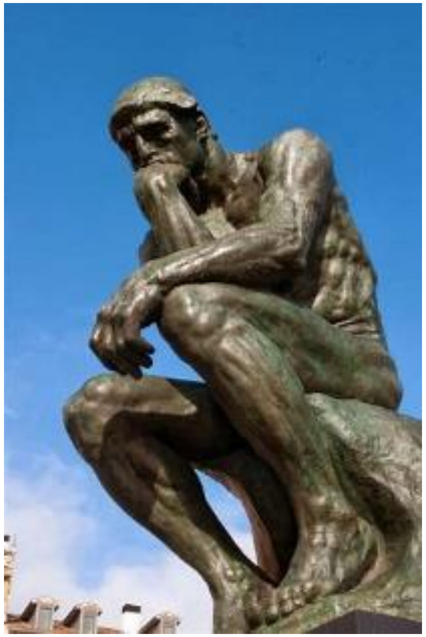
DIA INTERNACIONAL DE LES MATEMÀTIQUES
14 MARÇ

MATEMÀTIQUES I COVID

ELS TESTS GRUPALS

Volem fer tests a 10000 persones per esbrinar quins són covid positius i quins són negatius.

Realment caldrà fer 10000 PCRs o podem utilitzar una estratègia matemàtica que ens permeti reduir el nombre de PCRs?



THE MATHEMATICAL STRATEGY THAT COULD TRANSFORM CORONAVIRUS TESTING

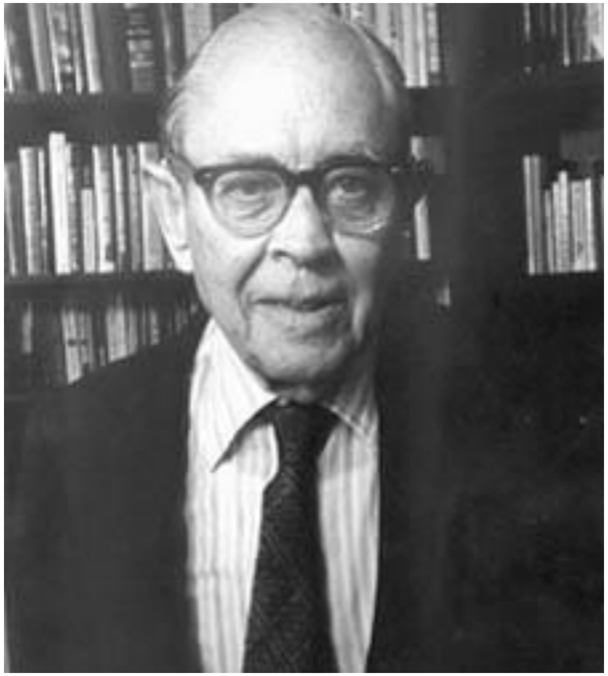
To save time and money, several countries are using a technique called group testing, which pools samples from many people.

By Smriti Mallapaty

Nature, 583: 504--505, 23 juliol 2020

Un test grupal molt senzill utilitzat durant la segona guerra mundial: “Dorfman two-stage group testing procedure”

Dorfman, Robert (1943). The Detection of Defective Members of Large Populations, *The Annals of Mathematical Statistics*, **14**(4), p. 436–440



Robert Dorfman

El mètode de Dorfman:

Prenem una mostra naso-faríngia a n individus, les barregem i fem un únic PCR. Guardem el líquid sobrant de cada individu per si cal fer més tests.

- Si el PCR surt covid-negatiu, aleshores tots els n pacients són negatius.

- Si el PCR surt positiu, aleshores fem n tests per esbrinar quin o quins pacients són covid-positius.

Exemple: **Agafem les mostres de 5 pacients**





Les barregem agafant una mica de líquid de cadascun

Test negatiu

Test positiu

Els 5 pacients són covid-negatius

Cal fer 5 PCRs més per saber quin o quins pacients són covid-positius

Per tant, en total farem només 1 PCR quan tots siguin covid-negatius o bé 6 PCRs quan algun pacient sigui positiu.

Les Matemàtiques del mètode de Dorfman

Si la proporció de gent infectada (prevalença del covid) és p, quin és el nombre n de mostres que hauríem de barrejar per tal de fer en mitjana el mínim nombre de PCRs possible?

