

SOBRE UN ESPACIO DE FUNCIONES ENTERAS

DE ORDEN INFINITO

por

F. Sunyer Balaguer

Al Dr. José M Iñiguez, muy afectuosamente

INTRODUCCIÓN.- En un trabajo anterior [4] estudié un espacio topológico cuyos puntos eran funciones enteras de orden infinito, y demostré que unos subconjuntos formados por las funciones que tienen ciertas propiedades, eran "despreciables". El sentido de este término "despreciable" era el que le da Kuratowski [1, pag.48] cuando dice: "En numerosos problemas de Topología, la noción de conjunto de primera categoría es semejante a aquella de conjunto de medida 0 en la teoría de la medida (conjuntos "despreciables")".

En este trabajo estudiaremos otro espacio en el que habremos definido, de un modo "natural", una medida. Con esta medida demostraremos que si consideramos los subconjuntos formados por las funciones que tienen las mismas propiedades que suponíamos en el trabajo anterior, estos conjuntos son "despreciables" en el sentido de la medida, es decir, son de medida nula.

1.- Antes de enunciar los resultados y dar las líneas generales de las demostraciones, debemos recordar algunos resultados que tendremos que utilizar continuamente y definir algunas notaciones:

En mi trabajo citado se demuestra que para toda función $F(z)$, entera y de orden infinito, existe una función $W(r)$ que veri-

fica:

(I) $\log W(r)$ es una función creciente y convexa de $\log r$

(II) $W\left(r\left(1 + \left(\frac{\log r}{\log W(r)}\right)^{\xi(r)}\right)\right) \leq (W(r))^{1+o(1)}$

(III) $\xi(r) > 0$ y $\xi(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

(IV) $\left(\frac{\log r}{\log W(r)}\right)^{\xi(r)} \rightarrow 0$ monotonamente cuando $r \rightarrow \infty$

(V) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, F)}{\log W(r)} = 1$

donde $\log_2 X = \log \log X$ y $M(r, F) = \max_{|z|=r} |F(z)|$.

2.- Sea $W(r)$ una función que verifica las condiciones (I), (II), (III) y (IV), y sea

$$F(z) = \sum a_n z^n$$

una función entera cualquiera de orden infinito y que verifique (V), esto ultimo lo indicaremos por $F \in S_W$. Si cambiamos el signo de un número finito o infinito de coeficientes de $F(z)$, obtendremos una nueva función entera $F_1(z)$, y según un resultado conocido [4, lema 2] tendremos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, F_1)}{\log W(r)} = 1$$

o sea, si $F \in S_W$, entonces $F_1 \in S_W$, donde F_1 es según hemos dicho cualquier función que difiere de F unicamente en el signo de una sucesión de sus coeficientes.

Por otra parte el mismo lema [4, lema 2] permite obtener

otro resultado semejante, a saber: Si

$$\mathcal{F}(r) = \sum |a_n| r^n$$

se puede demostrar que si $F \in S_w$ entonces $\mathcal{F} \in S_w$.

3.- Ahora vamos a definir el espacio S que estudiaremos:

El espacio S estará formado por la totalidad de las funciones ~~obtenidas cambiando el signo de una sucesión finita o infinita de sus coeficientes~~ que pueden obtenerse a partir de F cambiando el signo de una sucesión finita o infinita de sus coeficientes (naturalmente F también pertenece al espacio S pues se obtiene no cambiando el signo de ningún coeficiente). A este espacio ~~asignaremos~~ le asignaremos la topología de la convergencia uniforme en los compactos, y sin necesidad de repetirlo al hablar de este espacio le supondremos esta topología.

Ahora debemos definir las funciones de Rademacher que con una ligera variación en la definición nos permitirá construir una medida en S .

Sea $r_0(u)$ una función periódica de período 1 y tal que

$$r_0(u) = \begin{cases} +1 & 0 < u < 1/2 \\ -1 & 1/2 < u < 1 \end{cases}$$

generalmente para los valores $u = 0, 1/2, 1$, se toma $r_0(u) = 0$, pero nosotros consideraremos únicamente $r_0(u-0)$ y $r_0(u+0)$ que evidentemente existen. Ahora para todo ~~numero~~ número natural n escribiremos

$$r_n(u) = r_0(2^n u)$$

y entonces las $r_n(u)$ son las funciones de Rademacher.

