporal y la comparación entre empresas es formalmente idéntica. Toda expresión referida a la comparación temporal es aplicable directamente a la comparación interempresas, cambiando ‘Productividad del año 1’ por ‘Productividad de la empresa 1’, etc. En consecuencia, y para simplificar la exposición, en adelante se prescinde de hacer referencias a la aplicabilidad de lo expuesto a la comparación interempresas.

<sup>25</sup>  $\frac{\Pi^1}{\Pi^0} = \frac{q^1 / \sum_j (F_j^1 \cdot K_j^0)}{q^0 / \sum_j (F_j^0 \cdot K_j^0)} \rightarrow \frac{\sum_j (F_j^1 \cdot K_j^0)}{\sum_j (F_j^0 \cdot K_j^0)} \equiv \sum_j (F_j^1 / F_j^0) \cdot \frac{(F_j^0 \cdot K_j^0)}{\sum_j (F_j^0 \cdot K_j^0)} \rightarrow \frac{(F^0 \cdot K^0)_j}{\sum (F^0 \cdot K^0)_j} =^d a_j^0; \quad \sum a_j^0 = 1$



Pasemos ya al caso estadísticamente más normal: empresas que producen, como es habitual, varios productos distintos, a partir de varios factores. El *índice de productividad global* o total puede calcularse, según la definición estándar (Indicador de Productividad Global, IPG; *Total Factor Productivity*, TFP; o *Multi-factor Productivity*, MFP), como:

$$\Pi^1 = \frac{\sum_i q^1 \cdot \lambda_i}{\sum_j F^1 \cdot \sigma_j}; \quad \Pi^0 = \frac{\sum_i q^0 \cdot \lambda_i}{\sum_j F^0 \cdot \sigma_j};$$

donde:  $i = 1, 2, \dots$  denota los diferentes productos;  $\lambda_i$  son los pesos escogidos para ponderar los diferentes productos; y  $\sigma_j$  son los pesos, ya definidos anteriormente, tomados para los diferentes factores.

La utilización de los pesos  $\lambda_i$  permite obtener un agregado de los diferentes productos en forma de una cifra que representa el ‘producto total’ de la empresa. Paralelamente a lo dicho antes para los factores, para los productos lo más habitual es tomar como dichos pesos los precios de cada producto en un año dado, o año base (generalmente el mismo año que para los factores):  $\lambda_i = P^0_i$ . Con lo que el cálculo del IPG queda como:

$$\Pi^1 = \frac{\sum_i q^1 \cdot P^0_i}{\sum_j F^1 \cdot K^0_j}; \quad \Pi^0 = \frac{\sum_i q^0 \cdot P^0_i}{\sum_j F^0 \cdot K^0_j}; \quad [3]$$

Obsérvese que en esta opción metodológica el numerador de  $\Pi^1$  equivale a los ‘ingresos a precios constantes’ (es decir, los ingresos del año ‘1’, recalculados a precios del año base), y el denominador a los ‘costes a precios constantes’ (ídem). Y, al igual que en la situación simplificada de un solo producto, la tasa de variación de la productividad del año ‘0’ al año ‘1’ puede calcularse a partir de los dos valores anteriores, [4], y también directamente como la diferencia entre la tasa de variación media de los productos menos la tasa de variación cambio media de los factores [4a]:

$$t = \ln\left(\frac{\Pi^1}{\Pi^0}\right) \quad t = \ln \sum_i \left(\frac{q^1}{q^0}\right)_i \cdot v_i^0 - \ln \sum_j \left(\frac{F^1}{F^0}\right)_j \cdot a_j^0$$

[4] [4a]<sup>26</sup>

donde  $v_i^0$  son coeficientes que indican la importancia relativa de los ingresos procedentes del producto ‘i’ con relación a los ingresos totales, en el año base (ver nota); y  $a_j^0$  es la proporción que el factor ‘j’ representa en los costes totales de dicho año base.

Definida así la medida de la productividad de una empresa [3], ésta nos mide lo que en los trabajos sobre el tema se denomina productividad ‘bruta’ o total; (o, simplemente, medida de la ‘eficiencia productiva’). La variación de la cual [4a] puede venir explicada en parte por un mejor uso de los factores (variación de la *productividad técnica*, o ‘eficiencia de gestión’) y en parte –si el volumen de actividad ha variado sustancialmente- por el efecto de las posibles *economías de escala* (variación en la ‘eficiencia de escala’). En otros términos, si hay motivos para pensar que en el intervalo de volumen de producción observado para dos años consecutivos se dan economías de escala constantes, entonces la correspondiente tasa de variación  $t$  podremos considerarla como referida exclusivamente al cambio experimentado por la *productividad técnica*.<sup>27</sup>

<sup>26</sup>  $\frac{\Pi^1}{\Pi^0} = \frac{\sum_i (q^1 \cdot P^0_i) / \sum_i (q^0 \cdot P^0_i)}{\sum_j (F^1 \cdot K^0_j) / \sum_j (F^0 \cdot K^0_j)}; \quad \frac{\sum_i (q^1 \cdot P^0_i)}{\sum_i (q^0 \cdot P^0_i)} = \sum_i \left(\frac{q^1}{q^0}\right)_i \cdot \frac{(q^0 \cdot P^0_i)}{\sum_i (q^0 \cdot P^0_i)}; \quad \frac{(q^0 \cdot P^0_i)}{\sum_i (q^0 \cdot P^0_i)} =^d v_i^0$

<sup>27</sup> Es frecuente encontrar en la literatura sobre el tema una perspectiva distinta sobre esta cuestión. Sintetizándola: El utilizar como pesos los referidos coeficientes  $v_i$  y  $a_j$  implica introducir la restricción

Conviene señalar, finalmente, que en los trabajos sobre mediciones de productividad es frecuente encontrar una expresión ligeramente distinta para la tasa de variación de la productividad global, de cálculo algo más sencillo; concretamente en cuanto a la determinación de los dos promedios de [4a], a base de utilizar como coeficientes ( $v$ ,  $a$ ) índices tipo Törnqvist.

$$t \approx \tau = \sum_i v_i^* \cdot \ln \left( \frac{q^1}{q^0} \right)_i - \sum_j a_j^* \cdot \ln \left( \frac{F^1}{F^0} \right)_j \quad [4b]$$

$$\text{Siendo: } v_i^* = (v^1 + v^0)/2; \quad \sum v_i^* = 1; \quad \text{y: } a_j^* = (a_j^1 + a_j^0)/2; \quad \sum a_j^* = 1$$

O, expresado de forma más compacta:

$$\tau = \sum_i v_i^* \cdot q_i^{\wedge} - \sum_j a_j^* \cdot F_j^{\wedge} \quad [4b]$$

donde  $q_i^{\wedge}$  representa la tasa de variación observada para el producto 'i',  $[\ln(q^1/q^0)]_i$ , y  $F_j^{\wedge}$  la tasa de variación observada para el factor 'j',  $[\ln(F^1/F^0)]_j$ .

(Los respectivos valores resultantes no difieren sustancialmente de los de [4a]):

En cualquier caso, puede verse que la definición de *Indicador de Productividad Global* (IPG) que implícitamente se está utilizando cuando se efectúan cálculos tipo [4a,b] es el antes definido:  $\Pi^1, \Pi^0$ .

---

(presunción) de que la empresa opera con economías de escala constantes. (Puede verse al respecto: Milward, R y Parker, D.M. "Public and Private Enterprise: Comparative Behaviour and Relative Efficiency" en Milward, R./ Parker, D.M./ Rosenthal, L/ Summer, M. T./ Topham, N. (Eds), *Public Sector Economics*, Longman, 1983, pág. 225-227). Y, en efecto, así sería si interpretásemos –como así hacen los referidos autores– que los valores  $t$  que vamos a obtener representan la tasa de variación de la *productividad técnica*. En la presente exposición se ha optado por una perspectiva más directa: Las tasas de variación  $t$  resultantes de las expresiones [4] (o de las que siguen después, 4a, 4b) nos hablan de la variación de la productividad total de la empresa. Variación que puede tener una componente de *eficiencia técnica* y otra de *eficiencia de escala* (Y –habría que añadir, por lo que veremos a continuación– una tercera posible componente generada por cambios significativos en el 'mix' comercial).

### 3.1 Productividad Total de los Factores: Análisis longitudinal

Abandonemos la simplificación de que solo nos interesa calcular la productividad de la empresa en cuestión para solo dos años. Lo más adecuado para sacar conclusiones relevantes será calcularla para un periodo de varios años:

$$[3] \quad \Pi^x = \frac{\sum_i (q^x \cdot P^0)_i}{\sum_j (F^x \cdot K^0)_j}; \quad x = \text{año}; (x=0, 1, 2, 3, 4\dots) \quad t^x = \ln\left(\frac{\Pi^x}{\Pi^{x-1}}\right) \quad [4]$$

Siendo entonces la expresión general para el cálculo directo de las tasas anuales de variación de la productividad:

$$t^x = \ln \sum_i \left( \frac{q^x}{q^{x-1}} \right)_i v_i^{(x-1),0} - \ln \sum_j \left( \frac{F^x}{F^{x-1}} \right)_j \cdot a_j^{(x-1),0} \quad [4a], \equiv [4]$$

Donde  $v_i^{(x-1),0}$  representa los coeficientes (en tantos-por-uno) de la composición de los ingresos del año  $x-1$ , pero previamente recalculados a precios de venta del año base (0); y  $a_j^{(x-1),0}$  representa la composición de los costes del año  $x-1$ , también previamente recalculados a los respectivos precios de compra del año 0. En ambos casos, la suma de los coeficientes es por tanto igual a 1.

O bien, en su aproximación o variante tipo ‘índices de Törnqvist’:

$$\tau^x = \sum_i v_i^* \cdot \ln\left(\frac{q^x}{q^{x-1}}\right)_i - \sum_j a_j^* \cdot \ln\left(\frac{F^x}{F^{x-1}}\right)_j \quad [4b]^{28}$$

$$\text{Donde: } v_i^* = (v_i^x + v_i^{x-1})/2; \quad \sum v_i^* = 1; \quad a_j^* = (a_j^x + a_j^{x-1})/2; \quad \sum a_j^* = 1$$

Como puede verse –dada la formulación estándar de Indicador de Productividad Global, TFP o MFP, [3]- cada indicador de productividad anual,  $\Pi^x$ , equivale a un cociente entre los ingresos y los costes totales del año ‘x’ considerado, pero valorados los unos y los otros a unos precios (de venta, para los numeradores; de compra/contratación, para los denominadores) constantes, idénticos para el cálculo de los  $\Pi^x$  para los sucesivos años (es decir, que los precios referidos entran en el cálculo del IPG simplemente como parámetros).

<sup>28</sup> En la literatura sobre el tema es frecuente una versión más ‘compacta’ de esta expresión; del tipo:

$$[4b] \rightarrow \tau^x = \sum_i v_i^* \cdot \hat{q}_i - \sum_j a_j^* \cdot \hat{F}_j$$

(las letras utilizadas para simbolizar productos (outputs), factores (inputs), etc., también varían entre los autores).

$$[3] \quad \text{Indicador de Productividad Global}^x, \Pi^x = \frac{\text{Ingresos}^x \text{ (a unos precios dados}^0)}{\text{Costes totales}^x \text{ (a unos precios dados}^0)}$$

$x$  = año para el que se calcula el IPG;  $0$  = año que se toma como base para los precios (utilizados como parámetros)

Curiosamente, esta equivalencia no suele ser tenida en cuenta en la literatura sobre el tema. Incluso diríase que, al contrario, se razona como si fórmulas de cálculo como [4a] y [4b] – las más aplicadas; raramente se determinan los índices de productividad [3] propiamente dichos- respondieran a un modelo riguroso (*economics*) muy por encima conceptualmente de cálculos ‘simples’ relativos a costes e ingresos (*accounting*’s)

En cualquier caso, este es en la práctica el indicador más utilizado, bien explícita [3] o implícitamente [4, 4a, 4b], tanto para comparar la productividad de una empresa en un año con respecto a otro, como para comparar la productividad de una empresa (A) con la de otra u otras (B), para un periodo dado. En lo que sigue nos referiremos a las aplicaciones del primer tipo (*cross time*); posteriormente nos centraremos en la aplicación a comparar la productividad de dos o más empresas.

En resumen, el resultado de un cálculo de productividades de una empresa para un periodo determinado, siguiendo el planteamiento anterior, puede ilustrarse con el siguiente ejemplo numérico:

Años →	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
$\Pi^x$	1,085	1,16	1,20	1,22	1,38	1,45	1,35	1,48	1,42
$t \times 100$		+6,68%	+3,39 %	+1,65 %	+12,32%	+4,95 %	-7,15 %	+9,19 %	-4,14 %

#### *El efecto del ‘mix’ comercial, sobre la productividad total*

Con relación a la definición estándar del IPG [3] conviene tener en cuenta que nos puede estar midiendo en realidad, además de la eficiencia productiva ( eficiencia técnica y economías de escala) un tercer componente: Un componente de carácter puramente comercial: Supongamos que se observa que la relación Ingresos/Costes, a precios constantes, específica para uno de los productos (el ‘3’, por ejemplo) es, de forma estable, mayor que para el resto (o sea, que tal producto rinde un mayor margen comercial). Si de un año a otro la estructura de las ventas de la empresa cambia en el sentido de que las del producto ‘3’ pasan a representar una mayor proporción (el coeficiente  $v_3$  aumenta, los restantes coeficientes  $v$  disminuyen), este solo hecho hará que el IPG de la empresa estudiada presente un incremento. Y, sin embargo, tal incremento no tendrá en realidad nada que ver con la idea de que la *eficiencia productiva* ha mejorado, sino que proviene simplemente de un cambio en la composición de las ventas o ‘mix comercial’.<sup>29</sup>

<sup>29</sup> Del cambio observado en el IPG (tasa  $t$ ) en un año es posible separar la parte que es atribuible al cambio registrado en la estructura de la venta  $-y$ , por tanto, deslindar la parte que corresponde propiamente a un cambio en la productividad global (a su vez con dos posibles componentes: por eficiencia técnica y por economías de escala). Para ello es necesario disponer de datos sobre la diferente relación ventas/costes específica para los diferentes productos o líneas de facturación. Puede verse sobre esto Prior, D. / Vergés, J. / Vilardell, I., op. cit. pág. 83-91,



mismo que [3] pero a partir de variables más ‘asequibles’ de obtener para un investigación ‘desde fuera’ de la empresa (que es lo habitual). En resumen los datos necesarios son: Ingresos y Costes de cada año, desglosados en sus componentes, y los índices de variación tanto de los precios de venta aplicados por la empresa (para cada componente de los Ingresos) como de los precios de compra/contratación pagados por la misma (para cada componente de los Costes).

Y si la opción es la de calcular directamente las tasas de variación anuales de la productividad, puede aplicarse [4a] o [4b], substituyendo los cocientes de unidades físicas (para productos, y para factores), por cocientes entre valores de costes e ingresos a precios constantes:

$$t^x = \ln \sum_i \left( \frac{IE^x / IP^x}{IE^{x-1} / IP^{x-1}} \right)_i \cdot v_i^{(x-1),0} - \ln \sum_j \left( \frac{CE^x / IK^x}{CE^{x-1} / IK^{x-1}} \right)_j \cdot a_j^{(x-1),0} \quad [4a]$$

O bien, en su aproximación o variante tipo ‘índices de Törnqvist’:

$$\tau^x = \sum_i v_i^* \cdot \ln \left( \frac{IE^x / IP^x}{IE^{x-1} / IP^{x-1}} \right)_i - \sum_j a_j^* \cdot \ln \left( \frac{CE^x / IK^x}{CE^{x-1} / IK^{x-1}} \right)_j \quad [4b]^{31}$$

#### *Relación entre los indicadores ‘margen’ y ‘productividad’*

La reexpresión de la medida de la productividad global según [5c] permite además poner de relieve que existe una relación directa entre el indicador IPG de un año ‘x’ y el indicador tasa de margen del mismo. Es decir, que no se trata de dos variables independientes entre sí (lo cual es importante tener en cuenta cuando se utilizan ambas simultáneamente como indicadores de eficiencia). Así:

$$[5c] \quad \Pi^x = \frac{IE^x \cdot \left( \frac{1}{IP^x} \right)}{CE^x \cdot \left( \frac{1}{IK^x} \right)} \equiv \frac{1}{1 - m^x} \cdot \frac{IK^x}{IP^x}; \quad \text{y, a la inversa: } m^x = 1 - \frac{1}{\Pi^x} \cdot \frac{IK^x}{IP^x} \quad [8]$$

Esto permite deducir que si, por ejemplo, se diese el caso de que el cambio promedio experimentado por el conjunto de los precios de venta de la empresa fuese precisamente idéntico al experimentado por los precios de compra/contratación ( $IP^x = IK^x$ ) -por ejemplo: que tanto los salarios como los precios de las materias primas, los de la energía, ... etc. hayan aumentado en un 6%, y que todos los precios de venta hayan aumentado también en un 6%-, entonces el IPG del año ‘x’ tendría el mismo valor que resultaría de efectuar el simple cociente entre los ingresos y los costes totales de dicho año, a precios corrientes, tal como directamente se obtienen estos de la cuenta de resultados de la empresa. Por lo tanto, en tal caso aplicar un indicador relativamente sofisticado de cálculo como es  $\Pi^x$  llevaría exactamente a las mismas conclusiones sobre la eficiencia de la empresa que aplicar el sencillo indicador  $m^x$ . O, visto desde otra perspectiva, que el cambio observado en la tasa

<sup>31</sup> En la literatura sobre el tema es frecuente una versión más ‘compacta’ de esta expresión; del tipo:

$$[4b] \rightarrow \tau^x = \sum_i v_i^* \cdot \hat{q}_i - \sum_j a_j^* \cdot \hat{F}_j$$

(las letras utilizadas para simbolizar productos (outputs), factores (inputs), etc., también varían entre los autores).

de margen ha sido debido exclusivamente a la variación experimentada por la productividad.

*‘Efecto productividad’ y ‘efecto precios’*

En resumen que la tasa de margen (m) depende del indicador de productividad (IPG) y del comportamiento relativo de los precios de venta y de los precios de compra/contratación de la empresa (índices IP, y IK). El cociente IP/IK mide de hecho lo que normalmente se entiende por ‘relación de precios’: algo que cuando cambia, modifica la tasa de margen. Tomemos el siguiente ejemplo del cálculo de ambos indicadores para dos años consecutivos:

año	m	Π	IP	IK
x-1	18/100	1,453	1,301	1,549
x	26,1/100	1,52	1,38	1,55

La relación [8] nos dice que necesariamente se cumplirá que:

$$\frac{18}{100} = 1 - \frac{1}{1,453} \cdot \frac{1,549}{1,301}, \text{ y que: } \frac{26,1}{100} = 1 - \frac{1}{1,52} \cdot \frac{1,55}{1,38}$$

La simple lectura de lo anterior nos permite a su vez deducir que la *relación de precios* outputs/inputs para la empresa mejoró: los precios de los factores no variaron substancialmente de un año a otro, mientras que los de sus productos subieron en promedio alrededor de un 6%. Esto por si solo habría hecho que la tasa de margen aumentase. A lo que se añadió que la productividad aumentó en un 4,5%. Y es el conjunto de ambos movimientos favorables lo que hace que la tasa de margen mejorase del 18% al 26,1%. Dando un paso más, podemos preguntarnos ¿qué parte de la variación observada en la tasa de margen ha sido causada por el comportamiento de la *productividad*, y qué parte por el cambio en la *relación de precios*? Concretamente, la tasa de margen aumentó en 8,1 puntos de %. ¿Qué parte de este aumento fue debido a la mejora en la productividad? Aplicando [8] podemos determinar que si en el año x la productividad hubiese sido la misma que en el año anterior (1,453, en lugar de 1,52), dada la evolución de la relación de precios la tasa de margen hubiese sido del 22,7%

$$1 - \frac{1}{1,453} \cdot \frac{1,55}{1,38} = \frac{22,7}{100}$$

Es decir, 3,4 puntos menor de lo que en realidad ha sido. Podemos decir pues que éste ha sido el efecto derivado de la mejora observada en la productividad; y que en consecuencia el resto, 8,1-3,4= 4,7 puntos de %, es el efecto derivado del cambio experimentado en la relación de precios<sup>32</sup>.

### 3.3 Los cálculos de los IPG por aproximación

Es frecuente que al tratar de calcular los IPG de una empresa para determinados años (para así efectuar una comparación temporal) no solo no se disponga de la información detallada por unidades y precios para cada producto y/o para cada factor sino que la información

<sup>32</sup> Aunque no es ésta, desde luego, la única manera de efectuar tal desglose; si bien cualquier alternativa -por ejemplo, la de proceder a la inversa: suponer que es la relación de precios la que no hubiese cambiado de un año a otro- dará valores no muy distintos: efecto productividad = +3,66 puntos de %; efecto precios = 4,44 puntos de %. igual a Ver más adelante punto 6, apartado 3. Y hay otras formas de plantear el desglose; puede verse Miller, D. (1984) “Profitability = productivity + price recovery”, *Harvard Business Review*, May-Jun, pp. (145-153); y Waters II, W. G. & Street, J. (1998), “Monitoring the Performance of Government Trading Enterprises”, *Australian Economic Review*, 31-4, (357-371).

sobre el desglose de los Ingresos, el de los Costes, y las variaciones de los precios de la empresa es más o menos incompleta. Cabe entonces el recurso a cubrir los ‘huecos’ con algún tipo de estimación (de hecho esto es lo que más frecuentemente encontramos en la literatura empírica sobre el tema). Veamos como suelen ser éstas aproximaciones, yendo de la mejor a las menos buenas.

#### *Aproximación tipo I*

Teniendo en cuenta que, como hemos visto, el  $\Pi^x$  puede también calcularse utilizando valores monetarios para productos y para factores, junto con los índices de variación de los respectivos precios de la empresa, una buena aproximación a  $\Pi^x$  -cuando no se dispone de datos sobre unidades y sobre precios de cada producto y de cada factor- consiste en aplicar [5a] calculando, para cada año, numerador y/o denominador utilizando estimaciones para los correspondientes índices de variación de los precios cobrados por la empresa para cada producto,  $IP_i^x$ , y/o de los pagados para cada factor,  $IK_j^x$ , en cada año.

Así, a título de ejemplo, si no se dispone de datos sobre los precios de cada producto para cada año del periodo en estudio pero si se conoce -a partir de informaciones indirectas, procedentes de las memorias anuales de la empresa- cual ha sido la política de precios de venta seguida en tal o cual año. Esto permitiría estimar con razonable confianza unos valores para el índice de variación de precios de cada producto, en ese año:  $IP_i^x$ . Aplicando estos valores estimados en [5a] la resultante sería una aproximación perfectamente aceptable -en este caso para el numerador (cifra de ‘output’ global). Y una situación paralela en cuanto a información indiciaria sobre la variación de los salarios, del precio de compra del suministro principal, etc., podría deducirse de la lectura de las memorias anuales, lo que permitiría una estimación razonable de los denominadores.

#### *Aproximación tipo II*

Una situación menos favorable se da cuando la información obtenida de las memorias anuales se refiera solo de forma genérica, a grandes trazos, a la política de precios de facturación seguida por la empresa -sin especificar por productos ni por factores. En tal caso, solo existe la posibilidad de efectuar una cierta estimación del índice global de precios,  $IP^x$ , para aplicarlo en la expresión [5c]. Lógicamente esta estimación digamos global (II) será, en tanto que tal, menos buena (tiene asociado un margen de error superior) que la primera, (I), que es detallada.

Por supuesto, en uno y otro caso sabemos que con las estimaciones estaremos introduciendo un cierto grado de error en los resultados cuantitativos obtenidos, pero -a diferencia del concepto de error al que se refieren los test estadísticos- no sabremos de que grado es tal error-por-estimación-da-datos.

En resumen, y centrándonos en el cálculo de los numeradores de los IPG de cada año:

$$[5a] \text{ Aproximación I: } \sum_i q_i^x \cdot P_i^0 \equiv \sum_i IE_i^x \cdot \frac{1}{IP_i^x} \cong \sum_i IE_i^x \cdot \frac{1}{EST(IP_i^x)}$$

$$[5c] \text{ Aproximación II: } \sum_i (q^x \cdot P^0)_i \equiv IE^x \cdot \frac{1}{IP^x} \approx IE^x \cdot \frac{1}{EST(IP^x)} ;$$

Donde ‘EST(.)’ significa que se trata de un valor estimado.

Y, paralelamente, el mismo esquema y razonamiento es aplicable al cálculo por aproximación de los denominadores de [5a, b ó c] basado en estimaciones de los respectivos índices de precios de compra/contratación.



### *Aproximación vía agregados de productos y agregados de factores*

Una aproximación tipo I presupone que se dispone de los valores monetarios de ingresos para cada producto (o/y de los de costes para cada factor). Pero raramente se dispone de una información detallada a ese nivel. Lo más probable es que, en el mejor de los casos, dispongamos tan solo de un cierto desglose de los ingresos, por *agregados de productos* (cifras de facturación de cada una de las, pongamos, dos o tres líneas de venta o de actividad de la empresa). Y es bastante probable que dispongamos también de un cierto desglose de los costes anuales, pero no para cada factor sino el que aparece en las cuentas de resultados publicadas por la empresa: Generalmente, las cifras relativas a bloques de costes como: ‘Costes de Personal’, de ‘Aprovisionamientos’, de ‘Servicios de otras empresas’, de ‘Amortizaciones’, y ‘Costes Restantes’. Es decir, cifras que se refieren a *agregados de factores*. Ante tal limitación en cuanto a información el recurso habitual de los investigadores es llevar a cabo la medición de la productividad ‘como si’ esos agregados monetarios de ventas por líneas fuesen en realidad datos referidos a productos específicos ( $IE^x_i$ ), y ‘como si’ los agregados de costes correspondiesen cada uno a un solo factor productivo ( $CE^x_j$ ). Es decir, asumiendo la ficción de que la empresa que nos ocupa produce dos o tres productos (tomando por tales las *líneas de venta*) y que consume un factor llamado ‘Aprovisionamientos’ otro llamado ‘Personal’, etc.; y utilizando esos agregados monetarios en [5a,6 b] para efectuar entonces una aproximación tipo I. Con tal procedimiento estaremos inevitablemente acumulando dos elementos de error: el proveniente de usar agregados contables, que en realidad cada uno es un paquete de diferentes productos / diferentes factores; y el proveniente de estimar los correspondientes índices de precios para tales agregados.<sup>33</sup>

De hecho esta alternativa (llamémosla I-Agr, por: ‘aproximación I, con datos agregados’) constituye un cierto intermedio entre las aproximaciones I y II. Y, por supuesto, una aproximación que trabaje con datos algo desglosados (I-Ag) comportará en general un grado de error menor que una aproximación con cifras más globales (II). Teniendo en cuenta que las cuentas que en general publican las empresas contienen normalmente un cierto desglose de los costes –por bloques de factores-, pero no normalmente un desglose de los ingresos por líneas de venta, una aproximación tipo II para los numeradores y una tipo I-Agr para los denominadores resulta bastante frecuente en los estudios empíricos disponibles (artículos en revistas académicas). Siendo realistas, con la información usualmente disponible es la mejor opción de cálculo por aproximación de los indicadores de productividad global; o la menos mala, si se prefiere: la que conllevará un menor nivel de error.