Sigui X la variable aleatòria que ens indica el número total de PCRs que haurem de fer:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si tots estan sans} \\ n+1 & \text{si almenys un està malalt} \end{cases}$$

Si la probabilitat de que un individu estigui infectat és p (prevalença de la malaltia), la probabilitat de que estigui sa és 1-p.

Per tant, la probabilitat de que n individus estiguin sans és $(1-p)^n$, $P(X=1)=(1-p)^n$

... i la probabilitat de que almenys un d'ells estigui infectat és $1-(1-p)^n$ (l'esdeveniment contrari),

$$P(X=n+1)=1-(1-p)^n$$

Recordem que la variable aleatòria *X* ens indica el nombre de PCRs que hauríem de fer.

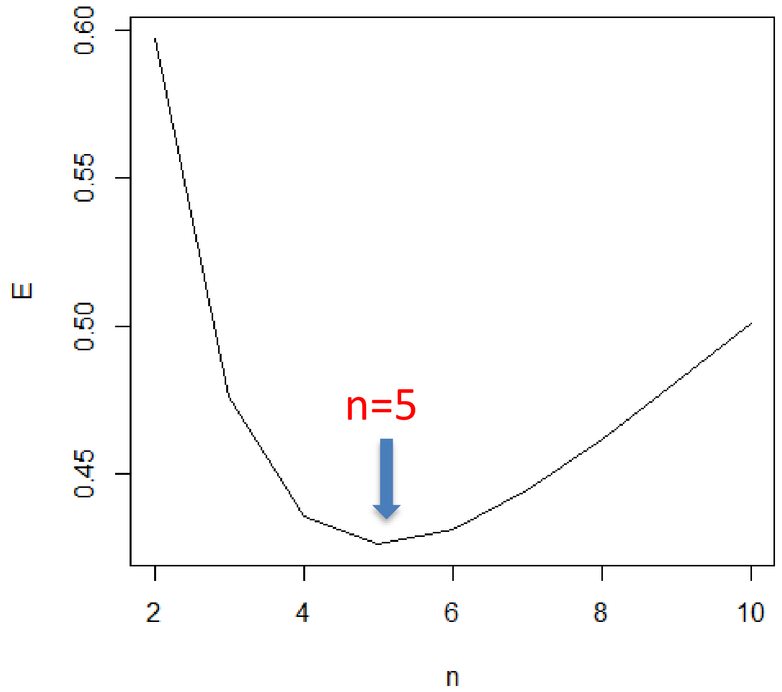
Quin serà el nombre mitjà de PCRs que haurem de fer , és dir, l'esperança de la variable aleatòria *X*, *E(X)*?

Aquesta esperança es calcula sumant els valors que pren la variable aleatòria *X* multiplicats per les seves probabilitats, és a dir,

$$
\begin{aligned}
E(X) &= (1-p)^n + (n+1)(1-(1-p)^n) \\
&= 1 + n(1-(1-p)^n)
\end{aligned}
$$

Però donada la prevalença p, quin valor de n minimitza el nombre esperat de PCRs $E(X)$?

Per exemple, si $p=0.05$ (un 5% de la població està infectada) aquests són els valors esperats per a diversos valors de n:



Amb una prevalença de p=0.05 (5%) i una agrupació de mostres de n=5 el valor esperat és de $E(X)$=0.43, és a dir, per examinar a 10000 individus només cal fer 4300 PCRs !!

Dorfman (1943) proporciona una taula on calcula el valor òptim de n en funció de la prevalença p.