### *Aproximaciones con índices de precios externos a la empresa*

Una situación aún peor en cuanto a disponibilidad de datos es cuando ni siquiera se dispone de información indiciaria alguna sobre la evolución de los precios cobrados ni de los pagados por la empresa. ¿Entonces?

Recapitulemos. La gran diferencia entre calcular el indicador de productividad para un determinado año [5a] y calcular el simple cociente entre Ingresos y Costes ( $IE/CE$ ) es precisamente la introducción, en el primer caso, de los *índices de precios de la empresa*,  $IP^x_i$  y  $IK^x_j$ . Si no se tiene información alguna al respecto ...lo lógico sería limitarse a calcular el modesto indicador de eficiencia  $IE/CE$  para cada año. Sin embargo, no son escasos los trabajos publicados sobre el tema en los que –ante tal situación- los autores

---

<sup>33</sup> El problema metodológico es que cualquiera de esos agregados incluye componentes que pueden ser muy heterogéneos en cuanto a la evolución de sus respectivos precios.

optan, a pesar de todo, por calcular los indicadores de productividad de cada año [5a], a base de efectuar supuestos subjetivos sobre la evolución de los diferentes precios de la empresa.

Concretamente los supuestos de tomar como estimadores de los respectivos índices de variación de precios de la empresa,  $IP^x_i$ ,  $IK^x_j$ , unos índices de precios exteriores, de los que publica una agencia pública como el Instituto Nacional de Estadística español. Unos índices de precios referidos a sectores o subsectores de actividad, por tanto. Tomada tal opción, el índice de precios concreto a escoger del anuario estadístico para tal o cual producto (o línea de ventas) o para tal o cual factor (o bloque de costes) de la empresa se supone que debería ser el de la clasificación estadística de actividades en la que presumiblemente se incluiría tal producto (o tal factor). Así, por ejemplo: tomar el índice de precios al consumo del sector de actividad de la empresa (“Medicamentos y otros productos farmacéuticos”, del INE, por ejemplo), como estimador (variable *proxy*) del índice promedio de precios de facturación de la empresa ( $IP^x$ ); tomar el índice de salarios, también para el sector de actividad de la empresa (siguiendo el ejemplo, CNAE 21 “Fabricación de productos farmacéuticos”), como *proxy* de la variación de los salarios pagados por ésta, para aplicarlos a las cifras anuales de ‘costes de personal’; tomar determinados índices de precios industriales, como *proxies* de los índices de variación,  $IK^x_j$ , del resto de los agregados de costes (aprovisionamientos, amortizaciones/depreciaciones de bienes de equipo, gastos por servicios exteriores, etc.), etc.

En cualquier caso, el tomar índices de precios externos para cálculos de productividad hace que los resultados cuantitativos sean de dudosa interpretación. Resultan de efectuar supuestos del tipo de que la empresa ha aplicado en su facturación a los clientes una política de precios igual a la media de las empresas encuadradas en la clasificación estadística de bienes seleccionada; de que su política de salarios también ha sido igual que la media de las empresas de la clasificación estadística de actividades industriales escogida, etc. etc.

La probabilidad de que el tipo de productos de una empresa encuadrable en la clasificación estadística del IPC ‘nn’ sea muy distinto de la media de las empresas encuadradas en dicha clasificación estadística es muy alta.

Por supuesto, este recurso al efectuar aproximaciones tipo I o II utilizando como estimaciones para los índices de precios de la empresa unos índices genéricos, exteriores (llamémosle aproximación tipo I/II-ext, por lo de estimación sobre precios, basada en datos externos) introduce un nuevo grado de error que se acumula a los anteriormente mencionados. En este sentido –de ir de la aproximación más aceptable a la menos buena, por el nivel de total de error que implica- la peor estimación (no por ello la menos frecuente en la literatura) es la consistente en utilizar la expresión [5c] estimando directamente el índice de precios promedio para los productos ( $IP^x$ ) y el índice promedio para los factores ( $IK^x$ ), tomando como estimadores determinados índices de precios de las estadísticas oficiales, para aplicarlos a agregados monetarios de la empresa tipo ‘Aprovisionamientos?’. Es decir, una aproximación tipo II-Agr-ext.

Nada obliga, desde luego, a efectuar el mismo tipo de aproximación para productos (numeradores) que para factores (denominadores). Lo lógico es optar en cada caso por la mejor aproximación posible, en función de los datos de que se disponga. Por ejemplo, es habitual encontrar en la literatura sobre el tema que para los numeradores se efectúe una aproximación tipo II-ext (porque los autores no dispusieron de desagregación alguna de los ingresos anuales totales de la empresa, ni siquiera por líneas de actividad), y una aproximación tipo I-Agr-ext para los denominadores, porque –como se ha señalado antes- las cuentas de resultados publicadas por las empresas sí suele ofrecer un cierto detalle de la composición de los costes anuales.

### 3.4 El cálculo por aproximación, cuando se opta por determinar directamente las tasas de variación de la productividad

Las mismas consideraciones anteriores son de aplicación cuando la alternativa metodológica escogida no es la de calcular los IPG de cada año –y determinar después las respectivas tasas de variación- sino calcular directamente dichas tasas de variación de la productividad según las expresiones [4a] o [4b] anteriores:

$$[4a] \quad t^x = \ln \sum_i \left( \frac{q^x}{q^{x-1}} \right)_i \cdot v_i^{(x-1),0} - \ln \sum_j \left( \frac{F^x}{F^{x-1}} \right)_j \cdot a_j^{(x-1),0};$$

$$[4b] \quad \tau^x = \sum_i v_i^* \cdot \ln \left( \frac{q^x}{q^{x-1}} \right)_i - \sum_j a_j^* \cdot \ln \left( \frac{F^x}{F^{x-1}} \right)_j \quad ; \quad \tau \approx t$$

Aparentemente esta opción tendría la ventaja de obviar la necesidad de información sobre las variaciones de los precios cobrados y pagados por la empresa analizada, pues estos no aparecen en las expresiones anteriores. Y, en efecto, si es que disponemos de información detallada como exigen 4a o 4b -las *unidades físicas* de cada producto y de cada factor, para cada año ( $q^x_i, F^x_j$ ), además de los datos anuales de la composición relativa de los ingresos y la de los costes (coeficientes  $v_i$  y  $a_j$ )- las tasas de variación anual de la productividad,  $t^x$ , son en efecto directamente calculables. Pero obsérvese que decir que se dispone de toda esa información detallada –y, concretamente de los coeficientes  $v$  y  $a$ - equivale a decir que disponemos de información sobre el desglose de los Ingresos por cada producto ( $IE^x_i$ ) y de los Costes por cada factor ( $CE^x_j$ ); y, por tanto, que disponemos de los respectivos precios de cada producto y de cada factor (ya que:  $IE^x_i/q^x_i = P^x_i$  y  $CE^x_j/F^x_j = K^x_j$ ). Así pues, para aplicar [4a,b] seguimos necesitando el mismo grado de información –especialmente sobre los precios de la empresa analizada- que aplicando el cálculo directo de los IPG anuales, [5a,b,c]. Por tanto, con información incompleta el recurso sigue siendo el mismo que en tal caso: llevar a cabo aproximaciones tipo I, II, etc.

Esta falta de la necesaria información detallada, ahora desde la perspectiva de calcular directamente las tasas de variación de la productividad,  $t^x$ , consiste precisamente en que no se suele disponer de los datos anuales sobre, en primer lugar, unidades físicas,  $q^x_i, F^x_j$ , y, por supuesto, tampoco sobre los respectivos precios. Como hemos visto, lo mas habitual es que nuestra información incompleta sea, en el mejor de los casos, en términos de agregados monetarios de Ingresos y de Costes anuales de la empresa.

Utilizando valores monetarios en lugar de unidades físicas, las expresiones equivalentes a las [4a], [4b] para calcular directamente las tasas de variación de la productividad en cada año son, como hemos visto en el apartado 4.2 anterior, las de arriba, simplemente substituyendo los cocientes en unidades físicas por los que aparecen a la derecha:

$$\left( \frac{q^x}{q^{x-1}} \right)_i \equiv \left( \frac{IE^x / IP^x}{IE^{x-1} / IP^{x-1}} \right)_i; \quad \left( \frac{F^x}{F^{x-1}} \right)_j \equiv \left( \frac{CE^x / IK^x}{CE^{x-1} / IK^{x-1}} \right)_j;$$

Con lo que, como puede verse, reaparece explícitamente la cuestión de los precios, de la que parecía que podíamos zafarnos al optar por el cálculo directo de tasas de variación anual de la productividad: Para aplicar lo anterior necesitamos, también, conocer los respectivos índices de precios.

Y paralelamente, el cálculo por aproximación al aplicar [4a] o [4b] así modificadas tiene los mismos elementos y casuística comentados antes: Efectuar estimaciones tipo I o tipo II sobre los diferentes índices de precios, la utilización de agregados de Ingresos y de agregados de Costes ‘como si’ se refiriesen a  $IE^x_i$  y a  $CE^x_j$ , respectivamente (I/II-Agr), recurrir además a índices de precios externos como *proxies* a aplicar a esos valores monetarios de paquetes de productos y paquetes de factores (aproximaciones I/II-Agr-ext), etc. etc. Y, por supuesto, la aproximación ‘peor’ (con un mayor nivel de error) sería, por lo argumentado en el apartado 4.2 anterior, las aproximaciones del tipo II-Agr-ext. La inevitable acumulación de errores por estimaciones y supuestos puede hacer que las tasas anuales de cambio de la productividad obtenidas de tal cálculo tengan una fiabilidad muy por debajo de lo admisible.

## LOS INDICADORES DE PRODUCTIVIDAD, EN LA COMPARACIÓN ENTRE EMPRESAS

### Análisis horizontal (*cross section*)

---

#### 4.1 El esquema básico (longitudinal/temporal), cambiando la perspectiva

Para que tenga sentido calcular y comprar la productividad de dos (o más) empresas, una de las condiciones necesarias –como hemos visto al principio- es la de homogeneidad: que sean del mismo sector, que tengan la misma actividad. En sentido estricto, que suministren el mismo tipo o gama de ‘i’ productos; de lo que puede inferirse que también utilizan básicamente el mismo tipo de ‘j’ factores.

Como hemos visto, en el análisis comparativo longitudinal, *cross time*, el cálculo de índices de productividad anuales tiene como núcleo el tomar siempre en los cálculos, como pesos de las unidades físicas de productos y de factores, los respectivos precios del año ‘0’, *año base*.

Comparar la productividad global (IPG) de una empresa, A, con la de otra, B, requiere el mismo esquema básico desarrollado hasta aquí para el análisis longitudinal/temporal, cambiando simplemente la óptica: Lo que en el análisis comparativo *cross time* es “año 1” (o años ‘x’) y “año 0”, en el análisis comparativo *cross section* pasa a ser “empresa A” (o empresas ‘X’) y “empresa B”. Este cambio de perspectiva se concreta principalmente en que los pesos (precios) a los que se ponderan (valoran) las respectivas unidades de productos y de factores han de ser siempre los mismos para cada IPG a calcular, para ambas empresas. Y lo habitual es utilizar como tales los precios de una de las empresas, por ejemplo los de ‘B’ (‘empresa base’)

Es decir, que los IPG para comparar la empresa A con la B, para un año determinado, se calculan como:

$$\Pi^A = \frac{\sum_i (q^A \cdot P^B)_i}{\sum_j (F^A \cdot K^B)_j}; \quad \Pi^B = \frac{\sum_i (q^B \cdot P^B)_i}{\sum_j (F^B \cdot K^B)_j};$$

[3a], [3b]

Donde:

$\Pi^A$  es el índice de productividad global (IPG) de la empresa A (en el año de cálculo); y  $\Pi^B$ , el de la empresa B (en ese mismo año)

$P^A$  es el precio de facturación de A, para un determinado producto ‘i’, en ese año; y  $P^B$  es el precio de facturación de la empresa B para ese mismo producto (en el mismo año).

Paralelamente,  $K^A$  es el precio que paga la empresa A por un determinado factor ‘j’; y  $K^B$  es el que paga la empresa B por ese mismo factor; (en el mismo año).

Y, por supuesto,  $q$  y  $F$  representan las cantidades de productos y de factores, respectivamente, para el mismo año de cálculo

Y en cualquier caso, la tasa de variación entre una y otra empresa:

$$t = \ln\left(\frac{\Pi^A}{\Pi^B}\right); \quad \text{si } t > 0, \rightarrow \text{'A' más eficiente, en el año 'x'}; \text{ i viceversa}^{34}$$

La tasa de variación,  $t$ , nos da ya directamente la comparación de la productividad de la empresa A respecto a la de la B, en ese año 'x' para el que hemos efectuado el cálculo. Así, como ejemplo, si resultase  $t = 0,06$ , significaría que la productividad de la empresa 'A' fue un 6% mayor que la de la 'B' en ese año para el que se ha hecho la determinación. Deberíamos, pues, denominar a  $t$  aquí, mejor que tasa de *variación* (que sugiere comparación en el tiempo), tasa de *diferencia*: diferencia entre la productividad de una empresa comparada con la de la otra. Esta tasa, igual que en la comparación temporal, puede calcularse también directamente:

$$t \equiv \ln \sum_i \left( \frac{q^A}{q^B} \right)_i \cdot v_i^B - \ln \sum_j \left( \frac{F^A}{F^B} \right)_j \cdot a_j^B; \quad (\text{para el año 'x'}) \quad [4c]$$

Siendo ahora  $v_i^B$  la composición o estructura de la venta de la empresa B, ( $\sum v_i^B = 1$ );  
y  $a_j^B$  la composición o estructura de los costes totales de la empresa B, ( $\sum a_j^B = 1$ );  
en ambos casos, para el año de cálculo 'x'.

O bien aplicando su correspondiente versión Törnkvist, ( $\tau \approx t$ ):

$$\tau = \sum_i v_i^* \cdot \ln\left(\frac{q^A}{q^B}\right)_i - \sum_j a_j^* \cdot \ln\left(\frac{F^A}{F^B}\right)_j; \quad (\text{idem}) \quad [4d]$$

Siendo ahora:  $v_i^* = (v_i^A + v_i^B)/2$ ;  $\sum v_i^* = 1$ ;  $a_j^* = (a_j^A + a_j^B)/2$ ;  $\sum a_j^* = 1$

La lectura de cualquiera de las dos variantes es ahora, consecuentemente, la siguiente: Si el término de la izquierda resulta en un valor de 0,32, significará que en conjunto el volumen de productos que la empresa A está suministrando a sus clientes es un 32 % superior al que suministra la empresa B a los suyos. Y si el término de la derecha arroja un valor de 0,28, significará que en conjunto la empresa A está utilizando un volumen de factores un 28% superior al que utiliza la empresa B. De lo que se desprende –además de que A tiene una dimensión algo mayor que B– que el diferencial de productividad es del 6% a favor de A.

#### 4.2 Comparación de productividad (tasas de diferencia, A-B), a partir de valores monetarios

Como anteriormente en el análisis *cross time*, las expresiones anteriores podrían sugerir que esta segunda alternativa –calcular directamente la tasa de diferencia de productividad entre dos empresas– permite obviar la cuestión de los precios. Pero esto es –también como antes– algo solo aparente: La aplicación de [4c, ó d] requiere no solo disponer de unidades físicas de productos y de factores, sino también calcular los coeficientes  $v_i$  y  $a_j$ ; y para obtener estos es necesario disponer de los ingresos y los costes desglosados ( $IE_i$  y  $CE_j$ ) para ambas empresas; lo que –al igual que hemos visto antes– implícitamente equivale a disponer de (o requeriría estimar) los respectivos precios, (ya que  $IE_i/q_i = P_i$ , y  $CE_j/F_j = K_j$ ; tanto para A como para B).

Dicho desde otra perspectiva, si efectivamente disponemos de información de los Ingresos de cada empresa desglosados por cada uno de sus productos, y de sus costes

<sup>34</sup> Un ejemplo de aplicación del cálculo de IPG para la comparación de eficiencia entre empresas en un caso real (Transmediterránea SA vs. Europa Ferrys, SA) puede verse en el documento de trabajo [http://webs2002.uab.es/Jverges/pdf\\_doc\\_treb/EficComp.pdf](http://webs2002.uab.es/Jverges/pdf_doc_treb/EficComp.pdf), especialmente en los cuadros que figuran en el anexo a ese documento.

totales desglosados por cada uno de los factores, podemos tanto calcular las respectivas productividades utilizando valores monetarios,

$$\Pi^A = \frac{\sum_i \left( \frac{IE^A}{IP^{A,B}} \right)_i}{\sum_j \left( \frac{CE^A}{IP^{A,B}} \right)_j}; \quad \Pi^B = \frac{\sum_i (IE^B)_i}{\sum_j (CE^B)_j};$$

[3a],

[3b]

Donde  $IP^{A,B} = P^A/P^B$ ; y  $IK^{A,B} = K^A/K^B$ ; es decir son índices de diferencia de precios: de A respecto a B.

como calcular directamente el equivalente a las tasas de variación anteriores: :

$$t = \ln \sum_i \left( \frac{IE^A}{IP^{A,B}} \right)_i \cdot v_i^B - \ln \sum_j \left( \frac{CE^B}{IK^{A,B}} \right)_j \cdot a_j^B; \text{ para cada año 'x' } [4c]$$

$$\tau^x = \sum_i v_i^* \cdot \ln \left( \frac{IE^A}{IP^{A,B}} \right)_i \cdot v_i^B - \sum_j a_j^* \cdot \ln \left( \frac{CE^B}{IK^{A,B}} \right)_j; \text{ (ídem) } [4d]$$

Otra cosa es que el/a investigador/a no pueda obtener los datos sobre precios unitarios o sobre el necesario desglose de los Ingresos y Costes totales que requiere [4a, ó b]. Y que tenga que recurrir por tanto a cálculos por aproximación. En tal caso es perfectamente trasladable aquí todo lo dicho anteriormente sobre –respecto al análisis temporal- en cuanto a vías, tipos de aproximación, errores acumulativos, etc. Así, respecto a los precios, y al como en el análisis temporal, la vía de cálculo a partir de valores monetarios presenta una ventaja: es más fácil –o/y sujeto a un menor nivel de error- estimar un índice de diferencia tipo  $IP^{A,B}$  que efectuar estimaciones sobre precios unitarios, en valor.

### 4.3 Comparación A-B, no limitada a un solo año

El diferencial de productividad entre dos empresas calculado para un año determinado puede no ser significativo sino coyuntural, por lo que lo habitual y aconsejable es efectuar la comparación para varios años.

Si la opción escogida es calcular los sucesivos índices de productividad de la empresa A y de la B - $\Pi_x^A$  y  $\Pi_x^B$  para los años escogidos (x=1, 2, 3,...)-, para luego determinar las sucesivas tasas de diferencia, los precios de referencia pueden ser (los de B) de cada año, o bien los del primer año, para todos los años a comparar:  $P_i^{B,0}$ ,  $K_j^{B,0}$ . Los resultados numéricos serán los mismos, pero esto último puede resultar más práctico cuando el cálculo de los IPG se hace a partir de valores monetarios y, por tanto, utilizando índices de variación de precios, no precios propiamente dichos.

Y si la opción es –como es habitual en la literatura sobre el tema- calcular directamente las tasas de diferencia de productividad A→B de cada año, ello implica simplemente aplicar [4a, ó b], para cada uno de los años.

	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Diferencial de eficiencia, Empresa A → respecto a Empresa B	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$

En cualquier caso, pues, la información necesaria es la que indica tal expresión –datos sobre los respectivos precios de ambas empresas y sobre los respectivos valores de  $IE_i$  y de  $CE_j$  para cada uno de los años del intervalo temporal que se haya tomado.

#### 4.4 Comparación entre varias empresas, a lo largo de varios años

Pasemos finalmente al caso general: Evaluar la eficiencia comparativa no solo de dos empresas, sino de un conjunto de ellas; por ejemplo, todas las de un determinado sector económico. También en este caso necesitaremos tomar una de ellas como referencia, para determinar así la productividad relativa de cada una de las restantes respecto de ésta. Llamemos a ésta empresa, tomada arbitrariamente<sup>35</sup> como referencia, ‘empresa B’. Y a las demás, ‘empresas A’; o, si se prefiere, A1, A2, A3, ... . Es fácil entonces generalizar lo que hemos visto para dos empresas: Se tratará simplemente de calcular la tasa de diferencia, 4c ó 4d, para cada una de las ‘empresas A’. El resultado conjunto será entonces del siguiente tipo (si el cálculo de los diferenciales de productividad se efectúa, por ejemplo, para tres diferentes momentos):

Diferenciales de productividad para el Sector ‘S’

valores de $\tau_x$ empresa A.. respecto a la B	empresas ‘A’												Empresa		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			B	
x = año 2002	..	...	-0,06			-0,12									0
x = año 2006	...	...	-0,10			-0,05									0
x = año 2010	...	...	-0,12			0,02									0

Así, en este ejemplo, los resultados muestran que la empresa A6 en el año 2002 tenía un nivel de productividad un 12% inferior al de la empresa B, tomada como referencia. En el año 2006 había reducido el diferencial negativo: su productividad era un 5 % inferior a la de B. Y en el año 2010 presentaba, por el contrario, una productividad un 2 % superior a la de B.

Esta determinación múltiple, comparando para distintos periodos la productividad global de varias empresas tomando una como base (la B), nos permite además conocer fácilmente el diferencial de productividad entre un par cualquiera de esas empresas. En efecto, la diferencia entre el valor de la tabla correspondiente a la empresa A3 y el correspondiente a la A6 –para un mismo año- nos indica el diferencial de eficiencia entre ambas. Así, en el ejemplo numérico, para el año 2002 la diferencia en la tabla,  $(-0,06)-(-0,12)=+0,06$ , nos indica que en tal año la productividad de la empresa A3 fue un 6% mayor que la de A6<sup>36</sup>; y si lo repetimos para 2010,  $(-0,12)-(+0,02)=-0,14$ , nos dice que, por el contrario, ocho años después la productividad de A3 fue un 14% menor que la de la empresa A6.

Dado que la generalización a la comparación de la productividad entre varias empresas es tan simple, volvamos en lo que sigue, por comodidad, a la simplificación de que son dos solo las empresas a comparar: la ‘A’ y la ‘B’.

<sup>35</sup> De hecho es indiferente cual empresa se tome como referencia, dado que lo que se va a calcular son diferencias relativas de productividad entre ellas.

<sup>36</sup>  $t^{A3,B} - t^{A6,B} \equiv \ln(\Pi^{A3}/\Pi^B) - \ln(\Pi^{A6}/\Pi^B) \equiv \ln\Pi^{A3} - \ln\Pi^B - (\ln\Pi^{A6} - \ln\Pi^B) \equiv \ln(\Pi^{A3}/\Pi^{A6})$ ; para el par A3-A6, y así para cualquier par.



#### 4.5 Análisis bidimensional (*cross section & cross time*)

Para distinguir explícitamente las tasas de diferencia anteriores, comparando empresas, *cross section*, [4c,d], con las del apartado anterior comparando la productividad de una empresa a lo largo del tiempo, *cross time*, [4a] y [4b], a las *cross section* las denotaremos como  $t_x^{A,B}$  (ó bien  $\tau_x^{A,B}$ ): tasa de diferencia de la productividad de A respecto a la de B, para el año 'x' (o, más brevemente, 'diferencial de productividad A→B'). Y, paralelamente, denotaremos la tasas de variación temporal (*cross time*) para la empresa A como  $t_x^A$ ; para la empresa B,  $t_x^B$ , etc.

Desde esta perspectiva, es significativo destacar que existe una relación entre ambos tipos de tasas,  $(t_x^A, t_x^B)$  y  $(t_x^{A,B})$ , la cual resulta útil para cálculos de productividad comparativa para varios años: Análisis bidimensional, *cross time* → / *cross section* ↓. Veamos tal relación: Supongamos que el periodo tomado para la comparación comprende cuatro años. Esto nos da la posibilidad de calcular las siguientes tasas:

		Año 0	Año 1	Año 2	Año 3
Empresa A	→		$t_1^A$	$t_2^A$	$t_3^A$
Empresa B	→		$t_1^B$	$t_2^B$	$t_3^B$
Comparación A respecto B	↓↓	$t_0^{A,B}$	$t_1^{A,B}$	$t_2^{A,B}$	$t_3^{A,B}$

Y puede demostrarse<sup>37</sup> que entre estas tasas existe la siguiente relación bilateral:

$$t_1^A - t_1^B \equiv t_1^{A,B} - t_0^{A,B} ; \text{ y así para los demás años} \quad [10]$$

Es decir, que la diferencia entre las respectivas tasas de variación anual de ambas empresas en un determinado año tiene un significado concreto: es igual a la variación que ha experimentado ese año el diferencial de productividad entre ambas empresas. Y, además, [10] permite, a partir simplemente del diferencial de un año ( $t_0^{A,B}$ , por ejemplo) y de las dos series temporales de la variación anual de la productividad de cada empresa,  $t_x^A, t_x^B$ , calcular los diferenciales para el resto de los años del periodo en estudio:

$$t_1^{A,B} = t_0^{A,B} + (t_1^A - t_1^B) ; \text{ y así para los demás años}$$

A título de ejemplo, si hemos calculado los valores que aparecen en la tabla siguiente:

	Año →	00	01	02	03
Empresa 'A':	$t_x^A$		+4 %	+2 %	+1 %
Empresa 'B':	$t_x^B$		+6 %	+5 %	+6 %
Comparación 'A' respecto a 'B':	$t_x^{A,B}$	+12 %			

Podemos entonces determinar fácilmente que el diferencial de eficiencia entre ambas empresas pasó del 12 % en el año 00 al 10 % en el 01, al +7 % en el 02, y al +2 % en el año 03. Lo que nos indicaría que unos incrementos de productividad relativamente elevados de la empresa 'B' durante los años 01 al 03 han hecho que el diferencial de productividad a favor de la 'A' se reduzca de 12 % a un simple 2 %.