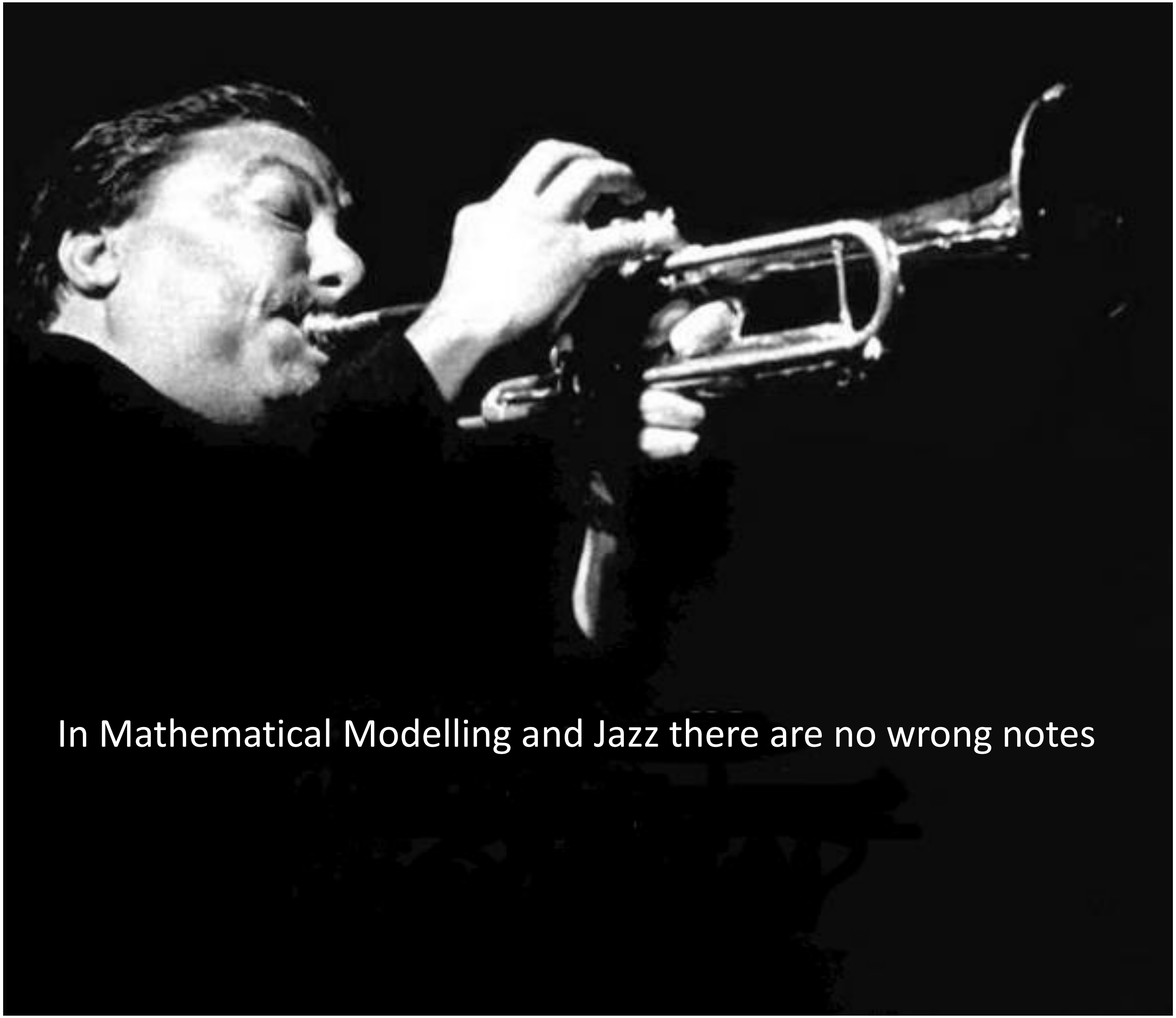
El valor de n=5 és òptim per prevalences entre el 5% i el 7%. El valor de n=4 és òptim per prevalences entre el 8% i el 12%

TABLE I

Optimum Group Sizes and Relative Testing Costs for Selected Prevalence Rates

Prevalence Rate (per cent)	Optimum Group Size	Relative Testing Cost	Percent Saving Attainable
1	11	20	80
2	8	27	73
3	6	33	67
4	6	38	62
5	5	43	57
6	5	47	53
7	5	50	50
8	4	53	47
9	4	56	44
10	4	59	41
12	4	65	35
13	3	67	33
15	3	72	28
20	3	82	18

Dorfman, Robert (1943). The Detection of Defective Members of Large Populations, *The Annals of Mathematical Statistics*, **14**(4), p. 436–440


In Mathematical Modelling and Jazz there are no wrong notes