<sup>37</sup>  $t_1^A - t_1^B \equiv \ln\left(\frac{\Pi_x^A}{\Pi_{x-1}^A}\right) - \ln\left(\frac{\Pi_x^B}{\Pi_{x-1}^B}\right) \equiv \ln\left(\frac{\Pi_x^A}{\Pi_x^B}\right) - \ln\left(\frac{\Pi_{x-1}^A}{\Pi_{x-1}^B}\right) \equiv \ln\left(\frac{\left(\frac{\Pi^A}{\Pi^B}\right)_x}{\left(\frac{\Pi^A}{\Pi^B}\right)_{x-1}}\right) = t_x^{A,B} - t_{x-1}^{A,B}$

#### 4.6 Componentes del diferencial de productividad entre A y B

El diferencial de productividad entre empresas –se supone, recordemos, que del mismo sector, para que la comparación nos hable realmente de productividad- tiene (en paralelo a lo que hemos visto antes en el análisis longitudinal-temporal) dos posibles componentes: El efecto de la diferente composición del output total entre ambas empresas, y la diferencia en eficiencia productiva propiamente dicha. Y a su vez ésta tiene en principio dos componentes que merece la pena diferenciar: la eficiencia de escala, y la eficiencia técnica –o eficiencia de gestión.

O sea que en términos prácticos podemos hablar de tres componentes. Así, por ejemplo, si el diferencial de productividad de A con respecto a B para un determinado año ha resultado ser de +0,12 –es decir, que la productividad global de A era un 12 % superior a la de B- este porcentaje será en principio la suma algebraica de, 1) una parte, correspondiente al hecho de que la estructura de la venta (*‘mix comercial’*) no es la misma en A que en B; 2) otra parte debido a que son empresas de dimensión diferente (*eficiencia de escala*); y una tercera por operar con una diferente *eficiencia de gestión* –o eficiencia técnica.

El diferente mix comercial quedará reflejado al comparar los correspondientes coeficientes  $v_i^A$  y  $v_i^B$ , ya que representan precisamente la estructura de la venta de una i otra. Es posible por tanto aislar la parte de la diferencia en productividad global atribuibles al mix comercial; por ejemplo, recalculando la tasa de diferencial de productividad [4c, ó d] substituyendo los coeficientes de una de las empresas por la de la otra.

La diferente escala entre ambas empresas puede medirse con el cociente entre los respectivos IE calculados a los mismos precios; es decir:

$$\sum_i \left( \frac{IE^A / IP^{A,B}}{IE^B} \right)_i$$

(¿Porqué no con los CE? efectivamente, sería igualmente aceptable; de ahí haber usado el verbo *‘puede medirse con’*). De forma paralela al anterior componente, puede determinarse pues una razonable aproximación a la parte del diferencial de productividad entre A y B que viene explicado por el diferente tamaño o escala de actividades de ambas empresas.

Por supuesto, tanto el diferente mix comercial como el diferente tamaño de ambas empresas pueden jugar de forma positiva o negativa respecto a la productividad global de la empresa A, respecto a la de B.

Y en cuanto al tercer componente, la parte del diferencial de productividad de A respecto a B que viene explicada porque su *eficiencia de gestión* es diferente –que en general es el indicador al que se le da mas relevancia: es el que suele motivar embarcarse en estudios comparativos de productividad- puede determinarse simplemente de forma residual: la parte del diferencial de productividad que no viene explicada ni por diferencias en el mix comercial ni por diferente volumen de actividad.

A su vez, algunos autores proponen desglosar este tercer componente de *‘diferencial en eficiencia técnica/eficiencia de gestión’* en dos sub-componentes o factores explicativos: *progreso técnico* (la eficiencia técnica de una empresa puede ser mayor que la de otra por –ceteris paribus- haber adoptado una nueva tecnología más eficaz) y *gestión propiamente dicha* de la empresa (la organización del proceso productivo, del uso de los factores – especialmente del personal-, la gestión del día-a-día, .. etc., puede ser más o menos eficaz o

exitosa). Se trata más bien de una propuesta de posibilidad teórica, que difícilmente puede llevarse a la práctica. Entrar en estos desgloses requiere, como es fácil imaginar, obtener datos e informaciones adicionales, de más detalle, sobre las empresas analizadas. Piénsese por ejemplo en los datos que habría que recabar de una empresa y otra sobre las tecnologías específicas que utilizan, con qué calendario las implementaron, y luego, cómo toda esa información se hace operativa para integrarla en un cálculo numérico,... etc. para finalmente llegar a delimitar qué parte del diferencial de productividad correspondiente a eficiencia técnica o de gestión viene explicado por el diferente grado y/o ritmo de aplicación del progreso técnico en ambas empresas. No se trata solamente del complejo trabajo que todo eso implicaría, que también; se trata –además y sobre todo- de que para cualquier empresa todo ese tipo de datos constituye información confidencial.

(Por supuesto, nada impide que un/a investigador/a, a pesar de todo, decida abordar este análisis vía algún tipo de variables proxy para el nivel de progreso técnico. Pero es difícil que el nivel de error que esto conlleva con conceptos que son de entrada cualitativos, como ‘progreso técnico’ no invalide claramente los resultados obtenidos).

#### 4.7 Cálculos por aproximación, en la comparación de productividad entre empresas

En el cálculo de la diferencia relativa de productividad [4c,d] podemos substituir los cocientes  $q^A/q^B$  (que representan unidades físicas) por los respectivos valores monetarios de los ingresos de la línea de productos ‘i’ de la empresa A, pero *re-calculados estos al mismo precio de venta que el de la empresa de referencia, B*. Lo que requiere determinar el diferencial de precio entre ambas empresas para dicho producto ‘i’,  $(IP^{A,B})_i$ , para cada periodo de cálculo<sup>38</sup>. Y un procedimiento paralelo es aplicable a los factores: los cocientes  $F^A_j/F^B_j$  pueden ser substituidos por sus respectivos Costes anuales, recalculados a los mismos precios de coste de la empresa de referencia:  $CE^A_j / IK^{A,B}_j$ . Hasta aquí no se trata de una aproximación al cálculo de los diferenciales relativos de productividad,  $t_x^{A,B}$  ó  $\tau_x^{A,B}$ ; la equivalencia es exacta.

Sin embargo, raramente los autores de estudios de productividad comparativa disponen de la información a ese nivel para calcular las tasas de diferencia de productividad [4c,d]. Lo que lleva a utilizar variables *proxy* y estimaciones. Así, en muchos estudios, al no haber dispuesto los investigadores de información sobre las cantidades de productos y ni siquiera sobre su respectiva importancia relativa en el total de ingresos, el primer término de  $\tau_x^{A,B}$  es aproximado por  $\ln(Q^A/Q^B)$ , siendo Q una cierta variable *proxy* del ‘output global’. A veces tal *proxy* es el volumen físico de uno de los principales productos, otras veces es un cierto agregado físico de unidades de los diferentes productos (suma de Tn. , por ejemplo), y en otras se toma la respectiva cifra de ventas de cada empresa en-términos-reales, lo que en este caso significa: calculadas ambas con los mismos precios de venta; para lo que es necesario conocer –o bien estimar- el diferencial promedio de precios de venta entre A y B (para cada año en que se vaya a efectuar la comparación).

UNA CONFUSIÓN FRECUENTE (I: En la aproximación al diferencial de output)

La opción observada en algunos trabajos de tomar valores monetarios de ingresos ‘a-precios-constantés’ deflactando para ello las cifras de venta de ambas empresas con un mismo índice de precios externo, más que una mala aproximación es de hecho una operación contradictoria; además de una

$$^{38} \left( \frac{q^A}{q^B} \right)_i \equiv \left( \frac{q^A \cdot P^B}{q^B \cdot P^A} \right)_i \equiv \left( \frac{q^A \cdot P^A \cdot \left( \frac{P^B}{P^A} \right)}{q^B \cdot P^B} \right)_i \equiv \left( \frac{\cdot IE^A / IP^{A,B}}{IE^B} \right)_i ; \quad [11]$$

operación que se auto-cancela pues equivale a multiplicar las respectivas cifras de venta de A y de B por un mismo parámetro, por lo que el valor resultante para el término  $\ln(Q^A/Q^B)$  es simplemente igual a  $\ln(I^A/I^B)$ . Lo que no es, desde luego, una buena aproximación para el primer término de [4d], pues significa simplemente la tasa de diferencia entre las ventas de la empresa A respecto a las de la B.

El recurso a variables *proxy* y a estimaciones descrito para los productos es también lo habitual para el segundo término de [4d], la tasa de diferencia media en el consumo de factores. Con la diferencia de que el procedimiento suele ser aplicado no al total de Costes sino a cada uno de los tres o cuatro bloques de costes que usualmente ofrecen las cuentas de resultados publicadas u obtenidas de bases de datos: ‘Personal’, ‘Aprovisionamientos’, ‘Servicios de otras empresas’, ‘Amortizaciones’, y ‘Resto’ (sic). Al ser esa la única información (no se dispone de datos sobre unidades de cada tipo de trabajo contratado por cada empresa, de cada factor material comprado, de cada servicio requerido, ..etc.; solo de los agregados monetarios referidos) se recurre a estimaciones y variables *proxy*. Así, para Personal, la aproximación suele consistir en tomar como unidades físicas el número total de empleados,  $E$ , (lo que presupone estimar que todos los trabajadores de una empresa son del mismo tipo; o que el mix de empleados es el mismo para ambas empresas); o bien en tomar simplemente los costes de personal en-términos-reales; lo que –de nuevo- en este caso significa: calculados los de A con los mismos ‘precios’ de coste (salarios más cotizaciones sociales) que B; para lo que es necesario conocer –o bien estimar- el diferencial promedio de precio de coste-por-empleado entre A y B (para cada año en que se vaya a efectuar la comparación). Para el bloque de factores al que se refieren los Costes de Aprovisionamiento, la falta de datos es aún más problemática (ni siquiera suele haber la posibilidad de una *proxy* en unidades físicas como en el caso de Personal). Lo mismo puede decirse respecto a los factores que dan lugar al bloque de costes ‘Servicios de otras empresas’, donde puede haber desde servicios de transporte hasta subcontratación (áreas de producción externalizadas). En cuanto a los factores que dan lugar a los Costes de Amortización (factor Capital, suele ser la expresión correspondiente por parte de los investigadores) en muchos casos se utiliza como variable *proxy* la inversión en Activos Fijos; o bien se recurre a la vía: valor monetario (costes de amortización) e índice de diferencia de precios. Y para los factores que están detrás de ‘Resto de costes’ (muchas veces más importantes que cualquiera de los anteriores) la falta de referencias para hacer estimaciones es aún mayor.

UNA CONFUSION FRECUENTE (y II: al calcular el diferencial en cuanto a volumen de factores)

También para los *inputs* se observa en bastantes trabajos que el procedimiento de cálculo seguido por los autores ha consistido en tomar como *proxi* de unidades de factor para cada bloque de costes los respectivos Costes anuales ‘a-precios-de-coste-constantés’. Pero que tal cálculo ha consistido simplemente en deflactar las cifras de Costes de Personal, Costes de Aprovisionamientos, ... etc. *con los mismos índices de precios externos para ambas empresas*. Así, por ejemplo, en el caso de Personal, un índice salarial del sector; en el caso de Aprovisionamientos, un índice de precios industriales ídem; .. etc.. De nuevo, se trata de una operación contradictoria con el significado de lo que se pretende calcular. Y además inútil, porque se auto-cancela: equivale a multiplicar las respectivas cifras de A y de B –por ejemplo, las de Costes de Personal- por un mismo parámetro, por lo que el valor obtenido para el supuesto término  $\ln(\text{Trabajo}^A/\text{Trabajo}^B)$  es simplemente igual a  $\ln(\text{Costes de Personal}^A/\text{Costes de Personal}^B)$ . Lo que no es, desde luego, una buena aproximación para la parte referida al bloque de factores ‘Trabajo’ del segundo término de [4d]. La cifra resultante significa simplemente en que proporción los costes de personal de A son mayores (o menores) que los de B.

Si el procedimiento seguido para los otros bloques de factores ha sido similar, el valor obtenido para el conjunto del segundo término de [4c,d] es simplemente igual a  $\ln(\text{Costes Totales}^A/\text{Costes Totales}^B)$ : proporción en que los costes totales de A son superiores (o inferiores) a los de B.

Y si también para los *outputs* los investigadores aplicaron el procedimiento de deflactar (vease I), entonces el valor que obtenido para la tasa de diferencia  $\tau_x^{A,B}$  no se refiere realmente al diferencial de

productividad entre A y B sino simplemente al diferencial de la ratio Ingresos totales/ Costes Totales. Una ratio que, desde luego, puede utilizarse también como un indicador de eficiencia. Concretamente nos dice lo mismo –en otros términos- que el indicador tasa de margen, pues las variables implicadas en ambos casos son las mismas. Y es realmente fácil de calcular. Pero carece de sentido calcularlo mediante un innecesario rodeo a través de un complejo procedimiento, y además pretender que lo que se está midiendo es el diferencial de productividad entre las dos (o más) empresas.

Conviene pues destacar que la principal dificultad práctica en la comparación de productividades entre empresas reside en que al tratar de estimar los correspondientes índices de diferencia de precios  $IP^{A,B}_i$  y  $IK^{A,B}_j$  no cabe el recurso a índices de precios externos de tipo sectorial o nacional, puesto que no se trata de estimar un diferencial de precios en el tiempo para una empresa, sino un diferencial de precios entre esas empresas. Lo que en el análisis longitudinal-temporal es una mala aproximación (por el nivel de error previsible) en el análisis comparativo entre empresas es algo sencillamente inválido. Si no es posible información razonablemente aproximada del diferencial de precios entre las empresas a comparar, sencillamente no es posible calcular su diferencial de productividad global.

En el caso de la comparación entre varias empresas, la dificultad de obtener información sobre los diferenciales de precios entre ellas puede reducirse al mínimo a base de aplicar el análisis bidimensional que hemos visto antes. Es decir, empezar por un análisis longitudinal para cada empresa y varios años, determinando así sus respectivas tasas de variación anual de la productividad ( $t^A_x, t^A_2, \dots, t^B_x$ ). Esto como sabemos no nos permite concluir si la empresa A1 presenta en un año determinado una productividad (eficiencia) mayor o menor que la A2, la A3, .... o la B, si no solo si ese año la productividad de cada una de ellas ha crecido más o menos que la de la B. Ahora bien –continuando con el análisis bidimensional- si tenemos la posibilidad de calcular el diferencial de productividad de una de las empresas, A1, por ejemplo respecto de otra, la B por ejemplo, para uno de los años del periodo estudiado  $t^{A,B}_x$  (por tener los datos suficientes para ese año y para ese par de empresas), entonces podemos aplicar para el resto de los años el análisis bidimensional expuesto antes y calcular sin más información los respectivos diferenciales de productividad entre cada par de las empresas estudiadas.

Finalmente, pero no menos importante, subrayar de nuevo el problema inherente a recurrir (por no disponer de una alternativa mejor) a cálculos por aproximación basados en el uso de variables *proxy* más o menos ‘buenas’ y en estimaciones mas o menos ‘razonables’: que cada decisión de ese tipo implica introducir un cierto grado de error, que desconocemos; que esos niveles de error por estimaciones y proxies son acumulativos; y que el nivel de error total en los resultados cuantitativos no lo podemos acotar: no es posible disponer del equivalente a un test estadístico tipo *t-Student*, por ejemplo.

(A resaltar la paradoja de que raramente la literatura sobre el tema menciona esta cuestión. En general se opta simplemente por ignorar el propio problema de que los valores obtenidos después de efectuar estimaciones y tomar variables proxy tienen en su base cuantitativa un determinado nivel de error, y que éste puede ser importante hasta el punto de invalidar dichos resultados; en el mismo sentido que cuando descartamos como válido un coeficiente de una regresión porque su correspondiente p-value es de, por ejemplo, 15%).

5

## DE LOS INDICADORES DE PRODUCTIVIDAD PARCIAL (del Trabajo, .. etc.) A LOS DE LA PRODUCTIVIDAD DE UN PAIS

### 5.1 Indicadores de Productividad Parcial de un determinado factor

Un indicador de productividad parcial, IPP, es el que se calcula tomando todo el producto (output) y uno solo de los factores (input). En la mayor parte de los casos, el factor trabajo. He aquí algunos ejemplos frecuentes:

$$\frac{\text{Pasajeros - km.}}{\text{N}^\circ \text{ de Trabajadores}} ; \quad \frac{\text{KWH producidos}}{\text{Horas de Mano de Obra Directa}} ; \quad \frac{\text{Ingresos(Ventas)}}{\text{N}^\circ \text{ de Trabajadores}} ; \quad \frac{\text{Valor añadido}}{\text{N}^\circ \text{ de Trabajadores}}$$

Y, cambiando de factor:

$$\frac{\text{KWH producidos}}{\text{Toneladas de Petróleo (combustible)}} ; \quad \frac{\text{Pasajeros - km.}}{\text{n}^\circ \text{ de aeronave - asientos ofrecidos}}$$

En definitiva, la expresión genérica para el IPP de cualquier factor, es, en el caso de una empresa uni-producto:

$$IPP(j) = \frac{q}{F_j} ;$$

$$\text{y en general: } IPP(j), \Pi_j^x = \left[ \frac{\text{Producto total}^*}{\text{Unidades del factor 'j'}_{\text{año } x}} \right] ; \quad [12]$$

(\*) expresado mediante una variable que es una determinada función agregativa de todas las cantidades de producto. La más coherente con los apartados anteriores sería, por supuesto, el mismo numerador que el del IPG:  $\sum_i q_i^x \cdot P_i^0$ .

donde  $x$  denota el año (o periodo para el que se calcula el índice), y  $j$  uno cualquiera de los factores. Como puede verse por los ejemplos, para un mismo factor (como Trabajo) pueden usarse diferentes definiciones para el correspondiente IPP, dependiendo de: 1) cómo se exprese el producto total, y 2) qué se tome como unidades del factor<sup>39</sup>. En cada caso la opción de los investigadores suele venir condicionada por los datos de que se dispone; especialmente en lo que atañe a las unidades del factor.

*Limitaciones: Reflejan productividad aparente:*

El atractivo principal de utilizar un determinado IPP reside en su facilidad de cálculo, pues los datos necesarios para ello suelen estar accesibles para un investigador externo por lo que no es necesario hacer estimaciones, supuestos, ni re-expresar valores monetarios a precios constantes, etc. Pero la contrapartida de su sencillez es que cualquier IPP está sujeto a serias limitaciones a la hora de derivar conclusiones sobre eficiencia, debido precisamente a que su cálculo implica atribuir todo el producto de la empresa alternativamente a uno solo de los factores.

<sup>39</sup> A título de ejemplos a añadir a los primeros:  $\frac{\sum_i q_i^x \cdot P_i^0}{\text{n}^\circ \text{ horas - persona}} ; \quad \frac{\sum_i q_i^x \cdot P_i^0}{(F^x \cdot K^0)_{\text{trabajo}}}$

Consideremos esto respecto al más utilizado de los IPP: el índice de productividad parcial del trabajo (IPPT). En primer lugar, por ser precisamente ‘parcial’ nada garantiza que si aumenta ello signifique que la productividad global de la empresa haya mejorado. Eso dependerá de qué haya ocurrido en cuanto al consumo de los demás factores, pues es la productividad global (‘Total Factor Productivity’) lo relevante en una evaluación de la eficiencia comparativa de la empresa. Y, en segundo lugar, la tendencia en el mundo empresarial a sustituir factor trabajo por factor ‘equipos’ (o, mas exactamente, por equipos-más-energía: mecanización/ automatización de los procesos), o por factor ‘subcontratación externa’ desvirtúan el propio significado que usualmente se le quiere otorgar al IPPT. Por ejemplo, cuando una empresa lleva a cabo una fuerte inversión modernizadora en maquinaria e instalaciones que le permite producir bastante más con el mismo personal (o producir lo mismo con bastante menos personal), este simple hecho hará que el indicador de productividad del trabajo presente un incremento, aunque el personal siga trabajando con la misma dedicación y eficacia que antes. Y, al contrario, probablemente el indicador de productividad parcial del capital (maquinaria e instalaciones) presentará paradójicamente una disminución. O sea, que la información cuantitativa favorable o desfavorable que indica la evolución del IPPT es solo aparente. Y el mismo problema afecta a cualquier otro IPP. De ahí la necesidad de hablar más bien de productividad *aparente*: del factor trabajo, IPAT, del factor capital, etc.

Resumiendo: La variación en la productividad parcial *aparente* de un factor [12] solo es también *real* en el caso de que las cantidades del resto de los factores no hayan cambiado de un periodo al otro. Una situación ciertamente improbable.

La limitación comentada queda de manifiesto en el sencillo ejemplo numérico ilustrativo que sigue:

#### Inversión en nuevos equipos, acompañada de reducción de personal.

En el periodo anterior (x-1) los costes fueron los siguientes:

* Personal directo , 320 personas x 200 =	64.000 €
* Costes de Equipo (amortizaciones) =	18.000 “
* Materiales, 19.000 uu x 4 € =	<u>76.000 “</u>
	158.000 “

Mientras que las ventas fueron de 2.000 unidades, a un precio medio de 102,5. O sea, 205.000 €. A principios del periodo siguiente, con el fin de reducir costes de producción, se llevó a cabo un proyecto de modernización de la producción adquiriendo equipos automatizados que permitieron reducir la plantilla de personal en 20 personas, al mismo tiempo que incrementar la producción en un 20 %. Como resultado, las ventas han sido de 2.400 unidades a un precio medio de 104,96 €, (251.904 € en total) y los costes de este año (periodo x) han sido los siguientes:

* Personal directo , 300 x 210 =	63.000 €
* Costes de Equipo , 18.000 + 11.000 =	29.000 “
* Materiales, 22.400 uu x 4,25 €	<u>95.200 “</u>
	187.200 “

lo que equivale a haber reducido el coste medio de 79 € a 78 €

El incremento de 11.000 en los costes de amortización corresponde, lógicamente, a la depreciación de los nuevos equipos. Se estima que si la inversión se hubiese efectuado (con los precios de adquisición de) el año anterior, este incremento hubiese sido de 10.000 en lugar de 11.000. De acuerdo con todo lo anterior, las ventas y costes a precios constantes han sido:

q.P° = 2.400 x 102,5 =	246.000 €
F.K° <sub>(personal)</sub> = 300 x 200	= 60.000
F.K° <sub>(equipos)</sub> = 18000+10000	= 28.000
F.K° <sub>(materiales)</sub> = 22.400 x 4 €	= 89.600

Por lo que resultaran unos indicadores de productividad aparente contradictorios: aumento para Personal y disminución para Equipos, cuando de hecho la hipótesis de que la productividad ‘real’ del trabajo no haya variado no la podemos descartar:



	IPAT (trabajo)	IPAE <sub>quijos</sub>	IPG
Año base (x-1): $\Pi^0$	$\frac{2.000}{320} = 6,25$	$\frac{2.000}{18.000} = 0,11^{\wedge}$	$\frac{205.000}{158.000} = 1,2975$
Año en estudio (x): $\Pi$	$\frac{2.400}{300} = 8$	$\frac{2.400}{28.000} = 0,0857$	$\frac{246.000}{177.600} = 1,385$
* Índices de cambio, $\pi \Rightarrow$	$8 / 6,25 = 1,28$	$0,0857 / 0,111 = 0,77$	$1,385 / 1,2975 = 1,0675$
* Tasas de variación $t' \Rightarrow$	+ 28 %	- 23 %	+ 6,75 %
* Tasa de var. Cont (t) $\Rightarrow$	+ 24,69 %	- 26 %	+ 6,53 %

La facilidad de cálculo de los indicadores de productividad parcial los hace, sin embargo, instrumentos atractivos. Y esto sugiere la conveniencia de tratar de superar el serio inconveniente que presentan de discrepancia entre apariencia y realidad.

Una opción respecto precisamente a la productividad parcial del Trabajo es aplicar la siguiente definición: Productividad parcial Neta del Trabajo:

$$PPNT^{\text{año } x} = \frac{IE^x - (CE^x - CE_{\text{trabajo}}^x)}{CE_{\text{Trabajo}}^x} \quad [13]$$

donde el numerador se corresponde con una cierta versión del Valor Añadido. Aplicado al ejemplo anterior resultaría:  $PPNT_{(\text{año } x-1)} = (205.000-94.000)/64000 = 1,734$ ;  $PPNT_{(\text{año } x)} = (251.904-124.200)/63.000 = 2,027$ ; es decir, un incremento, en este caso algo más moderado, del 16,95%. Aunque también en esta opción una variación positiva de PPNT no necesariamente significa que la productividad real del trabajo en esa empresa haya aumentado (o que lo haya hecho en esa proporción), debido a que el indicador atribuye implícitamente todo el incremento del excedente,  $[IE - (CE - CE_{\text{trabajo}})]$ , al factor trabajo.

## 5.2 Relación entre los indicadores de Productividad Parcial y el de Productividad total (IPG, TFP)

Otra opción para superar el inconveniente de los IPP, desde una perspectiva ahora general, es plantearse: ¿puede establecerse una relación entre la productividad global de una empresa ( $\Pi$ ) para un periodo determinado y los diferentes índices de productividad parcial aparente ( $\Pi_j$ )? Existe efectivamente una relación, aunque no entre esos indicadores propiamente dichos (o no de una forma clara u operativa entre estos) si no entre sus tasas de variación. Concretamente:

La tasa de variación ordinaria de la productividad global [ $t' = (\Pi^x / \Pi^{x-1}) - 1$ ] resulta ser igual a una media ponderada de las tasas de variación ordinarias de las productividades parciales calculadas para cada factor ( $t'_j$ ), siendo los pesos de la ponderación la importancia relativa del factor correspondiente en el coste total del año en estudio, previamente recalculados los costes de cada factor a precios-del-año-base; es decir, nuestros conocidos coeficientes  $(a_j)^{x,0}$ .

$$(t')^x = \sum (t'_j)^x \cdot (a_j)^{x,0}, \quad [14]$$

$$\text{donde } (t')^x = \Pi^x / \Pi^{x-1} - 1; \quad t'_j = \Pi_j^x / \Pi_j^{x-1} - 1; \quad \text{y } (a_j)^{x,0} = (F^x \cdot K^0)_j / \sum (F \cdot K^0)_j$$

(La demostración de esta proposición puede verse en el primer apartado del anexo I. Puede verificarse que en el ejemplo numérico anterior se cumple, efectivamente, esta igualdad).

Esta interesante propiedad resulta, sin embargo, escasamente útil para aplicaciones prácticas debido a que normalmente no es en realidad posible calcular los IPP<sub>j</sub> para otros factores diferentes que el trabajo o el consumo de energía debido a que no solo es difícil obtener si no también definir cuales son las *unidades físicas* para esos otros factores.



Este decisivo inconveniente es especialmente relevante en el caso del factor ‘capital’. En el ejemplo numérico estilizado anterior el problema se ha resuelto con un supuesto: que el incremento en los costes de amortización hubiese sido de 10.000 € en lugar de 11.000 € si los nuevos equipos adquiridos lo hubiesen sido a precios del año anterior, lo que equivale a una estimación de  $(F^x \cdot K^0)_j$  para el factor capital. Pero en un caso no estilizado si no real, la dificultad de hablar de unidades y precios del factor ‘bienes de capital’ o de ‘costes del (uso del) inmovilizado a precios constantes’ resulta evidente<sup>40</sup>. Principalmente porque el precio ( $K^0$ ) no se refiere, por supuesto, a un tipo de interés –como en ciertos trabajos sobre el tema se presupone- si no al precio de adquisición de los equipos que se están utilizando (o, más precisamente, a la repercusión, en términos de costes de amortización, de dichos precios)<sup>41</sup>.

Y para factores (costes) como ‘servicios exteriores’ los problemas que encontramos al tratar de calcular el correspondiente  $IPPA_j$  son de naturaleza similar. Claro que en un determinado estudio podemos ir haciendo supuestos (sobre cantidades y sobre precios, para los costes de capital, los servicios exteriores, el resto de los costes, etc.) y así obtener unos determinados valores para aplicar en [14]; pero tal ejercicio de cálculo no sería si no una manera innecesariamente indirecta y mucho más complicada de reproducir lo que, de una forma más clara, se hace al calcular el IPG por aproximación, en el sentido que hemos visto antes en 3.3 y 3.4.

En resumen, calcular un  $IPPA_j$  tiene sentido (resulta útil) -con las reservas que hemos visto en cuanto a su interpretación- cuando se puede calcular directa y fácilmente porque se dispone de las unidades físicas del factor sin ambigüedad alguna. En caso contrario, no aporta nada (adicional a lo que nos dice el IPG) el llevar a cabo, a pesar de todo, el cálculo de todos los  $IPPA$  a base de encadenar suposiciones (y, por tanto, acumular errores) sobre unidades y sobre precios de los diferentes factores.

### 5.3 Indicadores de productividad en comparaciones entre países.

El antes referido IPPN del Trabajo –una versión del *valor añadido por persona*- es fácilmente generalizable a un Sector de actividad: El numerador pasa a ser la suma de los valores añadidos de las diferentes empresas del sector (algo calculable a partir de las declaraciones del IVA), y el denominador la suma de las personas empleadas.

Y subiendo el siguiente escalón, es calculable para el conjunto de la economía del país. La suma de los valores añadidos de todos los sectores de la economía equivale, aproximadamente, al concepto de las cuentas nacionales *Producto Interior Bruto* (PIB). Y, efectivamente, tomando como referencia las estadísticas respecto a productividad por países que ofrecen tanto la OCDE como la Comisión Europea (Eurostat), el cociente *PIB/nº-de-personas-empleadas*, denominado como *Productividad del trabajo*, es el indicador más utilizado en comparaciones internacionales de productividad.

---

<sup>40</sup> Sobre el grado y el porqué de esta dificultad puede verse el apartado segundo del Anexo I.

<sup>41</sup> Volvamos por un momento al ejemplo estilizado: Si la única máquina utilizada, comprada en el año 0 por 6000€ con una vida útil de 6 años, generó unos costes de amortización de 1000€ en ese año, y en el año 1 se adquiere una segunda máquina idéntica pero, debido a la inflación, a un precio de 7200€, esta segunda generará unos costes de amortización de 1200€. En total, pues, los costes ‘de capital’ durante el año 1 serán 2.200€, pero ‘a precios constantes (del año 0)’ dichos costes serán de 2000€. ¿Cuál sería en este caso las ‘unidades del factor-capital’? ¿El valor nominal (de compra) de la inversión en las máquinas? (6000+7200=13.200), ¿El valor neto de la inversión al final del año 1? (6000-1000-1000+7200-1200=10000)? ¿sencillamente 2 (máquinas)? Ahora trasládese mentalmente este tipo de cuestiones a una situación no estilizada si no real. .... Ver sobre esta cuestión el segundo apartado del Anexo I.

También publica la OCDE un índice que presentan como de productividad global (IPG, TFP, Multi-Factor Productivity) pero que en realidad responde a una definición sumamente esquemática de este: suponiendo que los dos únicos factores de un país son 'trabajo' y 'capital', tomando para el primero el número de personas empleadas y para el segundo una cierta definición, también esquemática, y efectuando una serie de supuestos sobre los respectivos coeficientes medios para cada país (más supuestos respecto a variación de precios). Los valores cuantitativos resultantes son por todo ello de incierta interpretación; y de hecho no es en la práctica un indicador muy utilizado en los análisis de los organismos internacionales.

## RECAPTULACIÓN: RELACIÓN ENTRE LOS INDICADORES DE PRODUCTIVIDAD, COSTE MEDIO Y RENTABILIDAD.

---

Las diferentes variables o indicadores usualmente utilizados para medir la eficiencia empresarial están de hecho relacionados entre sí. Y, al mismo tiempo, cada uno mide facetas distintas de la eficiencia. Veamos esas relaciones en un sentido ‘jerárquico’, de mayor a menor proximidad respecto a la idea estándar de eficiencia implícita en el clásico axioma de la Economía: (ser más eficiente es) “Producir lo mismo, utilizando menos factores (o menos de uno de ellos). O, producir más (o más de uno de los productos) con un determinado consumo de factores”.

### Proposiciones

(1) **Indicador de productividad global** ( $\Pi$ ,  $t$ , ó  $\tau$ ); (análisis *cross time*). En el sentido anterior es el indicador ‘ideal’ para medir la eficiencia empresarial para un determinado periodo. Concretamente, la variación observada de un periodo a otro ( $t$ , ó  $\tau$ ) es la resultante de dos posibles causas: el cambio experimentado por la *eficiencia productiva*, y el cambio en la composición (monetaria) del ‘output’ total, o ‘*mix comercial*’ ( $v_i$ ). Esta segunda componente será relevante en la medida en que los distintos productos de la empresa tengan una relación Ingresos/Costes-específicos significativamente diferente<sup>42</sup>.

A su vez, la variación de la *eficiencia productiva* será la resultante de: un cambio en la *productividad técnica* o (eficiencia de gestión), y el posible efecto del cambio en la *escala de producción* (eficiencia de escala).

(Análisis *cross section*). Por las mismas razones, en la aplicación a la comparación entre empresas, la tasa de diferencia de productividad observada vendrá explicada por el mismo tipo de causas o componentes: Diferente *eficiencia productiva*, y diferente ‘*mix comercial*’. Y, a su vez, el diferencial de productividad atribuible a su diferente *eficiencia productiva* vendrá explicado en parte por diferencia entre la *eficiencia técnica* de cada empresa, y en parte por su diferente tamaño, *escala de producción*, o diferente volumen de actividad.

(2) **El coste medio** (cuando es posible calcularlo de forma no-ambigua: empresa uni-producto) depende -en sentido inverso- de la productividad global,  $\Pi$ , y del precio de coste de los factores.

(Análisis *cross time*): Su cambio de un periodo a otro tendrá, en principio, dos componentes: la repercusión del cambio observado en la productividad, y la repercusión del cambio sufrido por el conjunto de los precios de compra/contratación de los factores. En consecuencia, si es posible aislar este segundo componente, el coste medio es un

---

<sup>42</sup> Ver página 17.

indicador tan bueno como la productividad para evaluar el cambio en la eficiencia de la empresa de un periodo a otro.

(Análisis *cross section*): En el caso de la comparación entre empresas, el coste medio puede ser igualmente fiable para evaluar el diferencial de eficiencia entre ellas solo si resulta aceptable asumir la hipótesis de que las empresas que se comparan están pagando los mismos salarios y precios de los demás factores.

(3) **La tasa de margen ( $m$ )** nos habla (depende) de la *Productividad* y de la *relación de precios* ( [índice promedio de precios de venta/índice promedio de precios de coste] ).

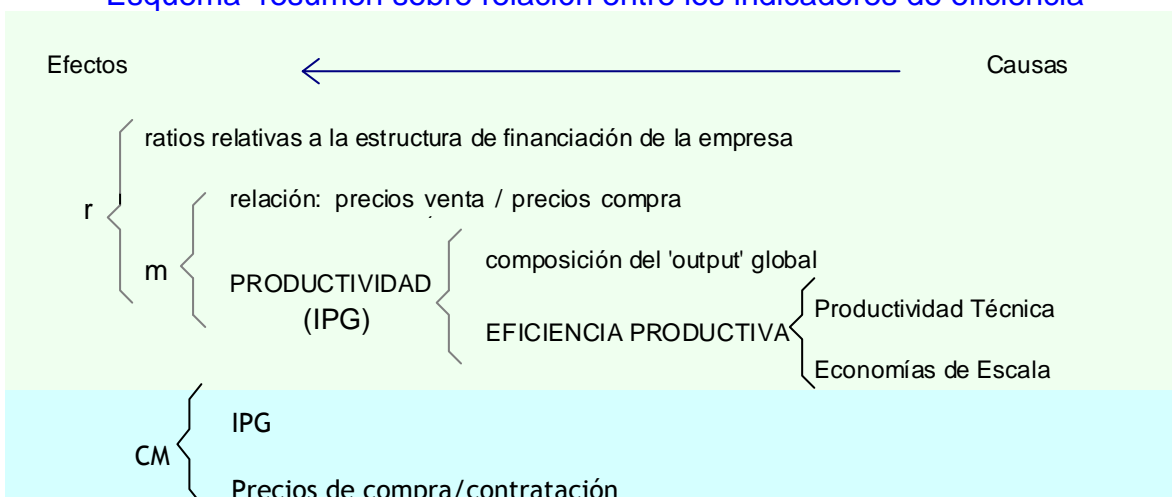
(Análisis *cross time*): Cualquier variación de  $m$  de un periodo a otro vendrá explicada pues por esos dos componentes: Que la productividad ha cambiado (Efecto productividad), y que en promedio los precios de venta han variado en una proporción distinta a los de coste (Efecto precios).

En ese sentido puede decirse que  $m$  es un indicador menos bueno que el de productividad para medir los cambios en la eficiencia empresarial porque incorpora además el efecto de los precios –los cuales dependen de elementos ajenos a la eficiencia: la propia política al respecto decidida por la empresa (aquí el mayor o menor poder de mercado para productos concretos) y condiciones externas, de los respectivos mercados.

(Análisis *cross section*): La diferencia en  $m$  observada entre dos (o más) empresas tendrá en principio los mismos dos componentes; significando en este caso: que su productividad es diferente (Explicación productividad), y que su diferencial en cuanto a precios de venta es mayor (o menor) que su diferencial en cuanto a precios de compra/contratación (explicación precios).

(4) Finalmente, un indicador tipo (tasa de) **rentabilidad** depende de la variable *tasa de margen* y de otras variables que tienen que ver con la estructura de financiación de la empresa (ver pág. 20). Si entendemos –como es habitual- que la estructura de financiación es algo independiente del grado de eficiencia con el que funciona una empresa, concluiremos que un indicador tipo rentabilidad será aun menos bueno que la tasa de margen para evaluar la eficiencia empresarial.

### Esquema resumen sobre relación entre los indicadores de eficiencia



## Corolarios

- \* La *tasa de margen* –en el análisis cross time- será un indicador aceptable para hablar del cambio experimentado en la eficiencia productiva solo si puede admitirse que 1) el ‘mix comercial’ de la empresa no ha variado substancialmente a lo largo del periodo en estudio, y 2) que la variación relativa de los precios de venta que ha aplicado a sus usuarios ha sido prácticamente idéntica a la experimentada por los precios de compra/contratación de los factores que utiliza.
- \* La *tasa de rentabilidad* –en el análisis cross time- será un indicador aceptable para hablar del cambio en la eficiencia de una empresa solo cuando, 1) se den las dos circunstancias anteriores, y 2) sea razonable asumir que su estructura de financiación no ha experimentado cambios substanciales a lo largo del periodo en estudio.
- \* las dos afirmaciones anteriores son trasladables al caso del análisis cross section, substituyendo las expresiones ‘cambio de un periodo a otro’ por “diferencia observada entre empresa A y empresa B”, y ‘la estructura de financiación (o el mix comercial) no ha experimentado cambios’ por “la estructura de financiación (o el mix comercial) no presentan diferencias significativas (entre empresa A y empresa B)”.

¿Y si lo que nos interesa no es la eficiencia propiamente dicha?

- \* Si lo que en realidad queremos medir es la *competitividad* de una empresa, en comparación con otras del mismo sector, el mejor indicador no será el de productividad sino tipo coste medio: Para ser competitiva una empresa necesita tener unos costes unitarios ‘competitivos’ es decir, más bajos si es posible que el de las empresas competidoras y ofreciendo una calidad similar; así podrá competir con ellas en precios. Que ese menor coste medio lo consiga incrementando su productividad u obteniendo reducciones en los precios de compra/contratación de los factores, no es algo relevante desde la perspectiva de la competitividad.
- \* Y si lo que en realidad queremos es medir, como inversores o analistas externos, es la *capacidad de la empresa de recuperar el capital invertido* (recursos totales= recursos propios + exigible financiero), entonces el mejor indicador será la tasa de rentabilidad sobre recursos totales (BE/RT). De la misma manera que si de lo que se trata es de medir el comportamiento económico de la empresa desde la perspectiva de los accionistas, el mejor indicador será la *tasa de rentabilidad neta sobre los recursos propios*, que depende de la anterior y del efecto apalancamiento (así como también de los resultados atípicos y extraordinarios que haya conseguido la empresa).

### *El modelo “Efecto Productividad & Efecto Precios” como herramienta de simulación*

Probablemente la relación entre indicadores más relevante (o potente, de cara a estudios empíricos) sea la subrayada en la proposición anterior (3), y que se ha expuesto antes en el apartado 3.2:

$$[8] \quad m^x = 1 - \frac{1}{\Pi^x} \cdot \frac{IK^x}{IP^x} ; \text{ o, lo que es equivalente, } \left( \frac{IE}{CE} \right)^x = \Pi^x \cdot \frac{IP^x}{IK^x}$$

Este modelo no solo permite efectuar una descomposición factorial que determine las componentes del cambio de un año a otro (o la diferencia entre una empresa y otra) en la tasa de margen (ver ejemplo en pág. 31), sino que puede utilizarse también como instrumento de proyección de resultados (simulación). Veámoslo con el siguiente ejemplo numérico:

Los datos observados para el último periodo, año 'x', para la empresa han sido:

$$m^x = 1 - \frac{1}{\Pi^x} \cdot \frac{IK^x}{IP^x}, \rightarrow \frac{26,1}{100} = 1 - \frac{1}{1,52} \cdot \frac{1,55}{1,38}$$

y se quiere extrapolar cual será la tasa de margen en el periodo siguiente, según diferentes escenarios posibles en cuanto a productividad y en cuanto a variaciones de precios:

$$\frac{?m}{100} = 1 - \frac{1}{1,52 \cdot (1+a)} \cdot \frac{1,55 \cdot (1+b)}{1,38 \cdot (1+c)},$$

donde  $a$  es la tasa de incremento esperada para la productividad;  $b$  es el promedio de las tasas de incremento esperadas para los salarios y demás precios de adquisición de los factores, y  $c$  es el promedio de las tasas de incremento previstas para los precios de facturación de la empresa (los tres valores, en tantos por uno).

De los trabajos de elaboración del plan de la empresa para el periodo siguiente se han deducido varios escenarios posibles, como los más probables. Cada escenario definido por una cierta previsión para cada uno de los tres parámetros anteriores. Concretamente estos escenarios son los descritos en las cuatro primeras columnas de la tabla siguiente. Entonces la aplicación del modelo nos indica que la tasa de margen esperada en cada caso sería la que figura en la última columna:

Escenarios	Variables (x 100)			proyección
	a	b	c	m (x 100)
I	+3%	+2%	+2%	28,3 %
II	+3%	+2%	0	26,8 %
III	+2%	+2%	0	26,1 %
IV	+4%	+4%	+2%	27,5 %
V	0	+3%	+3%	26,1 %
VI	-2 %	+3%	1%	24,1 %
:				

Como puede verse, el escenario I contemplaría un aumento de la productividad, y conseguir aumentar en promedio los precios de venta igual a lo que aumenten los de coste/contratación; y el resultado sería que la tasa de margen de la empresa aumentaría en algo más de 2 puntos. El escenario III se correspondería con un incremento de los salarios (y del resto de los precios de factores) igual al incremento en la productividad (como a veces leemos que se propone en negociaciones sindicales), y un mantenimiento de los precios de facturación (en aras de mantener la competitividad de la empresa); lo que llevaría a que la tasa de margen simplemente se mantendría igual. El escenario IV es similar, pero con un cierto incremento en los precios de facturación, por lo que la tasa de margen aumentaría 1,4 puntos. Y el más pesimista de los del cuadro sería el escenario VI, que implicaría según el modelo una caída de la tasa de margen de 2 puntos.

### Indicadores complementarios a los de eficiencia

Cuando se pretende no sólo medir la eficiencia comparativa sino también tratar de explicar porqué ésta cambia de un periodo a otro en una empresa determinada, o porqué es diferente en la empresa A que en la empresa B, los investigadores tienden entonces a incluir —como complemento del indicador de eficiencia que hayan escogido (sea  $CM$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $\Pi$ ,  $t$ ,  $IPAT$ , etc.)— otras variables complementarias. Variables que se supone están detrás

o influyen indirectamente, de alguna manera, en los valores del indicador de eficiencia utilizado. Por ejemplo:

- *tasa de variación del 'output' global* (de los ingresos a precios constantes, por ejemplo), que ilustra sobre el dinamismo de la empresa en su mercado;
- *tasa de ocupación* (*output* global / *output* global posible según la capacidad instalada), en tanto que puede explicar cambios en la eficiencia productiva;
- *cuota de mercado* alcanzada por la empresa;
- *nivel de endeudamiento*;
- *importancia relativa de las exportaciones*, en el conjunto de los ingresos por facturación
- *inversión neta anual*; o inversión acumulada; o inversión por trabajador; etc.

Las posibilidades son en este punto muy amplias dependiendo del tipo de empresa analizada y de los objetivos de la investigación <sup>43</sup>.

Así, por ejemplo, la variable *cuota de mercado* no puede considerarse propiamente un indicador de eficiencia. Pero tiene sentido decir que puede explicar algo sobre el porqué el aumento relativo de los precios de venta observado ha sido el que ha sido; (variable que, a su vez, influye directamente en el indicador de eficiencia *tasa de margen*).

---

<sup>43</sup> Como ejemplo de uso de indicadores complementarios, puede verse el trabajo de Cabeza, Laura y Gómez, Silvia "The Spanish privatisation process: Implications on the performance of divested firms", *International Review of Financial Analysis*, n. 16 (2007) pp. 390-409, tabla 2 (pág. 400).

## 7

## TÉCNICAS O MODELOS DE ANÁLISIS DE LA EFICIENCIA COMPARATIVA

Entremos ahora en cómo se utilizan en los estudios empíricos los diferentes indicadores de eficiencia que hemos visto, para obtener conclusiones precisas.

Se exponen a continuación las *técnicas, procedimientos o modelos estadísticos y econométricos de análisis* más habituales en los estudios o trabajos de investigación; es decir, las *metodologías más usuales* en los artículos de revistas científicas: cómo se suelen utilizar los indicadores para llegar a conclusiones fiables sobre la eficiencia comparativa, tanto en análisis longitudinal (en el tiempo) como –y sobre todo– en estudios *cross section* (comparar la eficiencia de varias empresas; o de dos o más tipos de empresa: públicas/privadas, locales/extranjeras, pymes/grandes empresas, capitalistas/cooperativas, ... por ejemplo).

Concretamente las técnicas y metodologías que se presentan, y su secuencia, son:

- Análisis longitudinal (comparación en el tiempo, ‘cross time’) simple.
- Análisis horizontal simple: comparación de dos empresas (‘cross section’ simple)
- Análisis horizontal varias empresas tipo ‘A’ vs. Varias empresas tipo ‘B’
  - Comparación de medias (análisis de la varianza)
  - Utilizar una función polinómica (lineal),
  - Funciones multiplicativas (‘translog’)
- Ranking de eficiencia/ineficiencia comparativa de un ‘pool’ de empresas
  - Modelos tipo ‘función de producción’
  - Modelos frontera (Funciones de producción frontera) ...
  - Función de producción frontera, no paramétrica.- AED
- Análisis o regresión con datos de panel (cross section & cross time)

Sigue después un último apartado (8) sobre fiabilidad y relevancia de los resultados -el problema de los errores no cuantificables- al aplicar las técnicas y metodologías anteriores.

### 7.1 Análisis longitudinal o temporal (‘cross time’):

#### Evaluación de los cambios en la eficiencia de una empresa, durante un periodo de años determinado

*Simple comparación temporal de los valores de los indicadores.*

Considérese la siguiente información sobre dos indicadores económicos de una empresa:

Años	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	media
<i>m</i> (%)	4,5	1,-	-3,8	-2,5	3,5	8,-	6,8	5,2	2,84
<i>IE</i>	36.000	36.000	35.200	36.500	38.940	42.517	41.718	43.400	
tasa de $\Delta$ de los <i>IE</i>		0	-2,2 %	+3,7 %	+6,7 %	+9,2 %	-1,9 %	+4 %	



La simple “lectura” de los valores de la tasa de margen para cada año nos permite decir si la eficiencia económica –medida con esa variable- ha mejorado o empeorado de un año a otro. Así, en el ejemplo anterior si nos limitamos al subperíodo 2002-2004 la conclusión al respecto es clara: ha disminuido la eficiencia medida en términos de tasa de margen. Pero si consideramos todo el periodo 1997-2004, vemos que la serie temporal no presenta una tendencia homogénea, lo que nos impide formular una conclusión inmediata a partir de una simple lectura. Este inconveniente, bastante general, puede intentarse salvar parcialmente calculando el promedio de la variable para dicho periodo: +2,84% en este ejemplo. Aunque tal valor tiene la limitación de todas las medias: un significado demasiado global respecto de la realidad que se está midiendo. Además de que no permite hablar de la evolución de la eficiencia de la empresa estudiada (si ha mejorado, y en qué medida). En cualquier caso, la utilización del valor medio viene condicionada por el grado de fiabilidad estadística del mismo. Así, en el caso del ejemplo, la desviación estándar es 4,26 y el intervalo de confianza  $\pm 3,56$ , por lo que dicho valor medio no puede considerarse estadísticamente significativo.

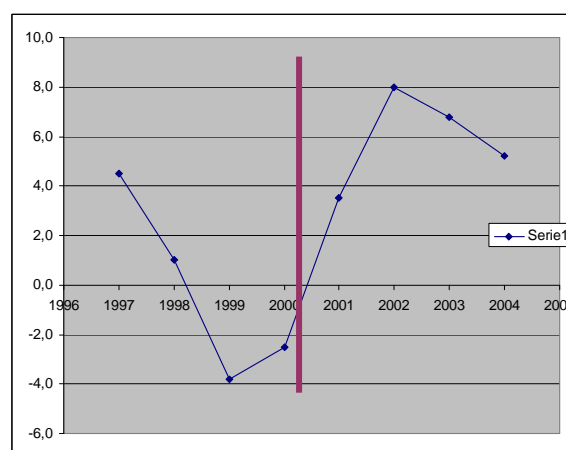
#### *Regresión temporal.*

Existe, no obstante, una alternativa algo más explicativa: medir, mediante una *regresión temporal*, si el indicador presenta una tendencia significativa. Efectuada ésta para el ejemplo, resulta un coeficiente anual de + 0,8964, lo que en principio indicaría que la tasa de margen ha venido subiendo a razón de 0,896 puntos de % por año. Pero tal coeficiente tiene asociado un estadístico *t* que señala un grado de confianza solo del 80%, por lo que no puede decirse que la tendencia señalada por dicho coeficiente la podamos considerar razonablemente fiable. Es decir, que el test estadístico nos lleva a descartar la hipótesis de que el porcentaje de margen de dicha empresa venga presentando en esos años una clara tendencia. Obsérvese que si, contrariamente al ejemplo, la media del indicador hubiese resultado estadísticamente significativa (dispersión mínima en los valores anuales del porcentaje de margen), una regresión temporal como la referida daría como constante un valor próximo al valor de dicha media y como coeficiente un valor próximo a 0; es decir, que nos diría que no se observa en el indicador tendencia apreciable alguna sino lo contrario: estabilidad en su valor a lo largo del tiempo.

#### *Comparación de los valores medios de subperíodos,*

Se trata de una opción tipo ANOVA para cuando en la serie de años en estudio tenemos dos (o más) subperíodos que se corresponden con situaciones distintas de la empresa: antes y después de un cambio estratégico.

Por ejemplo, los años antes y los de después de un cambio radical del equipo directivo, o de los accionistas de referencia; o de un cambio organizativo importante en la empresa (su privatización, por ejemplo); o de un cambio substancial en la situación de mercado de la empresa (pasar a enfrentarse a nueva competencia, o a un nuevo marco regulatorio, por ejemplo). La comparación de los valores medios de los indicadores para cada subperíodo ‘antes – después’ resulta una técnica adecuada en estos casos.



dos) y comparamos las respectivas medias

Así, siguiendo con la simplificación de utilizar solo el indicador  $m$ :

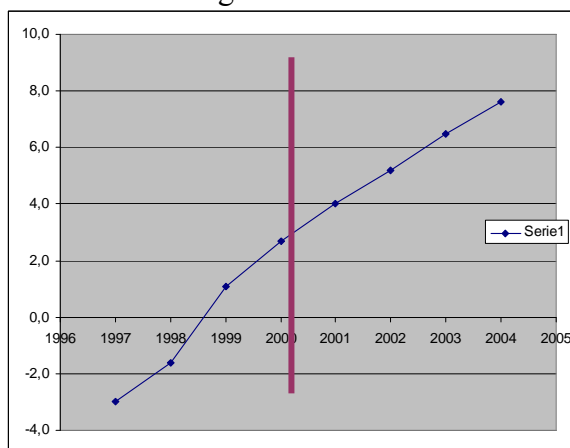
$$\bar{m}_{despues} - \bar{m}_{antes} = \Delta m$$

El grado de fiabilidad de las conclusiones dependerá, entre otras cosas, del grado de confianza estadística de la diferencia entre las dos medias. Así, si en el ejemplo numérico anterior suponemos que hubo un cambio substancial en la empresa a finales del año 2000 (lo que definiría dos subperio-

Una cuestión distinta es cual o cuales pueden haber sido las causas de este incremento.

Puede deberse en parte a factores externos –como una coyuntura más favorable durante el segundo periodo-, y en parte a factores internos, como un cambio estratégico en la gestión de la empresa a finales de 2000.

También podría ser que el indicador utilizado –tasa de margen en este caso- viniese presentando una tendencia positiva, sostenida a lo largo de los dos subperiodos. No es este el caso de nuestro ejemplo numérico, como puede verse en el gráfico. Pero si no conocemos los datos de base sino solo la diferencia entre las dos medias (+6,07) y el estadístico  $t$  (2,884) –que es lo más habitual al leer un artículo en una revista- no puede descartarse que el factor interno sea simplemente que ha habido un incremento sostenido en la tasa de margen.



de la tasa de margen, su diferencia es de +6,07 puntos de porcentaje. Y el correspondiente test  $t$  para diferencia entre medias en muestras no pareadas da un valor de 2,884, que está asociado a un nivel de error inferior al 3% (bilateral, a dos colas). La conclusión razonable en este caso sería, pues, que la eficiencia de la empresa medida por la tasa de margen aumentó en promedio de un periodo a otro en 6,07 puntos.<sup>44</sup>

Por ejemplo, los datos de base de la gráfica de la izquierda tienen asociados la misma diferencia de medias entre ambos subperiodos que los datos del ejemplo anterior, y el grado de confianza de esta diferencia –según el estadístico  $t$ - es aún mayor. Pero resulta evidente que si tal fuese el caso, la conclusión de que la eficiencia de la empresa ha cambiado substancialmente entre ambos subperiodos debido a un cambio estratégico a finales del año 2000 no resultaría sostenible.<sup>45</sup>

## 7.2 Eficiencia comparativa: empresa "A" <---> empresa "B" (cross section simple)

### *Simple comparación de las dos series temporales*

Sigamos suponiendo que el indicador de eficiencia que estamos utilizando es la tasa de margen operativo. Y que hemos obtenido el siguiente cuadro de datos:

<sup>44</sup> Pueden verse, como ejemplo de aplicación de esta técnica de análisis –frecuente en estudios comparando la eficiencia de las empresas antes y después de su privatización: Megginson, William L. / Netter, Jeffrey M. (2001), "From State to Market: A survey of Empirical Studies on Privatization", *Journal of Economic Literature*, June 2001, vol. 39 n. 2: 321-389.

<sup>45</sup> Por supuesto, una regresión temporal con unos datos de base como los de este segundo ejemplo numérico nos daría una conclusión de clara tendencia estable: La tasa de margen viene incrementándose a razón de 1,53 puntos de porcentaje a lo largo de todo el periodo observado; y el nivel de confianza de esta conclusión es mayor del 99,9%.

		1997	1998	1989	2000	2001	2002	2003	2004	media 1997-04
empresa "A"	$m$ (%)	4,5	1,-	-3,8	-2,5	3,5	8,-	6,8	5,2	2,84
empresa "B"	$m$ (%)	1,6	-4,-	2,2	1,-	6,-	3,-	1,2	5,6	2,08

Por simple comparación de las dos series anteriores puede afirmarse que durante 2002 y 2003 la empresa A fue más eficiente que la B. Pero no puede afirmarse para todo el periodo 1997-2004, porque hay años en que la comparación muestra lo contrario. Veamos las alternativas para poder sacar alguna conclusión al respecto en una situación (por otra parte frecuente) como ésta:

*Comparación de los respectivos valores medios de cada serie (análisis de la varianza).*

Los respectivos valores medios para ambas empresas nos permiten decir en estos casos que, para el periodo 1997-2004, la empresa A ha sido, *en promedio*, más eficiente que la B. No obstante, siempre que se utiliza el promedio de una serie se pierde toda la información que representan los datos individuales (las tasas de cada año, en nuestro ejemplo). Además de que la comparación de promedios es una técnica tanto menos precisa cuanto más dispersas sean las series temporales que comparamos. Así, en el ejemplo anterior, como puede verificarse, también la media  $m_B=2,08$  presenta una fuerte dispersión (su desviación estándar es 3,1, y el intervalo de confianza –al nivel del 95%- es de  $\pm 2,6$ ); y como consecuencia, para la diferencia entre esas medias ( $m_A - m_B$ ) se obtiene un estadístico (de nuevo: test para diferencia entre medias de muestras no pareadas)  $t=0,4088$ , lo que indica que la diferencia observada de 0,76 puntos de porcentaje entre las medias de tasa de margen de ambas empresas no es estadísticamente significativa a un nivel de confianza aceptable. Un caso en el que, por tanto, no podríamos rechazar la hipótesis nula: Que no se observa diferencia significativa entre la tasa de margen de una empresa y la otra.

*Comparación de tasas de variación del indicador de eficiencia.*

Es frecuente encontrar trabajos en los que se comparan las respectivas *tasas de variación de la productividad global* anuales de ambas empresas ( $t_x^A, t_x^B$ ) a lo largo de un número de años determinado ( $x=1,2,\dots$ ). En estos casos lo importante es no olvidar que no se está comparando la productividad (IPG,  $=\Pi$ ) de una empresa, en cada año de la serie, con la productividad de la otra, sino que lo que se está comparando es la variación que experimentó la productividad de una empresa con la variación que experimentó ese mismo año la productividad de la otra empresa. No es ciertamente lo mismo comparar niveles de productividad que tasas de variación de las respectivas productividades. Supongamos que en 1999 la productividad (IPG) de la empresa A era notablemente superior a la de la empresa B; y que posteriormente en esta última se tomaron medidas efectivas para tratar de eliminar las ineficiencias existentes, con tan buenos resultados que en 2004 los niveles de productividad de B alcanzaron prácticamente a los de A. En tal caso si optamos por calcular exclusivamente las respectivas tasas de variación de la productividad encontraremos que la empresa ‘atrasada’ B presentará en los años 90 unas tasas de variación de la productividad superiores a las tasas de la A. Pero de tal información no podemos deducir –como hacen algunos autores- que la empresa B haya sido más eficiente que la A durante esos años <sup>46</sup>.

<sup>46</sup> A menos que obtengamos, además, la diferencia relativa de productividad de ambas empresas para al menos uno de los años de la serie:  $t_{x_0}^{A,B}$ . De ser así, el análisis bilateral de tasas que hemos visto antes en 4,5 sí que permitiría utilizar las dos series temporales de cada empresa ( $t_x^A, t_x^B$ ) para deducir la serie completa del diferencial de productividad entre ambas empresas,  $t_x^{A,B}$  para cada año del periodo en estudio.

## Regresión lineal entre las dos series temporales

Supongamos que –por tratarse de empresas uni-producto o situación asimilable– utilizamos como indicador de la eficiencia productiva el *coste medio* de cada empresa. Y que, obtenidas las dos series temporales de tal indicador llevamos a cabo el análisis comparativo (la técnica comentada ahora es, sin embargo, aplicable cualquiera que sea el indicador; por ejemplo el de *productividad*).

Años → :	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Empresa A, coste medio:	$Y_{00}$	$Y_{01}$	$Y_{02}$	$Y_{03}$	$Y_{04}$	$Y_{05}$
Empresa B, coste medio:	$X_{00}$	$X_{01}$	$X_{02}$	$X_{03}$	$X_{04}$	$X_{05}$

Realizar una regresión lineal entre estas dos series temporales significa: 1) presuponer que hay una relación lineal determinada entre las dos series:  $Y = a + b \cdot X$ , y 2) determinar los valores de  $a$  i  $b$  que hacen que la recta correspondiente se ajuste lo mejor posible a la nube de puntos resultante de representar gráficamente los pares de valores de la tabla anterior.<sup>47</sup> La conclusión sobre la eficiencia comparativa dependerá del valor obtenido para estos parámetros. Veamos tres ejemplos:

<i>Supongamos que el valor de los parámetros ha sido:</i>	<i>Eso nos permite decir que, a lo largo del periodo 1990-1995:</i>
$Y = 6 + 1 \cdot X$	El coste medio (de cada año) de la empresa A ha sido sistemáticamente 6 unidades monetarias (u.m.) más alto (en promedio) que el de la empresa B.
$Y = 0 + 0,85 \cdot X$	Los costes medios de la empresa A han sido sistemáticamente un 15% más bajos (en promedio) que los de la empresa B.
$Y = 3 + 0,75 \cdot X$	Los costes medios de la empresa A vienen siendo (en promedio) iguales al 75% de los de la empresa B, más 3 u. m.
$Y = -2000 + 3,2 \cdot X$	Los datos no permiten establecer una relación cuantitativa fiable entre $Y$ y $X$

Los dos primeros ejemplos serían unos casos claros en que esta metodología permitiría afirmar que la eficiencia productiva de una empresa es igual o mejor que la de la otra. En el tercer ejemplo, la conclusión dependerá de cuál sea el valor absoluto de  $X$ ; ya que, en última instancia, lo que se trata de verificar siempre es si se da que  $Y <, =, > X$  de forma sistemática o no. Hay que tener en cuenta que, como sucede en toda regresión lineal, la validez de las conclusiones anteriores estará sujeta a que los valores de los *estadísticos* de la regresión —intervalos de confianza para los parámetros  $a$  y  $b$  estimados, sus correspondientes test  $t$ , y el coeficiente de determinación,  $r^2$ — permitan hablar de que los parámetros en cuestión tienen un grado de significación y confianza satisfactorios. Así, en el cuarto ejemplo probablemente encontraríamos que el intervalo de confianza para ambos parámetros es demasiado amplio y que sus estadísticos  $t$  presentan valores muy bajos; y que, por tanto, los parámetros en cuestión no son fiables; no son estadísticamente significativos<sup>48</sup>.

<sup>47</sup> Obsérvese que, en una aplicación como ésta, efectuar una regresión lineal equivale en cierta manera a realizar una *comparación dinámica de promedios*; es decir, a calcular la relación (cociente) entre el par de valores de cada periodo y después establecer un tipo de promedio ponderado de estas relaciones. Por ejemplo, si sistemáticamente el cociente entre los respectivos valores  $Y$  y  $X$  de cada año fuera igual a  $Y / X = 1,3$ , entonces la regresión lineal nos dará:  $Y = 0 + 1,3 X$ ; lo que nos indicaría que los valores de la empresa A son sistemáticamente un 30% superiores a los correspondientes valores de la empresa B.

<sup>48</sup> De hecho, se trata de un resultado ‘extraño’ de los que pueden salir de una regresión cuando las dos series de datos tienen valores muy similares y estables en el tiempo, lo que se traduce en que su representación gráfica resulta en una nube de puntos de forma aproximadamente circular.

Todo lo anterior es extensible a la comparación de mas de dos empresas: A, B, C, D, E, ... Por ejemplo tomando la A como referencia y replicando el análisis descrito para cada una de las demás:  $B \rightarrow A$ ,  $C \rightarrow A$ , ... etc.

### 7.3 Eficiencia comparativa: varias empresas A <-----> varias empresas B

La base de partida en este tipo de estudios consiste normalmente en una matriz con los datos del indicador de eficiencia escogido, para cada una de las empresas tipo 'A' y cada una de las de tipo 'B', para cada año del periodo tomado para el estudio. Y así para cada otro indicador que se quiera aplicar. Esquemáticamente para el caso de tres indicadores ../

		Valores del indicador $m$							
		Valores del indicador $\Pi$							
↓Empresas	Valores del indicador: CM								
Años →	1	2	3	...	.....	.....	.....	X	
<u>Tipo 'A'</u>									
A1									
A2									
A3									
A4									
:									
:									
media	$CM_A$	..	..					..	
<u>Tipo 'B'</u>									
B1									
B2									
B3									
:									
:									
media	$CM_B$	..	..					..	

../ las opciones metodológicas en estos casos son, principalmente:

#### *Comparación de medias (análisis de la varianza)*

Consiste en calcular la *media* del indicador de eficiencia (CM, por ejemplo) para cada grupo de empresas, y comparar después estos valores medios; es decir, calcular su diferencia y verificar si ésta es estadísticamente significativa. En cierta forma es como reducir la comparación múltiple a una comparación simple como la del punto anterior. El análisis puede limitarse solo a los datos de un año determinado, o bien tomar los de varios años; aunque, desde luego, esto último dará conclusiones más significativas.

Esta operación de comparar los valores medios, es decir, calcular la diferencia entre ambas medias para el indicador que estemos utilizando ( $CM_A - CM_B$ , en el ejemplo), hace que el análisis de la varianza (ANOVA) sea la parte más substancial de esta opción, pues es fundamental medir el grado de significación o confianza de la diferencia entre las

respectivas medias obtenidas para cada grupo de empresas.<sup>49</sup> El análisis es más completo cuando se replica el proceso de análisis para otros indicadores de eficiencia (por ejemplo,  $m$ , o  $II$ ). Y, por supuesto, los grupos de empresas a comparar pueden ser más de dos, tomando uno de los grupos como referencia.

*Utilizar una función polinómica (lineal),*

Consiste en definir una función cuyas variables independientes pueda considerarse que explican las causas por las cuales varía -de una observación a otra- el indicador de eficiencia que se esté utilizando. Considerando que una de esas causas es la de ser empresas con diferente estructura de propiedad (públicas unas, privadas las otras, por ejemplo). Así, por ejemplo:

$$CM = a_0 + a_1 \cdot IPAT + a_2 \cdot W + a_3 \cdot Q + a_4 \cdot D + \varepsilon$$

donde: CM = coste medio; IPAT = Índice de productividad aparente del trabajo; W = coste por hora del trabajo; Q = volumen de output total; D = variable ficticia binaria, D=1 si empresa tipo 'A' y D=0 si empresa tipo 'B'; y  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  son los coeficientes a determinar a través de una regresión lineal múltiple.

Definir una función como ésta supone estar efectuando ciertas hipótesis de causalidad (que pueden demostrarse luego más o menos acertadas). Así, en este caso, se está presuponiendo que el coste medio puede ser distinto según el tipo de empresa (variable D) pero también, e independientemente de lo anterior, de la productividad aparente del trabajo de cada empresa, de los costes laborales medios ídem, y del volumen de actividad de la empresa (esto último indicaría diferencias debidas a economías de escala). Los datos necesarios para aplicar una función como la del ejemplo, responderían al siguiente esquema:

↓Empresas	Datos del año x-1					
	variables →	CM	IPAT	W	Q	D
<i>Tipo 'A'</i>						
A1						1
A2						1
A3						1
A4						1
:						:
A68						1
<i>Tipo 'B'</i>						
B1						0
B2						0
B3						0
:						:
B86						0

Obtenidos, a partir de los datos anteriores los coeficientes de la función (y suponiendo que los estadísticos correspondientes  $[t, p\text{-value}]$  indicasen que dichos coeficientes son

<sup>49</sup> Como ejemplo de aplicación de esta técnica de análisis –que es de las más utilizadas en estudios comparativos- puede verse: Dewenter, Kathryn / Malatesta, Paul H. (2001) “State-Owned and Private-Owned Firms: An Empirical Analysis of Profitability, Leverage, and Labour Intensity”, *American Economic Review*, 91 (1): 320-334.

estadísticamente significativos, fiables), el  $a_4$  es el que propiamente nos permitirá sacar conclusiones sobre la eficiencia comparativa entre un tipo de empresas y el otro. Así, si hubiese resultado  $a_4 = - 26$  significaría que el CM tiende a ser 26 € menor en las empresas tipo 'A' que en las del tipo 'B', independientemente de si producen más o menos, de si pagan salarios más o menos altos, y de si la productividad aparente del trabajo es mayor o menor. Y, si, por ejemplo, hubiésemos obtenido  $a_3 = - 0,04$ , su signo negativo nos indicaría que efectivamente existen ciertas economías de escala en el sector, pues el CM se reduce algo a medida que el volumen de output de una empresa es mayor, independientemente de que la empresa sea del tipo 'A' o 'B'. La pregunta siguiente sería si esas economías de escala son importantes o más bien insignificantes -en cuanto a su efecto sobre el coste medio. Esto dependerá del valor absoluto del coeficiente (0,04) y del orden de magnitud en que vienen expresadas la variables dependiente y la independiente. Supongamos que el CM se mueve alrededor de los 62 €, y la variable Q alrededor de las 1as 1.500 Tn. Podremos decir entonces que incrementar el volumen de output en 100 Tn está asociado a una reducción de 4 € en el coste medio; lo que, comparado con el orden de magnitud de éste (62 €) resulta un efecto relativamente importante. Por el contrario, si el orden de magnitud del CM fuese de alrededor de 620 € concluiríamos que el efecto de las economías de escala detectadas es más bien insignificante; o, dicho de otro modo, que Q no es una variable muy relevante en la determinación del coste medio de las empresas estudiadas.

En algunos trabajos de investigación podemos encontrar que en el lugar de la variable dependiente está de hecho su logaritmo ( $\ln[CM]$ , en el caso anterior). Entonces el significado de los coeficientes obtenidos de la regresión es diferente: si, por ejemplo, ha resultado que  $a_4 = - 0,035$ , significa que el CM de las empresas tipo 'A' tiende a ser un 3,5% menor que el de las de tipo 'B'; etc.<sup>50</sup>.

Utilizar una función -ésta o las siguientes- supone, como puede verse, un enfoque más amplio que el de la simple medida y comparación de la eficiencia de ambos grupos de empresas. Según el tipo de variables independientes que se introduzca -además de la relativa al tipo de empresa- el utilizar una función permite aislar diferencias de eficiencia que vienen explicadas por otras variables ajenas al tipo de empresa (con lo que el diferencial de eficiencia que aparece atribuible al tipo de empresa gana en significación). O bien permite, además de medir el diferencial de eficiencia, obtener explicaciones del porqué del mismo; por ejemplo: que es debido en parte a que las empresas tipo B utilizan mayor inversión fija por persona, en parte a economías de escala, en parte por pagar salarios distintos, ... etc.

**Términos de interacción.-** -En ciertos trabajos encontramos que en la definición de la función cuyos coeficientes se van a estimar mediante regresión múltiple se incluye como variable explicativa adicional el producto de dos (o más) de sus variables independientes (hablamos entonces de términos multiplicativos o de interacción). Tiene esto sentido si se presupone que el efecto de una de las variables independientes sobre la variable dependiente (el coeficiente de la primera) no es en realidad una constante sino que depende en cierta medida del valor que tome (la) otra variable independiente. Así, si nos parece razonable la hipótesis de que el efecto de la productividad parcial del trabajo (IPAT) sobre el coste medio de las empresas estudiadas (CM) no será un valor constante sino -por ejemplo- algo menor si la empresa tiene un volumen de producción mayor, podemos formular la función como:

<sup>50</sup> Tal significado se deriva de tener en cuenta que un incremento (o una reducción) en el logaritmo natural de una variable es una tasa de variación (o de diferencia) de dicha variable, expresada en tantos-por-uno:  $\Delta \ln(CM) \equiv \ln[CM_{\text{momento (o situación) 1}} / CM_{\text{momento (o situación) 0}}]$ .



$$CM = a_0 + a_1 \cdot IPAT + a_2 \cdot W + a_3 \cdot Q + a_4 \cdot D + a_5 \cdot (IPAT \cdot Q) + \varepsilon$$

La regresión según este *modelo interactivo* dará lugar a unos coeficientes distintos a los del ejemplo anterior (*modelo aditivo* o *de coeficientes fijos*); especialmente –en el ejemplo anterior– en cuanto a los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_3$ . El efecto de la variable IPAT sobre CM, su coeficiente, será ahora  $(a_1 + a_5 Q)$ ; un valor no constante, sino variable en función del valor que tome Q. Puede establecerse una comparación entre los resultados de ambos modelos: si calculamos  $(a_1 + a_5 Q)$  para un valor de Q igual a su media en la muestra utilizada; el resultado será aproximadamente igual al valor del coeficiente  $a_1$  del modelo de coeficientes fijos<sup>51</sup>. Y, por supuesto un término de interacción puede ser entre una variable ordinaria (continua) y una variable dicotómica (Dummy) –por ejemplo, una relativa al tipo de empresa.

**Términos cuadráticos.**– Hay autores que de forma simultánea o independientemente de lo anterior definen su modelo introduciendo también como variable independiente el cuadrado de una (o más) de las variables independientes ‘primarias’. Así, si siguiendo con nuestro ejemplo definimos el modelo como

$$CM = a_0 + a_1 \cdot IPAT + a_2 \cdot W + a_3 \cdot Q + a_4 \cdot D + a_5 \cdot Q^2 + \varepsilon ,$$

ello significa que estimamos razonable presuponer que el efecto de la variable volumen de output, Q, sobre el coste medio, CM, no será siempre exactamente el mismo sino que dependerá de si el propio volumen de output es más alto o más bajo. Si efectivamente esto es así o no, nos lo dirá el valor que después resulte para el coeficiente  $a_5$  y para su test estadístico. En definitiva, un término cuadrático es formalmente un término de interacción; en este caso de la variable en cuestión (Q) consigo misma. En consecuencia, el efecto de la variable Q sobre el CM (su coeficiente; o, si se prefiere: la pendiente de CM respecto a Q, manteniendo todas las demás constantes) vendrá dado ahora por el valor que tome  $(a_3 + a_5 Q)$ <sup>52</sup>.

#### *Funciones multiplicativas ('translog')*

Se trata de definir una función, como en el caso anterior, presuponiendo unas relaciones de causalidad entre una variable dependiente y unas variables independientes; pero en este caso la forma funcional no es polinómica sino multiplicativa-exponencial. Por ejemplo:

$$CM = a \cdot Q^{x_1} \cdot W^{x_2} \cdot K^{x_3} \cdot e^{x_4 \cdot D}$$

En el que supondremos que K= precio de compra del combustible (energía), y que el resto de las variables tiene el mismo significado que en el ejemplo anterior; y donde: a,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ , son los coeficientes a estimar.

Esta función multiplicativa es después linealizada tomando logaritmos naturales (transformación logarítmica o ‘función translog’), a fin de permitir una determinación de los coeficientes de la función a través de una regresión lineal múltiple. Así, siguiendo con el ejemplo:

$$\ln (CM) = \ln a + x_1 \cdot (\ln Q) + x_2 \cdot (\ln W) + x_3 \cdot (\ln K) + x_4 \cdot D$$

<sup>51</sup> Y, paralelamente, también habremos de interpretar que el efecto del volumen de output, Q, (como variable proxy del tamaño de la empresa) sobre el CM viene ahora indicado por el coeficiente  $(a_3 + a_5 IPAT)$ .

Sobre la inclusión de términos de interacción y la interpretación de los coeficientes resultantes de la regresión es recomendable el especialmente claro trabajo seminal de Robert J. Friedrich “In Defense of Multiplicative Terms in Multiple Regression Equations”, *American Journal of Political Science*, 26-4, 797-833. Especialmente el apartado *Interpreting regression coefficients in models with multiplicative terms* (pág. 804-809).

<sup>52</sup> Para una exposición más completa puede verse la referencia anterior, sus páginas 828-230.



Es decir, que definida la función translog (y calculada una nueva base de datos con los  $\ln$  de los valores de todas las observaciones de nuestra muestra), es aplicable todo lo dicho antes respecto a efectuar e interpretar una regresión con una función polinómica lineal. Incluida la posibilidad de introducir términos de interacción y términos cuadráticos en la función translog <sup>53</sup>. Con la diferencia, claro, de que al interpretar los coeficientes de la regresión habremos de tener en cuenta que se refieren no a las variables en sí sino a sus logaritmos naturales.

No siempre que un autor opta por un modelo de este tipo la variable dependiente es un indicador de eficiencia. Es frecuente en la literatura sobre el tema encontrar como variable dependiente el Coste total (C); (se habla entonces de *función de costes*); y también el volumen de producción (Q), en cuyo caso se habla de una *función de producción*. Como en el caso del modelo polinómico, en estas opciones metodológicas el objetivo no es directamente –o no es simplemente- comparar la eficiencia de un tipo de empresas respecto de la de otro (EP/empresa privada, por ejemplo), si no tratar de explicar qué parte de las diferencias observadas -en los costes medios, por ejemplo- entre las diferentes empresas consideradas viene explicada por la variable tipo de empresa (pública/privada), qué parte por el tamaño de la empresa (economías de escala), ...etc.

Una de las ventajas que ofrece este tipo de modelos translog es que una vez determinados los coeficientes estos tienen un significado en términos de tasas de variación, lo que puede resultar de comprensión más directa. Así, por ejemplo, si de la regresión para la función anterior obtenemos  $x_1 = -0.20$ , el signo negativo nos indica, como antes, que existen economías de escala favorables; y el valor del coeficiente significa que un incremento de (por ejemplo) un 10% en el volumen de output -manteniendo todas las demás variables independientes constantes- se traduce en una disminución de alrededor del 2% en el coste medio ( $-0,20 \cdot 10$ );<sup>54</sup> lo que pone de relieve directamente la importancia relativa de éstas, sin necesidad de introducir el orden de magnitud de las variables implicadas ( $CM$  y  $Q$ ). Y si, por ejemplo,  $x_4$  resultase ser igual a  $+0,05$ , significaría que las EP presentan en general unos costes medios alrededor de un 5% superiores a los de las empresas privadas -si éstas pagasen los mismos precios y tuviesen un volumen de actividad similar. Es decir, que el coste medio tiende a ser un 5% mayor, independientemente de -o manteniendo constantes- las demás variables explicativas <sup>55</sup>. Por supuesto, la validez de estas conclusiones estará sujeta a que los estadísticos obtenidos en la regresión para cada coeficiente –test  $t$  o  $p$ -value, cuestiones de colinealidad,

---

<sup>53</sup> En la función original, exponencial, un término de interacción entre, por ejemplo, la variable  $W$  y la  $Q$  aparecerá normalmente como un nuevo factor en la expresión, de la forma:  $W^{x_5 \cdot \ln Q}$ , el cual en la función linealizada quedará como:  $+x_5 \cdot (\ln Q \cdot \ln W)$ .

<sup>54</sup> Argumentación general: Siendo  $x_1 = -0,20$ , si  $\ln(Q)$  aumenta en 0,1 ello hará aumentar  $\ln(CM)$  en  $-0,02$ , dado que un incremento -de un periodo a otro- en el  $\ln(\cdot)$  de una variable ( $Q$ ,  $W$ ,  $CM$ , ... etc.) mide la tasa a que ha variado ésta. O, en términos más generales, mide un determinado incremento relativo de la variable en cuestión. Los coeficientes resultantes para la función translog nos dan, pues, directamente, la relación entre la variación relativa de la variable dependiente respecto a la variación relativa de tal o cual variable independiente; con lo que no es necesario conocer el orden de magnitud en que vienen expresadas las variables para saber si tal o cual variable incluida como independiente juega un papel relevante o no como variable explicativa de la variable dependiente.

En algunos trabajos de investigación podemos encontrar la función linealizada expresada en términos de primeras diferencias;  $\Delta \ln CM = \Delta \ln a + x_1 \Delta \ln Q + \dots$ . No es ningún cambio substancial (la regresión efectuada ha sido la misma, y los coeficientes significan lo mismo; se trata de una variante de presentación que simplemente facilita interpretar el significado que, hemos visto, tienen los coeficientes.

<sup>55</sup> Pueden verse ejemplos concretos de aplicación de esta técnica analítica en Milward / Parker (1983), *Public and private enterprise; Comparative behaviour and comparative efficiency*, pàg. 229-233, y 243-244.

heteroskedasticidad, etc.- y el coeficiente de determinación  $R^2$  permitan estimar para los valores de los coeficientes un grado de significación y confianza satisfactorios.

Es útil remarcar que, como puede verse por los ejemplos numéricos, los coeficientes de una regresión translog pueden interpretarse como *elasticidades* de la variable dependiente respecto a las respectivas variables independientes (o, dicho de otro modo, variables explicativas). Así, -0,20 puede leerse también como que la elasticidad del coste medio respecto del volumen de producción es negativa, e igual a 0,20:

$$\text{Elasticidad } (CM \leftarrow Q) = \frac{\% \Delta CM}{\% \Delta Q}; \text{ p.e.: } -0,20 = \frac{-2/100}{+10/100}$$

es por ello que en ciertos trabajos podemos encontrar que los autores se refieren a elasticidades al hablar del significado de los coeficientes obtenidos para una función translogarítmica.

### Modelos tipo 'función de producción'

Como se ha indicado, una variante usual de funciones multiplicativas en la literatura sobre el tema de la eficiencia comparativa entre diferentes empresas es la de la *función de producción*. Consiste en tomar como variable dependiente las unidades de producto,  $q$ , y como variables independientes las unidades de los factores, más, eventualmente, otras variables explicativas. La formulación suele ser en estos casos del tipo:

$$q = f(F_j, D)$$

donde:  $F_j$ = unidades del factor; ( $j=1, 2, \dots, J$ );  $D$  = variable binaria (dummy), para el tipo de empresa.

Así, como ejemplo simplificado:

$$q = a \cdot L^{x1} \cdot C^{x2} \cdot A^{x3} \cdot e^{x4 \cdot D}$$

(donde:  $L$ = número de trabajadores;  $C$ =Unidades de combustible;  $A$ =Activos fijos (€) ).

La condición para poder aplicar propiamente una función de producción es que estemos considerando empresas que producen un solo producto (p.e., eléctricas: KWH); o bien que, produciendo diferentes bienes, las cantidades de estos se puedan razonablemente expresar de forma agregada mediante una cierta variable o unidad de cuenta representativa del output global:  $Q=f(q_i)$ , (p.e., Km-vehículo, en el caso de empresas de transporte).

En cualquier caso, en esta opción metodológica no se utiliza de hecho un indicador de eficiencia como variable dependiente a explicar sino que, como puede verse, el análisis de eficiencia comparativa se efectúa de forma implícita: Si utilizando unas mismas cantidades de los tres factores las empresas tipo 'A' tienden a obtener un volumen de producción mayor que las del tipo 'B', concluiremos que las primeras son en general más eficientes que las segundas. Continuemos con un ejemplo menos simplificado que el anterior:

$$Q = a \cdot (L_1)^{x1} \cdot (L_2)^{x2} \cdot E^{x3} \cdot M^{x4} \cdot C^{x5} \cdot R^{x6} \cdot e^{x7 \cdot D}$$

donde:

$Q$  = Unidades de output total

$L_1$ = unidades de trabajo, de tipo 1;

$L_2$ , ídem, tipo 2

$E$  = unidades de energía/combustible

$M$  = unidades de materia prima.

$C$  = unidades de capital (inversiones en bienes de equipo, ponderadas con la duración esperada de cada uno, por ejemplo).

$R$  = unidades de 'Resto de los factores', (en valores monetarios a precios fijos, por ejemplo)

$D$  = 1 si la empresa es pública; = 0 si es privada

En una función como la anterior el grado de eficiencia está implícito en la propia función, en tanto que relaciona precisamente el nivel de output global con las cantidades de los inputs, y con la variable que representa si la empresa es de un tipo u otro (pública o privada, en nuestro ejemplo). Así, por ejemplo, si de la regresión resultase que  $x_7=0,015$  (y esto fuese estadísticamente significativo), podría decirse que cuando la empresa es pública, consumiendo unas mismas cantidades de factores, produce un 1,5% más de unidades de output que si fuese privada.

Como se habrá podido observar, es característico de esta metodología el simplificar la realidad analizada a base de considerar como factores ‘trabajo’, ‘capital’, ‘materia prima’, ... etc.. Lo que, más que factores (en el sentido que esto tiene en una *función de producción*), constituyen ‘paquetes’ o agregados de factores. Y esta simplificación acarrea un problema ya que, en cualquier aplicación práctica, dentro de cada uno de esos ‘paquetes’ habrá en realidad factores diversos, con características y precios distintos; (cualquier empresa utiliza diversas clases de trabajo, diferentes materias primas, diferentes bienes de capital, diferentes servicios externos, etc.); al igual que normalmente las empresas producen más de un producto.

Tal planteamiento típico basado en conceptos genéricos de inputs (y de output) constituye una seria limitación pues al aplicarlo en un estudio concreto obliga a tomar como unidades físicas de ‘output global’ y de esos ‘macro-factores’ lo que en el mejor de los casos serán agregados de unidades heterogéneas.

Además, normalmente no se dispone ni de esa información sobre unidades físicas de productos y de factores para las empresas de la muestra; lo que hace que los autores que optan por esta metodología acaben recurriendo adicionalmente a variables *proxy*. Concretamente, tomando como unidades de ‘output global’ y como ‘unidades de factores’ (‘trabajo’, ‘capital’, ..etc .) los agregados monetarios que suelen ofrecer las cuentas de resultados de las empresas (ingresos, costes de personal, costes por consumos de materiales, amortizaciones, ... etc.), corregidos unos y otros con determinados índices de precios.

En todo caso conviene subrayar que trabajar con variables genéricas (que inevitablemente son agregados de unidades heterogéneas) y variables *proxy* comporta introducir unos determinados niveles de error, acumulativos y no cuantificables, pero que condicionaran la validez de los resultados obtenidos. En esta línea, una simplificación extrema, pero no por ello menos utilizada, de este tipo de planteamientos consiste en utilizar una típica función de producción neoclásica Cobb-Douglas, definida usualmente como una relación entre la cantidad de output y las cantidades de *dos* inputs: trabajo (L) y capital (C):  $q=a \cdot L^\alpha \cdot C^\beta$ .

#### *Modelos frontera (Funciones de producción frontera) ...*

Una forma frecuente de aplicar el concepto de función de producción como técnica para medir la eficiencia relativa de un conjunto de empresas es prescindir de la variable explicativa ‘tipo de empresa’ (D). La idea entonces es determinar una función que describa la relación ideal, de máxima eficiencia, entre el producto y los factores en esa industria o sector de actividad al que pertenecen las empresas que se quiere evaluar. Una idea ciertamente ambiciosa, pues supone que es posible conocer y formalizar complejas relaciones entre un número elevado de variables –variables y relaciones que además están sujetas a cambios en el tiempo- de tal manera que quede plasmada la ‘fórmula’ de la gestión económicamente perfecta en una determinada actividad empresarial. Algo que nos lleva a pensar en la existencia de un observador omnisciente ... Pero dejemos esto de momento.

### ... Paramétricos

La idea de función de producción así entendida, expresada, para simplificar y como es habitual, suponiendo que las  $n$  empresas a estudiar solo utilizaran dos factores, consiste en una función que describe el volumen teórico o ideal de producto ( $q'$ ) que debería haber obtenido cada una de esas  $n$  empresas con las cantidades de los dos factores que realmente ha utilizado:

$$q' = a \cdot L^{x1} \cdot C^{x2} ;$$

Y en general, para cualquiera que sea el número de factores ( $j = 1, 2, \dots, J$ ):

$$q' = a \cdot \prod_j F^{xj}$$

Si realmente conocemos esta función (es decir, los coeficientes  $a$ ,  $x1$ ,  $x2$ , ...  $xJ$ ), aplicándola a las cantidades observadas de factores utilizados por la empresa  $f$ , una de las empresas de la muestra ( $f=1, 2, \dots, n$ ), podemos determinar cual debería haber sido su producción si hubiese actuado de forma perfectamente eficiente:

$$\text{(predicción): } q'_f = a \cdot (L^{x1} \cdot C^{x2} \cdot \dots)_f$$

Y comparando las unidades que realmente ha producido,  $q_f$ , con el anterior valor teórico podemos cuantificar su grado de (in)eficiencia:

$$\text{Índice de (in)eficiencia, } INEF_f = \frac{q_f}{q'_f} ; \quad INEF_f \leq 1$$

Se habla entonces de la función anterior como función de producción frontera paramétrica; o, simplemente, *función frontera*. Una forma alternativa de expresar la misma idea de medir la (in)eficiencia de cada una de las empresas estudiadas es la siguiente:

$$q_f = a \cdot (L^{x1} \cdot C^{x2} \cdot \dots)_f - d_f ; \quad d_f \geq 0$$

donde la ineficiencia viene medida por la desviación de la cantidad real (observada) de producto, respecto a la cantidad predicha por la *función frontera*, o *término de error*:

$$(q' - q)_f = d_f$$

Ahora bien, suponer que somos capaces de determinar una función de producción en el sentido indicado arriba, que describa las condiciones de máxima eficiencia en un tipo de actividad empresarial, es ciertamente utópico. No solo porque en cualquier aplicación real el número de variables (diferentes productos, diferentes factores) sería considerable (y, en consecuencia los requisitos de información enormes), sino porque tal nivel de eficiencia máximo es algo inobservable en la práctica, aparte de estar sujeto a continuos cambios (de gustos/demanda, tecnológicos, entorno económico, ... etc).

No obstante, la metodología de los modelos frontera se ha reorientado a una meta algo más modesta: definir una función que describa simplemente cual es la máxima eficiencia *observada*, las *mejores prácticas* en las relaciones factores/producto en el propio conjunto de  $n$  empresas cuya eficiencia se quiere evaluar, durante un periodo de tiempo determinado. Esto no permite medir la eficiencia absoluta de cada empresa de la muestra, pero si *comparar* la eficiencia relativa de cada una de las empresas del conjunto a estudiar, respecto a las 'mejores' de ellas. Y, por extensión, nos permite medir la eficiencia relativa (comparativa) de un subconjunto de esas empresas (por ejemplo, las públicas) con relación a la de otro subconjunto (privadas).

Determinar una *función frontera* así entendida (llamémosle 'de mejores prácticas') si es algo razonablemente abordable<sup>56</sup>; por ejemplo, y siguiendo con la simplificación de solo

<sup>56</sup> Sobre estas metodologías de evaluación puede verse: Prior, D. / Vergés, J. / Vilardell, I., *La evaluación de la eficiencia en los sectores privado y público*, Instituto de Estudios Fiscales, Madrid, 1993; capítulos 6, 7, 8 y 9; Prior, D. "Los modelos frontera en la evaluación de la productividad", *Esic Market*, oct-dic 1992, pág. 113-131.

dos factores: Tomemos las observaciones de datos ( $q$ ,  $L$ ,  $C$ ) de las  $n$  empresas a evaluar, para un determinado año; previa transformación logarítmica, estimemos los parámetros  $a$ ,  $x_1$ , y  $x_2$  mediante una regresión; y explicitemos los correspondientes términos de error,

$$q_f = a \cdot (L^{x_1} \cdot C^{x_2})_f + \varepsilon_f$$

Unos términos de error,  $\varepsilon_f$ , que –de acuerdo con la suposición más habitual- tenderán a una distribución normal con media 0. Podemos ahora incrementar la constante  $a$  hasta un valor,  $a^*$ , de tal manera que justamente todos los términos de error positivos pasen a ser ahora negativos o nulos. La nueva función así resultante será una *función frontera* definida precisamente según las mejores relaciones producto/factores observadas en la propia muestra de empresas estudiadas:

$$q_f = a^* \cdot (L^{x_1} \cdot C^{x_2})_f - d_f$$

Donde  $d_f$ , es el valor absoluto ( $\geq 0$ ) del nuevo término de error –ahora término de ineficiencia- para la empresa observada  $f$ ; términos que cuantifican la (in)eficiencia comparativa de cada una de las empresas estudiadas, expresada en unidades de output. O bien podemos cuantificarla mediante un índice de (in)eficiencia como el anteriormente descrito: Tomando el volumen de output predicho para la empresa  $f$  por la función *frontera-de-mejores-prácticas*,  $a^* \cdot (L^{x_1} \cdot C^{x_2})_f = q_f^*$ , y determinando  $q_f/q_f^*$ ,  $\leq 1$ . Lógicamente, para todas las empresas (observaciones) obtendremos un valor de este índice inferior a 1 excepto para la (o las) que precisamente ha servido para definir la frontera<sup>57</sup>.

### ... *Estocásticos*

El procedimiento descrito –modificación de la constante, para transformar todos los términos de error a no-positivos:  $\varepsilon_f \rightarrow d_f$  – para así definir la frontera de mejores prácticas (modelo *determinista*) no es el único utilizado en la literatura sobre el tema. De hecho es más frecuente el denominado *estocástico*, consistente en suponer que los términos de error iniciales tienen dos componentes,

$$\varepsilon_f = u_f + v_f,$$

con distribución diferente: uno,  $v_f$  con distribución normal y media 0, y el otro,  $u_f$ , con distribución unilateral (generalmente se supone que truncada en 0 desde abajo), con valores siempre positivos, y que es el que mide el grado de ineficiencia (es decir, el equivalente al anterior  $d_f$ ). Se habla entonces de *función frontera paramétrica estocástica*. Este desglose en dos componentes de los términos de error requiere, claro, efectuar algún supuesto arbitrario al respecto. Aunque arbitrario no significa que no pueda (deba) basarse en alguna hipótesis más o menos razonable<sup>58</sup>.

<sup>57</sup> Un ejemplo de aplicación puede verse en Perelman / Pestieau, (1988) “Technical performance in public enterprises”, *European Economic Review*, 32: 432-441..

<sup>58</sup> Puede verse como ejemplo al respecto: Lynk (1993), “Privatisation, joint production and comparative efficiencies of private and public ownership: The UK water industry case”, *Fiscal Studies*, 14-2: 98-116. O también, Kumbhakar / Hjalmarsson (1998), “Relative performance of public and private ownership under yardstick competition: electricity retail distribution”, *European Economic Review*, 42:97-122.

## Una representación simplificada (con un solo factor)

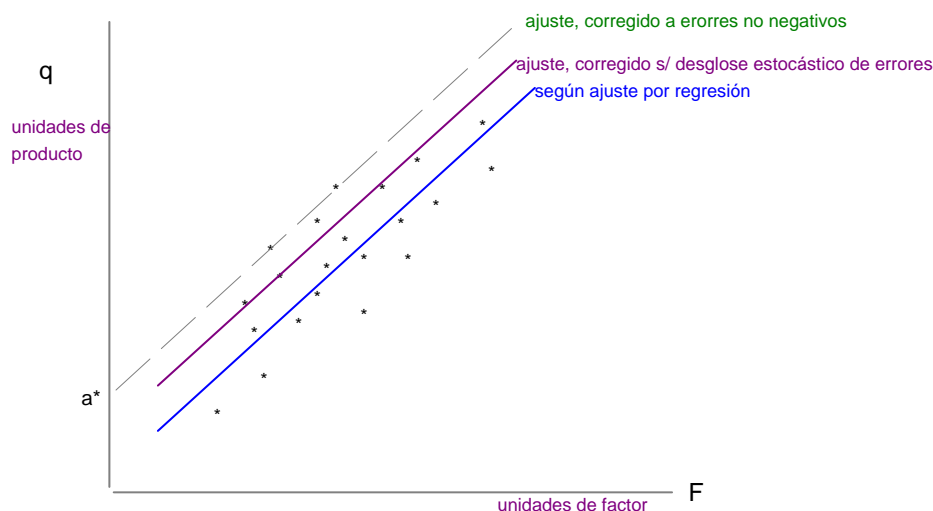


Figura 1

Lo anterior –que es generalizable a más de dos factores- es un ejemplo de lo que se denomina modelos (de función) frontera *paramétricos*, denominados así por basarse en definir una función determinada y -mediante una regresión y metodología complementaria- estimar los parámetros de dicha función -así como calcular los términos de error, o desviaciones de los datos observados para cada empresa respecto de los predichos por la función obtenida (frontera de mejores prácticas). En este contexto metodológico es frecuente que los autores distingan tres componentes en el diferencial de eficiencia (sea tipo  $d_f$  ó  $v_f$ ) que obtienen para cada empresa: (in)eficiencia de escala (en el mismo sentido que se ha comentado antes); (in)eficiencia asignativa<sup>59</sup>; y al resto del diferencial no explicado por estos dos elementos se le reserva entonces la denominación de *ineficiencia técnica*.

Una bien conocida aplicación de la misma idea de función de producción frontera paramétrica es el *índice de Malmquist*. Inicialmente fue propuesto por este estadístico para comparar la productividad relativa entre dos (o más) países; pero es aplicable también a la comparación de la productividad entre dos (o más) empresas. Se basa, para ello, en definir una función de producción paramétrica del tipo descrito, pero en este caso para cada una de las dos empresas a comparar. Y a partir de tales funciones, construir un índice que mida la diferencia de productividad entre ambas. Como podrá deducirse, las exigencias de información y modelización que esta aproximación implica se multiplican respecto de lo que hemos visto hasta aquí. (Sobre tal aplicación del *índice de Malmquist* se remite al Anexo II).

<sup>59</sup> Por (in)eficiencia asignativa en el contexto de la literatura sobre eficiencia comparativa que estamos considerando, se entiende que la relación marginal de sustitución entre dos factores en una empresa (no) sea igual a la relación entre los precios respectivos pagados por dicha empresa. Como ejemplo de aplicación de esta distinción puede verse: Atkinson / Halvorsen (1986), “The relative efficiency of public and private firms in a regulated environment: the case of US electric utilities”, *Journal of Public Economics*, 29: 281-294; o también Lynk (1993), op. cit.; ó: Britos / Tsionas (2004) “A consistent approach to cost efficiency measurement”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 66, 1: 49-69.

### Función de producción frontera, no paramétrica.- AED

Los *modelos no-paramétricos*, por el contrario, no se basan en definir función alguna, sino en un enfoque más bien empírico-geométrico: la frontera se determina precisamente tomando directamente como referencia las observaciones que corresponden a aquellas empresas de la muestra que presentan unos menores coeficientes input-output. Veamos esto con un ejemplo estilizado:

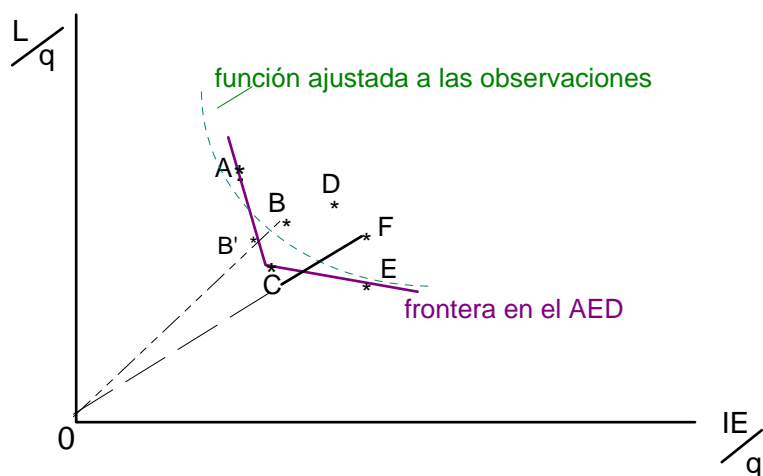
{1 producto; q=unidades}  $\leftrightarrow$  {dos factores: Factor trabajo (L=unidades);  
Factor Inversiones en Equipos (IE) }

Datos obtenidos para la muestra (para un periodo dado):

Empresa	Datos observados			Coeficientes input-output	
	q	L	E	L/q	IE/q
a					
b					
c					
d					
e					
f					

Con los coeficientes input-output obtenidos puede efectuarse una representación gráfica como la siguiente, en la que el punto A proviene de los valores (L/q) y (IE/q) para la empresa 'a', etc.:

Figura 2



Unos resultados como los anteriores indicarían que la empresa 'a' utiliza más trabajo por unidad de producto que la 'c', pero menos inversión en equipos. Y que la empresa 'e' utiliza menos trabajo aún por unidad de producto que la 'c', pero más inversiones en equipos. Si estas fuesen las únicas empresas de la muestra, al no haber ninguna de las tres que presente ambos coeficientes 'peores' (mayores) que los da alguna de las otras dos, esta técnica renuncia a discriminar entre las tres; considera que están utilizando tres opciones tecnológicas diferentes (la 'c', más intensiva en equipos que la 'a'; y la 'e' aún más que la 'c'); y las califica a las tres como del mismo nivel de eficiencia. Pero tenemos más observaciones. Concretamente la empresa 'b' presenta un coeficiente (L/q) menor que el de 'a' pero un coeficiente (IE/q) mayor, y también mayor que el de 'c'. En tal caso la empresa 'b' es calificada menos eficiente que 'a' y que 'c', por el siguiente razonamiento:



Una posible empresa 'x' que utilizase una cierta mezcla de las opciones tecnológicas de 'a' y 'b', con la misma eficiencia respectiva, daría lugar a unos coeficientes  $(L/q)$  y  $(IE/q)$  cuya ubicación gráfica sería precisamente el punto B' en el segmento que une los puntos A y C<sup>60</sup>. Tal posible empresa 'x' sería entonces considerada como igual de eficiente que 'a' y que 'b'. Más concretamente, la línea  $OB', B$  nos indica que la proporción entre ambos coeficientes de la hipotética empresa 'x' sería la misma que la que se observa para la 'b'. O sea, que estaríamos hablando de ambas presentan la misma opción tecnológica: un intermedio de las de 'a' y 'c'. Pero resultaría evidente que 'b' sería menos eficiente que 'x', puesto que 'b' está utilizando más de ambos factores que 'x'.

Por el mismo razonamiento, la empresa 'd' sería calificada con un nivel de eficiencia inferior al definido por la combinación de 'a' y 'c'. Y la empresa 'f' también con un nivel de eficiencia inferior al definido por la combinación de 'c' y 'e'. En resumen, el segmento que une los puntos A y C define una parte de la frontera. Y por el mismo razonamiento el segmento que une los puntos C y E define el resto de la frontera (dada la muestra). Cualquier punto fuera (arriba) de la frontera así definida nos indicará que la empresa correspondiente es menos eficiente que las que están definiendo la frontera.

### Índices de eficiencia DEA

El grado de ineficiencia se puede medir por el exceso relativo de inputs utilizado, que –de acuerdo con el razonamiento anterior– será el mismo para cada uno de ellos. Así, en el caso de la empresa 'b' su exceso de input trabajo por unidad de producto sería  $(L/q) - (L/q)'$ , y por tanto el exceso relativo:  $[(L/q) - (L/q)'] / (L/q)$ . Y es fácil ver en el gráfico que éste exceso relativo sería igual que para los equipos; y al mismo tiempo igual que el cociente entre los segmentos  $(B, B') / (B, O)$ <sup>61</sup>.

Aunque es más utilizada la medida alternativa a esta última consistente en el cociente entre los segmentos  $(B', O) / (B, O)$ , que como vemos en el gráfico resulta un valor inferior a 1. Así, si por ejemplo resultase  $(B, B') / (B, O) = 0,2$ , la medida  $(B', O) / (B, O)$  resultaría igual a 0,8: en ambos casos significaría que la empresa 'b' está utilizando un 20% más de (ambos) factores de lo necesario, a juzgar por lo que indica la frontera de eficiencia construida<sup>62</sup>. Aplicada la medida equivalente a la anterior (segmentos de la recta polar al punto geométrico correspondiente a cada observación) a cada una de las empresas de la muestra, la 'a', la 'c', y la 'e' obtendrán un valor =1 (son las que definen la frontera), mientras que la 'b' la 'd' y la 'f' presentarán valores inferiores a 1.

En resumen, esta técnica equivale a definir la frontera a base de unir geoméricamente entre sí las observaciones 'mejores' de la muestra de empresas. De entre éstas, alguna utilizará más unidades de un determinado factor por unidad de producto que otra/s, pero menos de algún otro factor. Esto se interpreta como que están aplicando opciones

<sup>60</sup>Argumentación geométrica: dicha empresa 'x' podría producir, por ejemplo la mitad de sus unidades según la tecnología, y la eficiencia, de 'a', y la otra mitad según la tecnología y eficiencia de 'c'. En tal caso sus coeficientes input-output,  $(L/q)$  y  $(IE/q)$  serán exactamente la media aritmética de los respectivos coeficientes de 'a' y 'c'; y la representación de estos en el gráfico será exactamente el punto medio del segmento AC. En general, cada uno de los puntos de dicho segmento se corresponde con los coeficientes input/output de hipotéticas empresas que utilizasen cualquier otra combinación lineal de las opciones tecnológicas de 'a' y 'c', con la misma eficiencia de una y otra respectivamente. En consecuencia, representan posibles situaciones con un nivel de eficiencia 'no inferior' a la de 'a' y 'c'. Concretamente el punto B' se corresponde con una combinación de ambas tecnologías (proporción entre ambos coeficientes) igual a la que presenta la empresa 'b'.

<sup>61</sup> Por aplicación del teorema de Tales.

<sup>62</sup> La otra alternativa para medir la eficiencia sería en términos del volumen de output que debería haber obtenido la empresa 'b' si hubiese sido igual de eficiente que las que definen su tramo de frontera, en comparación al que realmente ha obtenido. En el ejemplo, tal medida vendría dada por la inversa de  $(B', O) / (B, O)$ , que sería igual a 1,25: Debería haber obtenido un 25 % más de producto.



tecnológicas distintas; y se opta por asignarles el mismo nivel de eficiencia (=1). El resto de observaciones (empresas) no alcanzan la frontera de eficiencia resultante, y obtienen puntuaciones inferiores a 1. Esta es la aproximación en la que se basa el ‘análisis envolvente de datos’, AED (data envelopment analysis, DEA). Una ventaja metodológica decisiva de éste es que permite generalizar el planteamiento descrito a más de un producto y a más de 2 factores, mediante la utilización de un algoritmo basado en la programación lineal <sup>63</sup>.

Como en todo modelo basado en presuponer una función de producción, la condición de homogeneidad en cuanto al tipo de actividad productiva de las empresas de la muestra es crucial: producir el mismo tipo de output con los mismos tipos de inputs. El no cumplimiento de esto implica forzar más allá de su validez el concepto de función frontera; y de forma más rotunda en los modelos no-paramétricos. Esto lo enfatiza el modelo concreto DEA al hablar, más que de ‘empresas’, de ‘*unidades de decisión*’ (decision making units, DMU). Un buen ejemplo de conjunto de DMU, en cuanto a la garantía de que se da esa necesaria condición de homogeneidad, serían las diferentes oficinas de una entidad bancaria; o las diferentes tiendas de una cadena.

#### *Comparación AED versus Función frontera paramétrica*

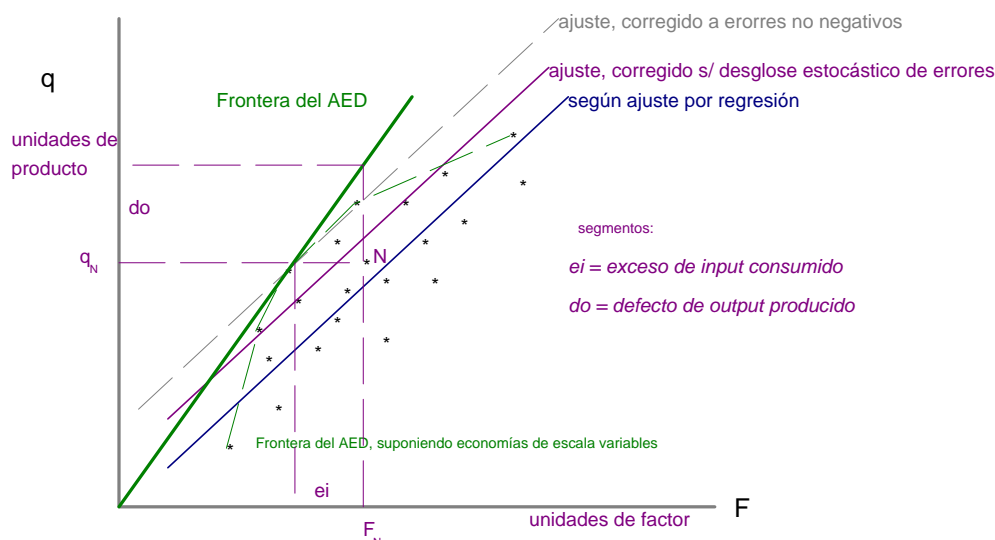
En la figura 3 se efectúa una comparación gráfica con la metodología de ‘función frontera paramétrica’ para un caso muy simplificado, de un solo factor. La línea que parte del origen es el equivalente a la función frontera AED en este caso tan simplificado, ahora en el espacio  $q=f(F)$ . Está definida por la mejor observación: la que presenta el mejor (menor) coeficiente input/output; y hace abstracción de la posible existencia de economías de escala. La línea poligonal representa la frontera AED, suponiendo que se dan en la muestra economías de escala. Las otras tres líneas diagonales tiene el mismo significado que en la figura 1.

---

<sup>63</sup> Una mas completa exposición sobre el AED puede verse en [Evaluación de la eficiencia mediante el análisis envolvente de datos](#), de Vicente Coll y Olga M<sup>a</sup> Blasco – *Eumed.net*. Como ejemplo de aplicaciones concretas a nuestro tema puede verse: “An Empirical Analysis of State and Private Sector Provision of Water Services in Africa”, Colin Kirkpatrick, David Parker and Yin-Fang Zhang - *Centre on Regulation and Competition, Institute for Development Policy and Management, University of Manchester*; publicado en *The World Bank Economic Review*, 2006, 20-1, p. 143-163; y Efficiency evaluation of the estate owned electric utilities in India”, Thakur, T., Deshmukh, S. G. i Kaushik, S. C. , *Energy Policy*, 34 (2006) pp. 2788-2804.

Una útil exposición gráfica de la metodología del AED puede verse en Prior, D. y Solá, M. “Planificación estratégica pública y eficiencia hospitalaria”, *Hacienda Pública Española*, n° 136, vol. 1/1996, pág. 93-108.

Figura 3



En tal situación –y tomado como referencia la recta-frontera sin economías de escala– el indicador de eficiencia AED sería inferior a 1 para todas las empresas (observaciones) menos la que ha servido para definir dicha frontera lineal. Así, para la empresa N, por ejemplo, su índice sería  $(F_N - e_i)/F_N$ , (orientación al input); o bien  $q_N/(q_N + d_o)$ , (orientación al output)<sup>64</sup>. Por el contrario, con la aproximación frontera paramétrica estocástica (línea ajustada diagonal central) la empresa N aparecería con una ineficiencia relativa mucho menor (geoméricamente está bastante próxima a esa frontera).

Hay, sin embargo, una diferencia más de fondo entre ambas aproximaciones: Una función de producción paramétrica [como la antes referida  $q_f = a \cdot (L^{x_1} \cdot C^{x_2} \dots)_f + \varepsilon_f$ ] no obliga explícitamente pero presupone que la tecnología es substancialmente la misma para todas las empresas estudiadas; y que, por tanto, hay un cierto valor ideal u óptimo para cada uno de los diferentes coeficientes input-output. (Valores que están relacionados con los coeficientes que la regresión nos dé para una función tipo la anterior). Sin embargo, en el AED como puede verse con el ejemplo simplificado de la figura 2, se presupone como normal que cada ‘unidad de decisión’ puede estar utilizando una tecnología diferente, en el sentido de utilizar en una cierta mayor proporción un factor (por ejemplo, equipos) que otro (por ejemplo, personal).

### Ventajas y limitaciones

En cualquier caso, el atractivo principal de la técnica AED es que, utilizando el instrumento matemático de la programación lineal, es generalizable no solo a más de dos factores sino también a más de un producto<sup>65</sup>. En contrapartida, obliga a definir la frontera de eficiencia, como hemos visto, de forma poco exigente, pues solo exige para poder calificar a una empresa/unidad de decisión (observación) como de máxima eficiencia

<sup>64</sup> Puede verse que con esta frontera sin consideraciones sobre posibles economías de escala ambas orientaciones dan la misma medida de ineficiencia.

<sup>65</sup> Las opciones en cuanto a cómo definir los outputs y los inputs (por ejemplo, la posibilidad de introducir un indicador de calidad como un output) y el desglose en componentes de los diferenciales de eficiencia (eficiencia de escala, eficiencia técnica, eficiencia asignativa) han llevado a un desarrollo notable de la literatura sobre DEA. A título de ejemplo puede verse: Balaguer-Coll, Maria Teresa; Prior, Diego; y Tortosa-Ausina, Emili, 2007. "On the determinants of local government performance: A two-stage nonparametric approach," *European Economic Review*, Elsevier, vol. 51(2), pages 425-451.

(índice=1) que no pueda afirmarse en base a sus diferentes coeficientes input/output<sup>66</sup> observados, que hay otra empresa/UD (o combinación de ellas) que los tenga todos ellos inferiores (mejores) o bien uno (o más) mejor y los demás iguales.

Es importante destacar que, como puede verse de lo expuesto hasta aquí, esta metodología trabaja implícitamente con indicadores de productividad parcial, ya que los coeficientes input/output son las inversas de las respectivas productividades parciales para cada input (con respecto a cada output)<sup>67</sup>. Y, que el criterio para definir a una de las UD del estudio como ineficiente es, como habrá podido verse, muy restrictivo (de ‘baja resolución’ utilizando un término cartográfico). Un criterio de tipo paretiano podríamos decir: si al hacer la comparación entre dos observaciones de la frontera,  $UD_x$  y  $UD_y$ , un indicador de productividad parcial es superior y otro inferior (por ejemplo, mayor productividad del trabajo y menor productividad de la inversión en equipos) esta metodología no permite discriminar qué es mejor que qué; no entra a comparar la eficiencia relativa de ambas empresas (observaciones), sino que considera que están aplicando ‘tecnologías diferentes’, y les asigna el mismo índice de eficiencia (=1).

El problema aquí es que puede ocurrir perfectamente que una de las observaciones se corresponda con un coste medio notablemente inferior al de la otra<sup>68</sup>; (o a una productividad global superior). En términos más generales: diferentes observaciones que están en la frontera AED tendrán normalmente unos costes medios –o unos IPG- diferentes; o sea, que realmente corresponderán a niveles de eficiencia productiva (global) –o, si se prefiere, niveles de competitividad- diferentes. Y, paralelamente, una observación catalogada de ‘ineficiente’ en el AED (índice inferior a 1) puede ocurrir perfectamente que se corresponda con un coste medio inferior (o a un IPG superior) que el de las observaciones frontera con las que se compara.

Junto a lo anterior conviene recordar que lo habitual para el investigador es no disponer de información completa sobre unidades de outputs y de inputs, por lo que al aplicar esta metodología se recurre también a aproximaciones y a variables proxy. Según sean las opciones al respecto (especificación/ cuantificación de outputs e inputs) los resultados del AED (índices obtenidos) pueden ser notablemente distintos en cuanto a calificar a tal o cual empresa/UD de más/menos eficiente que otra/s<sup>69</sup>.

#### Análisis (o regresión) con Datos de Panel (RDP)

Con una base de datos como la de la tabla de la página 47 (varias empresas tipo A, varias Empresas tipo B,..., varios indicadores, varios años) la técnica de la *comparación de medias/ análisis de la varianza* utiliza los cuadros de datos de cada año (valores de los respectivos indicadores o variables, para cada empresa) conjuntamente, conformando un paquete de información único, con los datos de todos los años (*pool* de datos). Y lo mismo ocurre cuando se aplica una función polinómica o una función multiplicativa-translog, o un modelo frontera: Al trabajar con el pool de datos, el número de observaciones tenidas en cuenta puede ser relativamente elevado (tantas veces como años incluyamos en nuestra

---

<sup>66</sup> Si el número de outputs es, por ejemplo, 3 y el número de inputs 4, el modelo trabajará con 12 coeficientes input/output.

<sup>67</sup> Ver nota anterior.

<sup>68</sup> Coste medio de cada empresa, calculados a los mismos precios de los factores.

<sup>69</sup> Un ejemplo de la alta sensibilidad de los resultados (tabla de índices asignados a cada empresa de la muestra) a la especificación de las variables puede verse en Kerstens (1996), “Technical efficiency measurement and explanation of French urban transit companies”, *Transportation Research A*, 30-6: 431-452.

base de datos), con lo que, desde luego, las conclusiones pueden ser estadísticamente más robustas que si se utilizase datos de un solo año.

Ahora bien, la posible tendencia en el tiempo para un subconjunto de empresas y para el otro –o el posible papel de la dinámica temporal en la explicación de las diferencias entre los dos o más grupos de empresas- no se explota propiamente con las técnicas anteriores<sup>70</sup>. Cosa que si es posible con el *análisis (o regresión) con datos de panel*.

Esta técnica consiste en utilizar un modelo de regresiones que en nuestro caso nos permitiría obtener diferencias de eficiencia entre las  $n$  empresas estudiadas, independientemente de las diferencias que puedan ser atribuibles a la variable tiempo. Se trata en definitiva de un modelo de análisis compuesto: combina *cross-section* con análisis dinámico; es decir, análisis horizontal con análisis longitudinal. La ecuación básica cuyos coeficientes van a ser estimados se suele formular en los siguientes términos<sup>71</sup> (siguiendo con el ejemplo de variables de la página 49):

$$IND_{it} = a_i + b_1 \cdot Q_{it} + b_2 \cdot W_{it} + b_3 \cdot K_{it} + e_{it}$$

Donde:

IND = Indicador de Eficiencia (variable dependiente, o a explicar)

$i$  = 'grupo'<sup>72</sup> o entidad observada (empresas, en nuestro caso:  $i = \text{empresa } 1, 2, \dots, n$ )

$t$  = año

$Q$  = Volumen total de output

$W$  = Salario medio; variable explicativa (variable independiente)

$K$  = Precio medio de coste del combustible/energía; variable explicativa.

$a_i$  = constante específica para cada entidad/empresa ('intercepts'), a obtener de la regresión.

$b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ , coeficientes a obtener de la regresión.

$e_{it}$  = términos de error, para cada observación.

Existen diferentes modelos de regresión con datos de panel.

- modelos de <i>efectos fijos</i> →	<ul style="list-style-type: none"> <li>- constantes (<i>intercepts</i>) diferentes para cada entidad o empresa (es el caso concreto del modelo del ejemplo anterior)</li> <li>- constantes diferentes para cada año.</li> <li>- constantes diferentes para cada entidad, más constantes diferentes para cada año.</li> </ul>
- modelos de <i>efectos aleatorios</i> (o modelos de <i>componentes de error</i> ) →	<ul style="list-style-type: none"> <li>- las constantes para cada entidad, <math>a_i</math> vienen aquí definidas como un valor aleatorio, con media <math>a_1</math>: <math>a_i = a_1 + v_i</math>. Siendo <math>v_i</math> el 'error específico' (o diferencia) de la entidad '<math>i</math>'. (= <i>one-way random effect model</i>)</li> <li>- (además de lo anterior) el término de error, <math>e_{it}</math>, es</li> </ul>

<sup>70</sup> En un modelo de regresión 'normal' pueden, desde luego, incluirse variables *dummy* para cada uno de los años, pero los resultados pueden ser poco útiles. (Sobre esta posibilidad puede verse, como ejemplo, Goldeng, E., Grunfeld, L. A. and Benito, G. R. (2008) "The performance differential between private and state owned enterprises: the roles of ownership, management and market structure", *Journal of Management Studies*, 45(7), 1244-1273.

<sup>71</sup> Sobre esta técnica de análisis/regresión con datos de panel se recomienda el texto "A Primer for Panel Data Analysis" que puede obtenerse en [http://www.nyu.edu/its/pubs/connect/fall03/yaffee\\_primer.html](http://www.nyu.edu/its/pubs/connect/fall03/yaffee_primer.html). También el esquema relativo al programa Stata que puede verse en <http://www.ats.ucla.edu/stat/stata/library>, en el apartado Panel Data Analysis.

<sup>72</sup> En la terminología de la RDP, 'grupo' no se refiere propiamente a un grupo de individuos (o de empresas), sino a cada entidad para la que se entran datos en el estudio. Cada entidad puede ser un individuo (o una empresa), o un territorio, o un colectivo demográfico, etc.. También un conjunto de empresas tipo 'A', tipo 'B', ... etc., pero en este caso los datos que entran en el modelo de RDP son al nivel de cada 'grupo' (A, B, ..), no valores individuales de cada empresa; es decir, entrarían valores medios o agregados de los entes o empresas integrantes de cada 'grupo'.

	definido como la suma de: una componente que varia según el año, $e_t$ , más el resto, que es el término de error para cada observación, $\eta_{it}$ ; $e_{it} = e_t + \eta_{it}$ ( <i>two-way random effects model</i> )
--	---

En este último caso (*two-way random effects model*) tenemos tres términos de error o diferencias:  $v_i$ ,  $e_t$ ,  $\eta_{it}$ . O, visto de otra manera, la ecuación básica es en tal opción metodológica:

$$IND_{it} = a_1 + b_1 \cdot Q_{it} + b_2 \cdot W_{it} + b_3 \cdot K_{it} + v_i + e_t + \eta_{it}$$

Donde los valores  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $v_i$  y  $e_t$ , vendrán dados por la regresión, y los valores  $\eta_{it}$  se deducen por diferencia con los valores reales u observados (datos) para  $IND_{it}$ . Como puede observarse, la diferencia de eficiencia entre una empresa y otra (independientemente de si son ‘públicas’ o ‘privadas’, por ejemplo) viene dado en los modelos de la RDP por la diferencia entre las respectivas constantes obtenidas para cada empresa,  $a_i$  (fixed effects models), o bien por la diferencia entre los términos de error específicos de cada empresa,  $v_i$  (random effects models). Si la muestra de empresas incluía, por ejemplo, públicas, privadas y mixtas, agrupar los resultados individuales anteriores para estos tres subconjuntos permitirá obtener conclusiones sobre el diferencial medio de eficiencia entre los tres grupos <sup>73</sup>.

<sup>73</sup> Una aplicación concreta de este tipo puede verse en el artículo “Privatisation around the World: evidence from panel data”, de Bortolotti, B, Fantini, M. y Siniscalco, D., en *Journal of Public Economics*, 88 (2003) pág. 305-332.

8

## SOBRE LA *FIABILIDAD* Y LA *RELEVANCIA* DE LOS RESULTADOS CUANTITATIVOS

---

### *Grado de confianza / nivel de error*

El grado de confianza de las conclusiones de una investigación cuantitativa como las anteriores depende –aparte de la fiabilidad de los datos de partida utilizados- de cuan correcta sea la interpretación que los autores hagan, 1) del significado de los indicadores de eficiencia utilizados, y 2) de los valores obtenidos para los coeficientes de las variables explicativas. Y la fiabilidad de que estos últimos representan una buena aproximación a la realidad dependerá de, o puede medirse con, los valores de los test estadísticos asociados a tales resultados (t-Student, or p-value, por ejemplo). Pero hay algo más respecto a la fiabilidad de las conclusiones derivadas de esos resultados cuantitativos, que suele quedar relegado u olvidado:

- Utilizar valores agregados (‘paquetes’ de factores, ‘paquetes’ de productos) como variables para llevar a cabo evaluaciones de eficiencia (una práctica, como se ha venido señalando, muy frecuente -debido a que raramente los investigadores han dispuesto de los datos necesarios al nivel de cada producto y de cada factor, sino solo de determinados agregados de estos), introduce un cierto grado de error en los resultados.
- Estimar un determinado índice de precios de la empresa a lo largo de un periodo, tomando en su lugar –es decir, como estimación- un índice de precios externo (práctica también bastante frecuente en la literatura sobre el tema), introduce otro elemento de error.
- Tomar una variable ‘proxy’, por no tener información sobre determinada variable exigida por el modelo o metodología aplicada, comporta otro grado de error; ... etc.

Y estos errores –además de que pueden ser relevantes- son acumulativos. Y lo que hace el problema más grave es que el nivel probable del error conjunto final no es cuantificable: No existe aquí la posibilidad de recurrir al equivalente a test estadísticos.

Pero aun hay una segunda parte del problema: que en la literatura sobre estos temas se observa que los investigadores tienden, en general, a ignorar sencillamente la propia existencia de esos tipos de error al interpretar sus resultados, al tiempo que a ser muy exigentes y exhaustivos en cuanto a ‘tests’ estadísticos relativos a los resultados numéricos finales obtenidos. Resulta así entre paradójico y absurdo que los autores de un artículo dediquen suma atención a verificar si los valores de los test estadísticos utilizados están asociados a niveles de error del 0,5 o del 2 % - y/o a explicar que -para prevenir posibles problemas de colinealidad o de heteroskadicidad- han optado por aplicar tal o cual variante refinada de los test estándar, cuando en el proceso de elaboración de esos resultados han recurrido a agregaciones, estimaciones y variables proxy: Cualquiera de estas prácticas implica niveles de error que fácilmente pueden ser tan importantes (10, 15, 30%) que en el

contexto estricto del análisis de los resultados de una regresión harían descartar un coeficiente por no-estadísticamente significativo, no fiable.

### *Relevancia de un resultado*

Supongamos que no existe el problema anterior (no se han utilizado agregados ni estimaciones ni variables Proxy), y que el valor encontrado para el coeficiente de una variable explicativa es estadísticamente significativo, con un alto grado de fiabilidad. El signo de dicho coeficiente nos indica el sentido de la relación con la variable a explicar. Pero si tal relación es *significativa o relevante* (cosa distinta de la *fiabilidad* estadística del coeficiente) dependerá del valor absoluto de dicho coeficiente, y de en qué unidades venga expresada su variable: si, por ejemplo, su valor es proporcionalmente muy bajo, y al aplicarlo al orden de magnitud (valor medio) de la variable explicativa el resultado es insignificante, quiere decir que tal variable explicativa influye, ciertamente, en la variable a explicar, pero de forma insignificante, inapreciable; por lo que, en definitiva, no es una variable explicativa relevante. Es decir, que la influencia de esa variable sobre la variable dependiente es in-significante.

## Anexo I

## Sobre Indicadores de Productividad Parcial

**1) Demostración de la relación entre el indicador de productividad global,  $\Pi^x$ , y los indicadores de productividad parcial de cada factor,  $\Pi_j^x$** 

Tomando los correspondientes índices de variación del periodo '0' al periodo 'x':

$$\pi = \frac{\Pi^x}{\Pi^0}; \quad \pi_j = \frac{\Pi_j^x}{\Pi_j^0}; \quad \forall j \quad \text{puede escribirse:}$$

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\sum_j F^0 \cdot K^0 / \sum_i q^0 \cdot P^0}{\sum_j F^x \cdot K^0 / \sum_i q^x \cdot P^0} \equiv \frac{F_1^0 \cdot K_1^0 / \sum_i q^0 \cdot P^0}{\sum_j F^x \cdot K_1^0 / \sum_i q^x \cdot P^0} + \frac{F_2^0 \cdot K_2^0 / \sum_i q^0 \cdot P^0}{\sum_j F^x \cdot K_2^0 / \sum_i q^x \cdot P^0} + \dots \\ &\equiv \frac{F_1^0 \cdot K_1^0 / \sum_i q^0 \cdot P^0}{F_1^x \cdot K_1^0 / \sum_i q^x \cdot P^0} \cdot \frac{F_1^x \cdot K_1^0}{\sum_j F^x \cdot K^0} + \frac{F_2^0 \cdot K_2^0 / \sum_i q^0 \cdot P^0}{F_2^x \cdot K_2^0 / \sum_i q^x \cdot P^0} \cdot \frac{F_2^x \cdot K_2^0}{\sum_j F^x \cdot K^0} + \dots \end{aligned}$$

El segundo factor de cada sumando mide la importancia relativa de cada factor en el coste total del año x, si bien calculados estos costes a precios del año base. Los designaremos como  $(a_j)^{x,0}$  ( $\sum (a_j)^{x,0} = 1$ ). Por tanto [16b] puede simplificarse así:

$$\pi^x \equiv \frac{\sum_i q^x \cdot P^0 / F_1^x}{\sum_i q^0 \cdot P^0 / F_1^0} \cdot a_1^{x,0} + \frac{\sum_i q^x \cdot P^0 / F_2^x}{\sum_i q^0 \cdot P^0 / F_2^0} \cdot a_2^{x,0} + \dots \equiv \pi^x \cdot a_1^{x,0} + \pi^x \cdot a_2^{x,0} + \dots \equiv \sum_j \pi^x \cdot a_j^{x,0}$$

con lo que queda demostrado que el índice de variación de la productividad global es una media ponderada de los índices de variación de las diferentes productividades parciales; siendo los pesos de la ponderación el peso relativo de cada factor en el coste total del año 'x' en estudio, calculado este coste total a precios constantes (los mismos que los del año con el que se compara).

Esta propiedad se da también respecto a las tasas nominales de variación:  $t' = \pi - 1$ . Veamos: Dado que  $\pi = \sum \pi_j \cdot a_j$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned} \pi^x - 1 &= \sum (\pi_j)^x \cdot (a_j)^{x,0} - 1 \equiv \sum (\pi_j)^x \cdot (a_j)^{x,0} - \sum (a_j)^{x,0} \equiv \sum (\pi_j)^x \cdot (a_j)^{x,0} - \sum (a_j)^{x,0} \equiv \sum (\pi_j)^x - 1 \cdot \sum (a_j)^{x,0} \\ &\equiv \sum (t'_j)^x \cdot (a_j)^{x,0} \end{aligned}$$

Es decir, que la tasa de variación nominal de la productividad global es una media ponderada de las tasas de variación de las productividades parciales de cada factor, siendo los pesos de la ponderación los mismos que anteriormente.

$$(t')^x = \sum (t'_j)^x \cdot (a_j)^{x,0} \quad [14]$$





## 2) Discusión sobre la Productividad Parcial Aparente de los bienes de Capital (costes de amortizaciones), y Nivel de Ocupación

*¿Es realmente posible calcular IPP para el factor ‘capital’ (o para el factor ‘servicios de otras empresas’; o para ‘resto de factores’)?*

Los costes correspondientes a los factores tipo ‘Capital’ -entendiendo por ‘capital’ los equipos, maquinas, instalaciones, edificios, etc. ; es decir, el ‘Inmovilizado’ que utiliza como factor productivo una empresa- son básicamente los *costes de amortizaciones* más los correspondientes costes de reparaciones y mantenimiento. Se trata de un factor fijo o semi-fijo, por lo que al hablar –digamos, teóricamente- de su productividad (IPPA) conviene tener en cuenta que tiene dos componentes: *nivel de ocupación*, y *productividad técnica o productividad en sentido estricto*. Pero, como se ha apuntado en el texto, el cálculo de la productividad parcial del ‘Capital’ tropieza con escollos importantes.

Hagamos abstracción, para simplificar, de los costes de mantenimiento y de reparaciones, y centrémonos, así, en los costes de amortización como únicos costes del factor ‘capital’. El correspondiente índice de variación de la productividad parcial será en este caso:

$$\pi_c = \frac{\frac{\sum_i q \cdot P^o}{(F \cdot K^o)_c}}{\frac{\sum_i q^o \cdot P^o}{(F^o \cdot K^o)_c}} \equiv \frac{\frac{\text{Ingresos}^{\text{año } x}, \text{ a precios constantes}}{\text{Costes por Amortizaciones}^{\text{año } x}, \text{ a precios constantes}}}{\frac{\text{Ingresos}^{\text{año base}} / \text{Costes por amortizaciones}^{\text{año base}}}}$$

Este índice de variación del periodo base al periodo ‘x’, dependerá por una parte del índice de variación de la *productividad técnica* (por hora trabajada ) de las máquinas o equipos ( $\pi_c^*$ ), y, por otra, de cómo haya variado su *nivel de utilización (ocupación)*<sup>74</sup>:

Índice de variación en el *Nivel de Ocupación* de los equipos (inmovilizado) =

$$\phi_c = \frac{\text{Nivel de ocupacion}^{\text{periodo 'x'}}}{\text{Nivel de ocupacion}^{\text{periodo base}}} = \frac{\left(\frac{HF}{HD}\right)^{\text{periodo 'x'}}}{\left(\frac{HF}{HD}\right)^{\text{periodo base}}}$$

HF = Horas efectivas de funcionamiento de los equipos

HD = Horas disponibles o técnicamente posibles ; HF ≤ HD

Si no ha habido variación ni en los equipos físicamente utilizados ni en la forma de utilizarlos, es decir, si no ha habido variación en la productividad técnica de estos equipos, el índice de variación que aparezca para el factor capital solo puede ser debido al cambio en el nivel de ocupación:  $\pi_c = \phi_c$  . Y, viceversa: si los datos sobre utilización mostraran que no ha habido variación respecto al nivel de ocupación de los equipos, entonces el índice de variación que aparezca para el factor capital solo puede ser debido al cambio en su correspondiente productividad técnica:  $\pi_c = \pi_c^*$  . Y es fácil demostrar que, en general<sup>75</sup>:

$$\pi_c^* \cdot \phi_c = \pi_c \quad [15]$$

<sup>74</sup> Ambos concepto pueden aplicarse también al factor ‘trabajo’, o a cualquier otro si su comportamiento es de coste fijo o semi-fijo

<sup>75</sup>  $\pi = \frac{\Sigma q \cdot P^o / F \cdot K^o}{\Sigma q^o \cdot P^o / F^o \cdot K^o} \equiv \frac{\Sigma q \cdot P^o / F}{\Sigma q^o \cdot P^o / F^o} \equiv \frac{\Sigma q \cdot P^o / F \cdot H \cdot H^o}{\Sigma q^o \cdot P^o / F^o \cdot H \cdot H^o} \equiv \frac{\Sigma q \cdot P^o / H}{\Sigma q^o \cdot P^o / H^o} \cdot \frac{F^o \cdot H}{F \cdot H^o} \equiv \pi^* \cdot \frac{\theta}{\theta^o} \equiv \pi^* \cdot \Phi$

Este modelo explicativo resulta atractivo pensando en aplicaciones concretas (porque, además, conociendo dos de las variables la tercera viene dada según [17]). Pero el verdadero problema, para poder determinar  $\pi_c$ , o bien  $\pi_c^*$ , estriba en: qué es lo que debemos entender en nuestro análisis por  $(F \cdot K^0)_c$ , 'Costes de Amortización (o de Capital), a precios constantes'. Para determinar tal importe necesitaríamos conocer en cuanto han variado los 'precios de esas amortizaciones'; o bien, conocer las correspondientes unidades (F) y precios ( $K^0$ ). Pero, ¿Cuáles son, hablando de costes de amortización, las *unidades* y cuáles los *precios*? Porque -a diferencia de los costes de personal, o de energía- se trata de un coste en el que las cantidades de factor vienen aparentemente expresadas en unidades monetarias, de tal suerte que 'cantidad' y 'coste del factor' aparecen a primera vista como la misma cosa.

De hecho no se trata de un problema que nos lo encontremos ahora al abordar específicamente la cuestión de la productividad parcial del 'capital' o 'inmovilizado'. El problema de qué se entiende por 'costes de amortización a precios constantes' lo tenemos en realidad (como en cualquier modelo de medición y análisis de la productividad) desde el principio, pero hasta ahora lo habíamos obviado. En efecto: Para determinar los 'costes (totales) a precios constantes' para el año 'x',  $(\sum F^x \cdot K^0)$ , y así llegar al índice de productividad global, es necesario recalcular los diferentes tipos de costes del periodo 'x' en estudio; los de amortizaciones entre ellos, por supuesto. Veamos pues el problema de 'los precios, (o la variación de éstos)' hablando de costes de amortización:

Para un factor que se compra periódicamente - como el Trabajo, las Materias Primas, las piezas o componentes adquiridos a otras empresas, la electricidad, los servicios de transporte, etc.- el precio para cada periodo (o bien la variación del precio; con esto nos es suficiente), es algo objetivamente determinable. Pero tal circunstancia no se da en principio respecto a los costes por amortizaciones del inmovilizado. O se da de forma harto diferente.

Supongamos, por ejemplo, que el único coste de amortización corresponde a una máquina que costó 48.000.000 pts. , la cual la empresa está amortizando de forma lineal, sobre la estimación de que su duración útil será de 8 años y que al final de los mismos su valor residual será nulo. Consecuentemente los costes de amortización que aparecen en la Cuenta de Resultados del último año son:  $48.000.000 \times 12,5/100 = 6.000.000$  . Dado este ejemplo, obsérvese que el coeficiente 12,5/100 no tiene ninguna connotación de 'precio del factor', sino de 'cantidad' ; y, más concretamente, de 'fracción de la cantidad total del factor, consumida durante ese año'. O, visto de otro modo: supongamos que la empresa revisase a la baja su estimación sobre la duración de la máquina , y al año siguiente amortizase a razón de un 20/100 ; no podríamos hablar de un incremento de precios, sino de un incremento de 'cantidad' del factor ; (de hecho lo que habría puesto de manifiesto es que las cantidades contabilizadas en los periodos anteriores estaban 'mal contadas': se habían subestimado)

Dado un equipo comprado en un periodo determinado, los costes por amortización responden en definitiva a la estimación del consumo fraccionado de ese factor a lo largo de varios periodos. El 'precio' de compra, sea lo que sea lo que entendamos por tal, se mantendrá pues constante para todos estos periodos. Pero lo que encontramos usualmente en las cuentas de resultados de las empresas no es tan simple: Los costes de amortización corresponden usualmente a la suma de los costes de amortización contabilizados para los diferentes inmovilizados utilizados, cada uno de ellos comprado, probablemente, en un periodo pasado distinto, y cada uno con una vida útil distinta. Y, además, las nuevas compras de inmovilizado que puedan haber en el periodo en estudio pueden tener tanto (1) un carácter de pura *renovación* de equipos o máquinas que han agotado ya su vida útil, como (2) de un *incremento* en el uso (y por lo tanto en el consumo) de bienes de 'capital' en los procesos productivos; es decir, de un incremento en el grado de capitalización, con el correspondiente decremento relativo en el consumo de los otros factores (normalmente del factor trabajo).

Así, sustituir una prensa estampadora ya obsoleta, al final de su vida útil, por otra más cara pero más automatizada y/o de más capacidad, implica simultáneamente ambas cosas: una *renovación*, más un *incremento* en el volumen del factor (un incremento en el grado de mecanización del proceso).

Probablemente la substitución implicará una tasa de coste (Amortización/Ventas) superior que la correspondiente del periodo anterior, pero no será fácil saber en qué medida, en tanto que *renovación*, hay un incremento de precio, y en qué medida hay un *incremento* relativo en la *cantidad consumida* de factor y, por lo tanto, una disminución de la productividad aparente de este inmovilizado etiquetado como 'prensa estampadora'.

Solo en el caso concreto de que no hayan habido nuevas inversiones en el periodo en estudio respecto al periodo base se nos simplifica el problema, ya que entonces no habrá variación de precios alguna y todo posible cambio en la relación Costes de Amortización/Ingresos será atribuible a la variable productividad (dado que en tal caso  $F \cdot K \equiv F \cdot K^0$ ). Pero se trata éste de un supuesto poco realista (a menos que no estemos considerando periodos de cálculo pequeños; de un mes con el siguiente, por ejemplo). De hecho lo más usual es que cada año una empresa lleve a cabo un determinado número de nuevas inversiones en inmovilizado –en parte de renovación y en parte de ampliación– junto a ciertas des-inversiones. Esquemáticamente, nos podemos encontrar con las siguientes posibilidades:

- 1) *No hay inversiones* durante el periodo en estudio (en comparación con el periodo base) .-  $\implies$  el cambio en los precios de los bienes de equipo utilizados es por lo tanto nulo. La productividad técnica o por hora trabajada tenderá además a ser constante (índice de variación  $\pi_c^* \approx 1$ ) o bien algo decreciente si es que se acusa el posible envejecimiento de los equipos. La productividad bruta (cuyo cambio viene reflejado por el índice  $\pi_c$ ) variará solo si es que cambia el nivel de ocupación de esos equipos,  $\phi_c$ , ya que  $\pi_c = \pi_c^* \cdot \phi_c$ .
- 2) Hay inversiones durante el periodo en estudio, pero consisten en una *pura renovación* (compra de un camión nuevo de las mismas características que el retirado por obsoleto) .-  $\implies$  habrá un determinado incremento de precio; y la productividad técnica (por hora trabajada) tenderá a ser la misma. Aunque si hay cambios en el nivel de ocupación, la productividad bruta cambiará en el mismo sentido y medida.
- 3) Hay una inversión en el periodo en estudio, consistente en un *una ampliación pura*, en el sentido de que no se trata de una máquina que venga a substituir alguna de las que se vienen utilizando sino que representa un cambio cualitativo en el proceso productivo, aumentando el grado de mecanización/automatización.-  $\implies$  Hay un cambio cualitativo del factor 'capital' en sí: ese factor concreto no se compraba/consumía antes; no ha lugar, por tanto, a hablar de cambio de precios. En cualquier caso, tal ampliación pura incidirá negativamente en la productividad aparente del conjunto de los bienes de capital.
- 4) Hay inversiones en el periodo en estudio, las cuales *son al mismo tiempo renovación y ampliación* (el ejemplo de la prensa estampadora anterior; o la substitución de una máquina de escribir por un equipo compuesto de ordenador, programas, impresora a color y módem para conexión a Internet) .
- 5) Hay inversiones en el periodo en estudio, tanto del tipo 2), 3) como 4) anteriores.

Admitamos que la situación más corriente que nos encontremos al analizar la productividad de una empresa a partir de sus cuentas será del tipo 4) o 5). O que, dados los datos que nos facilita su memoria anual, no podamos suponer lo contrario. Entonces el problema, como se ve, estribaría en decidir qué variación de precios debemos estimar para los costes de amortizaciones; tanto a los efectos del cálculo del denominador de IPG como, eventualmente, de un cálculo de IPPA para el factor 'capital-equipos'.

No se trata de un problema simple ni lo hemos resuelto aquí (solo ha quedado planteado). En cualquier caso sí puede decirse que no es una solución aceptable la consistente en: tomar como 'unidades' del factor 'capital' las inversiones brutas en Inmovilizado según los balances de la empresa estudiada y aplicar sobre esa cifra un

determinado coeficiente de consumo anual estimado; un procedimiento que, sin embargo, puede encontrarse en ciertos trabajos publicados sobre evaluación de productividad. No hay razón alguna para pensar que un cálculo así efectuado (por un investigador ajeno a la empresa) va a ser más exacto, como valor del consumo del factor capital, que la cifra de costes de amortización que aparezca en la cuenta de resultados de la empresa. Una cifra que resulta de un cálculo pormenorizado –por parte de los responsables de elaborar las cuentas de la empresa- para los diferentes ‘bienes de capital’ en función de sus respectivas vidas útiles.

Pensar que desde la mesa de trabajo de un investigador externo a la empresa puede calcularse mejor los ‘verdaderos costes del capital’ que por parte de quienes calculan las amortizaciones anuales de la misma, constituye una mezcla de arrogancia académica y de desconocimiento de la realidad investigada. Añadir a esos ‘cálculos de laboratorio’ un determinado tipo de interés sobre los valores anuales del inmovilizado según los balances, no mejora la situación, sino al contrario: añadir al cálculo teórico de ‘costes de capital’ que se haya efectuado, un porcentaje por interés, igual en cada año, equivale a multiplicar numerador y denominador de los índices de variación de la productividad por un mismo valor; por lo que resulta una operación inútil. Y aplicar tipos de interés diferentes, equivale a añadir una nueva distorsión, pues la variación de los tipos de interés anuales no tiene gran cosa que ver con los costes-a-precios-constantés derivados de utilizar equipos por parte de una determinada empresa. Llegados a esos extremos, conviene regresar al punto de partida y no olvidar que en evaluaciones de productividad –y por lo que respecta a los factores- lo que se necesita calcular en el fondo es, simplemente, costes del factor ‘j’ para cada periodo ‘x’, recalculados a unos mismos precios para cada periodo ‘x’.

## Anexo II

### El índice de Malmquist aplicado a la comparación de productividad entre empresas

---

El *índice de Malmquist*, aplicado a mediciones de productividad<sup>76</sup>, puede considerarse como una definición alternativa a la estándar (IPG) para comparar la productividad entre dos o más empresas. Se basa en definir una función de producción para cada una de las dos (o más) empresas a comparar:  $q^A = f_A(F^A_j)$ ; y  $q^B = f_B(F^B_j)$ . ‘A’ y ‘B’ designan a las dos empresas;  $q^A$  són las unidades de producto obtenidas por A;  $F^A_j$  representan las cantidades de cada factor  $j$  consumido por la empresa A para obtener la producción anterior. Y así para los valores de B. Se supone, por tanto, que las empresas son uni-producto; o que si producen diferentes productos ( $q^A_i$ ) existe una fórmula aceptable para construir un solo valor que pueda considerarse como representativo –a efectos de calcular productividades relativas- de la producción global de la empresa (producción agregada:  $q^A = \phi(q^A_i)$ ). Y se presupone implícitamente que las respectivas funciones de producción describen el producto que viene obteniendo cada empresa, consumiendo unas determinadas cantidades de factores.

El *índice de Malmquist* se define entonces como la media geométrica entre los cocientes *Total Output/Total Input* siguientes:  $q^A / f_B(F^A_j)$ , y  $f_A(F^B_j) / q^B$ . Es decir,

$$IM = \sqrt{\frac{q^A}{f_B(F^A_j)} \cdot \frac{f_A(F^B_j)}{q^B}}$$

donde los dos términos cruzados se obtienen aplicando las cantidades de factores utilizadas por la empresa A en la función de producción de la empresa B, y viceversa. Como puede verse ambos cocientes miden el mismo concepto: relación entre la producción que obtendría la empresa A y la que obtendría la B, utilizando en ambos casos una misma cantidad de factores. Para ambos términos podemos pues postular que si su valor es superior a 1 A es más eficiente que B; y lo contrario si el valor inferior a 1. Es la escala del consumo de factores lo que es, o puede ser, diferente en ambos términos; e incluso muy diferente. Puede darse, por ejemplo, que la empresa A opere con unos niveles de producción del orden del doble que B. Al hacer la media geométrica entre ambas versiones del ‘índice de diferencia de productividad de B respecto a A’ se está de hecho suavizando así el posible efecto de la diferencia de escala (economías de escala) entre ambas empresas.

Los requisitos de información para el cálculo de los IM son los ya indicados antes para una función de producción paramétrica; con el añadido en este caso de que serían (al

---

<sup>76</sup> El estadístico sueco Seve Malmquist desarrolló su enfoque sobre números índice inicialmente para el análisis comparativo de precios y niveles de consumo entre dos o más países, en su trabajo seminal “Index Numbers and Indifference Surfaces” en *Trabajos de Estadística*, vol. 4 n° 1, 1953, pp. 209-242. Y posteriormente lo extendió a índices de variación de productividad entre países. Esta aplicación para mediciones de productividad fue luego desarrollada principalmente por Caves, D. W., Christensen, L. R. & Diewert, W.E. en “The Economic Theory of Index Numbers and Measurement of Input, Output and Productivity”, *Econometrica*, vol. 50 n. 6, pp. 1393-1414, 1982; y por Färe, R., Grosskopf, S., Lindaren, B. & Proos, P. “Productivity Development in Swedish Hospitals: A Malmquist Output Index Approach”, *Discussion Paper 89(3)*, *Southern Illinois University Carbondale, Department of Economics*.

menos) dos las funciones de producción a determinar. O sea que sería necesario disponer de datos de las unidades físicas de los diferentes factores (inputs) utilizadas por cada empresa, y de las unidades físicas de los diferentes productos (outputs). Y todo ello para varios años, a fin de poder determinar –mediante sendas regresiones múltiples– las funciones de producción para cada empresa. Determinación que exige, mediante algún supuesto, resolver la cuestión de la agregación de los diferentes productos para obtener un solo valor global de output para cada empresa:  $q^A$  y  $q^B$ .

Es habitual que los investigadores no hayan dispuesto de toda esa masa de datos, sino simplemente de los habituales agregados monetarios que aparecen en las memorias publicadas por las empresas. Aplicar, a pesar de ello, IM lleva entonces a recurrir a la introducción de un conjunto de supuestos. Por ejemplo: tomar un determinado agregado monetario en el lugar de unas determinadas unidades físicas requeridas por la expresión IM; etc. En la línea de lo expuesto en 7.4, esta acumulación de supuestos en el cálculo y el uso de variables ‘proxy’, con los inevitables elementos de error que ello conlleva, puede hacer que los valores IM obtenidos resulten de difícil o dudosa interpretación y validez.

Independientemente de esto, al igual que ocurre con las aplicaciones de los índices de productividad estándares, lo más frecuente es que en la literatura sobre el tema encontremos no tanto el IM propiamente sino su equivalente en términos de tasa de diferencia (es decir, su  $\ln$ ): Así, tasa de diferencia de la productividad de la empresa B respecto de la de la empresa A,

$$\ln IM = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{q^A}{f_B(F_j^A)} + \ln \frac{f_A(F_j^B)}{q^B} \right)$$

Y es también frecuente en la literatura sobre IM el definir una descomposición del mismo, en los siguientes términos:

$$IM \equiv \frac{q^A}{f_B(F_j^A)} \cdot \sqrt{\frac{f_B(F_j^A)}{q^A} \cdot \frac{f_A(F_j^B)}{q^B}};$$

El primer término es entonces interpretado como la componente de *eficiencia técnica*, y el segundo término como *cambio técnico*. Como puede verse, el primer término es uno de los dos términos de la media geométrica inicial; concretamente es el índice de diferencia de eficiencia de A respecto a B, tomando como referencia la escala de actividad de A. Tomando tal referencia, el otro componente (la raíz) es lógico interpretarlo como que refleja precisamente el ‘índice de diferencia en la productividad de A respecto a la de B que viene explicado por la escala de actividad’ (economías de escala, tanto las debidas a ciertos factores que son fijos para ambos niveles de actividad, como las derivadas de la posibilidad de aplicar tecnologías más económicas a medida que la escala aumenta). De nuevo, lo más habitual en los trabajos que apliquen esta técnica de evaluación será encontrar el desglose anterior pero no en términos de índice sino más bien en términos de tasa de diferencia entre ambas empresas:

$$\ln IM = \ln \frac{q^A}{f_B(F_j^A)} + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{f_B(F_j^A)}{q^A} + \ln \frac{f_A(F_j^B)}{q^B} \right)$$

Desgloses más complejos (así como generalizaciones a más de dos unidades económicas) han sido expuestos en las referencias citadas y otros trabajos posteriores<sup>77</sup>. Una de estas extensiones consiste en aplicar el esquema anterior a comparaciones no *cross section* sino

<sup>77</sup> Puede verse, por ejemplo, Grifell-Tatjé, E. & Novell, C.A.K., 1997 “The sources of Productivity Changes in Spanish Banking”, *European Journal of Operational Research*, 98, pp. 364-380.

*cross time*: cómo cambia la productividad de una (o más) empresa entre periodos sucesivos (índices secuenciales)<sup>78</sup> .

- ♣ -

---

<sup>78</sup> Puede verse, además de la referencia anterior: Bjurek, H. (1996) “The Malmquist Total Factor Productivity Index”, *The Scandinavian Journal of Economics*, 98-2 (303-313); Coelli, T.J., Rao, D.S.P. and Battese, G.E., (1998), “An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis”, ch. 3; Kluwer Academic Publishers, Boston; y Johnes, J. (2006), “Efficiency and Productivity change in the English higher education sector from 1996/97 to 2002/03” , *Working Paper 2006/017 Lancaster University Management School*; <http://www.lums.lancs.ac.uk/publications/>

## REFERENCIAS

- Atkinson, S. E. & Halvorsen, R. (1986), "The relative efficiency of public and private firms in a regulated environment: the case of US electric utilities", *Journal of Public Economics*, 29: 281-294.
- Balaguer-Coll, M. T.; Prior, D. and Tortosa-Ausina, E. (2007). "On the determinants of local government performance: A two-stage nonparametric approach," *European Economic Review*, Elsevier, vol. 51(2), pages 425-451.
- Bortolotti, B, Fantini, M. and Siniscalco, D. (2003) "Privatisation around the World: evidence from panel data", *Journal of Public Economics*, 88: 305-332.
- Bjurek, H. (1996) "The Malmquist Total Factor Productivity Index", *The Scandinavian Journal of Economics*, 98-2 (303-313).
- Britos & Tsionas (2004) "A consistent approach to cost efficiency measurement", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 66, 1: 49-69
- Caves, D. W., Christensen, L. R. & Diewert, W.E. (1982) "The Economic Theory of Index Numbers and Measurement of Input, Output and Productivity", *Econometrica*, vol. 50 n. 6, pp. 1393-1414.
- Coelli, T.J., Rao, D.S.P. and Battese, G.E., (1998), "An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis", ch. 3; Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Dewenter, K. & Malatesta, P. H. (2001) "State-Owned and Private-Owned Firms: An Empirical Analysis of Profitability, Leverage, and Labour Intensity", *American Economic Review*, 91 (1): 320-334.
- Färe, R., Grosskopf, S., Lindaren, B. & Proos, P. (1994) "Productivity Development in Swedish Hospitals: A Malmquist Output Index Approach", in Charnes, A. *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*. Springer, pp. 253-272.
- Friedrich, R. J. (1982), "In Defense of Multiplicative Terms in Multiple Regression Equations", *American Journal of Political Science*, 26-4, 797-833.
- Goldeng, E., Grunfeld, L. A. and Benito, G. R. (2008) "The performance differential between private and state owned enterprises: the roles of ownership, management and market structure", *Journal of Management Studies*, 45(7), 1244-1273.
- Grifell-Tatjé, E. & Novell, C.A.K., 1997 "The sources of Productivity Changes in Spanish Banking", *European Journal of Operational Research*, 98, pp. 364-380.
- Johnes, J. (2008), "Efficiency and Productivity change in the English higher education sector from 1996/97 to 2004/05", *The Manchester School* Volume 76, Issue 6, pp. 653–674.
- Kerstens (1996), "Technical efficiency measurement and explanation of French urban transit companies", *Transportation Research A*, 30-6: 431-452
- Kirkpatrick, C. / Parker, D. and Zhang, Y.-F. (2006), "An Empirical Analysis of State and Private Sector Provision of Water Services in Africa", *The World Bank Economic Review*, 20-1, p. 143-163
- Kumbhakar, S. C. & Hjalmarsson, L. (1998), "Relative performance of public and private ownership under yardstick competition: electricity retail distribution", *European Economic Review*, 42:97-122.
- Liebenstein, H. (1966) «Allocative Efficiency vs. X-Efficiency», *American Economic Review*, , pp. 392-415.
- Lynk (1993), "Privatisation, joint production and comparative efficiencies of private and public ownership: The UK water industry case", *Fiscal Studies*, 14-2: 98-116.
- Meggison, William L. / Netter, Jeffrey M. (2001), "From State to Market: A survey of Empirical Studies on Privatization", *Journal of Economic Literature*, June 2001, vol. 39 n. 2: 321-389.



- Miller, D. (1984) "Profitability = productivity + price recovery", *Harvard Business Review*, May-Jun, pp. (145-153).
- Milward, R y Parker, D.M. (1983) "Public and Private Enterprise: Comparative Behaviour and Relative Efficiency" in Milward, R./ Parker, D.M./ Rosenthal, L/ Summer, M. T./ Topham, N. (Eds), *Public Sector Economics*, Longman, pp. 225-227.
- Prior, D. / Vergés, J. & Vilardell, I. (1993), *La evaluación de la eficiencia en los sectores privado y público*, Instituto de Estudios Fiscales, Madrid.
- Perelman, S. & Pestieau, P. (1988) "Technical performance in public enterprises", *European Economic Review*, 32: 432-441.
- Thakur, T., Deshmukh, S. G. and Kaushik, S. C. (2006) "Efficiency evaluation of the estate owned electric utilities in India", *Energy Policy*, 34 (2006) pp. 2788-2804.
- Vergés, J. (2010), *Economía política de la intervención sobre el mercado*, Ed. Pirámide, Madrid.
- Waters II, W. G. & Street, J. (1998), "Monitoring the Performance of Government Trading Enterprises", *Australian Economic Review*, 31-4, (357-371).
- Yaffee, R. (2003) "A Primer for Panel Data Analysis" *Connect*, New York University; [http://www.nyu.edu/its/pubs/connect/fall03/yaffee\\_primer.html](http://www.nyu.edu/its/pubs/connect/fall03/yaffee_primer.html)