Sea β_0 el intervalo $0 \leq u \leq 1$ y consideremos el conjunto β_1

de los puntos de β_0 que pueden escribirse

$$u = (2k + 1)2^{-n}$$

donde k es un entero no negativo y n un número natural. Entonces al complemento de β_1 respecto a β_0 lo representaremos por β_2 . Supongamos que cada punto $u \in \beta_1$ se desdobra en los u' y u'' y escribamos

$$\beta_1' = \bigcup_{u \in \beta_1} u'$$

$$\beta_1'' = \bigcup_{u \in \beta_1} u''$$

Si, además del orden correspondiente a la recta real, se supone que $u' < u''$ entonces el conjunto

$$\beta = \beta_2 \cup \beta_1' \cup \beta_1''$$

será totalmente ordenado. Cuando hablaremos del espacio β se entenderá que queremos indicar el conjunto β al que se ha asignado la topología deducida del orden que acabamos de definir.

Ahora podemos indicar la ligera modificación que queremos introducir en las funciones de Rademacher: Sea $R_n(s)$ una función definida en la totalidad de β del siguiente modo:

Si $s \in \beta_2$ y $s = u'$ entonces $R_n(s) = r_n(u-0)$, mientras que si $s = u''$, $R_n(s) = r_n(u+0)$.

Si $s \in \beta_2$, entonces $R_n(0) = r_n(0+0) = +1$, $R_n(1) = r_n(1-0) = -1$ y finalmente si $s = u$ (pero $s \neq 0$ y $s \neq 1$) $R_n(s) = r_n(u)$.

Como la función F que sirve para definir el espacio S puede tener coeficiente nulo, nosotros la escribiremos en la forma

$$F(z) = \sum a_{k_n} z^{k_n}$$

entonces escribiendo

$$F_s(z) = \sum R_n(s) a_{k_n} z^{k_n}$$

es facil demostrar que se establece una correspondencia biunivoca entre β y S . Evidentemente $F_0(z) = F(z)$. Además tambien se puede demostrar

TEOREMA I.- Los espacios β y S son homeomorfos y la correspondencia $s \rightarrow F_s$ es un homeomorfismo.

No daremos la demostración de este teorema, pues es muy simple y el lector a quien interese podrá encontrarla facilmente.

4.- En el número anterior definimos implicitamente una función $u(s)$ que para cada función $s \in \beta$ toma un valor perteneciente al intervalo $0 \leq u \leq 1$; además con el orden definido en β esta función será no decreciente. Puesto que los valores que toma $u(s)$ en β llenan totalmente el intervalo $0 \leq u \leq 1$ y es univalente excepto en un conjunto numerable, es evidente que es correcta la siguiente definición de medida en β : Si H es un subconjunto de β diremos que H es medible si y solamente si $u(H)$ es medible en el sentido de Lebesgue. Entonces la medida de H en β , que representaremos por $|H|_\beta$ vendrá dada por

$$|H|_\beta = |u(H)|_L$$

donde $|X|_L$ es la medida de X en el sentido de Lebesgue en la recta real.

Por otra parte la homeomorfia $g: s \rightarrow F_s$ entre β y S permite definir una medida en S por la igualdad

$$|\Phi|_S = |H|_\beta$$

donde $H = g^{-1}(\bar{\phi})$ y donde $|\bar{\phi}|_S$ representa la medida en S del subconjunto $\bar{\phi}$ de S .

5.- Sea

$$F(z) = \sum a_n z^n$$

una función entera. Representemos $\mu(r)$ por la igualdad

$$\mu(r) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n$$

y $\nu(r)$ por

$$\nu(r) = \max \left\{ n: |a_n| r^n = \mu(r) \right\}.$$

Finalmente para simplificar pondremos siempre $\alpha(r)$ en lugar de

$$\left(\frac{\log r}{\log W(r)} \right)^{\varepsilon(r)}$$

que interviene en la definición de las propiedades de las funciones $W(r)$.

En este nº y en los dos sucesivos demostraremos tres lemas que para el orden finito fueron dados por Littlewood y Offord [2] siendo los nuestros su traducción al orden infinito

LEMA 1.- Si $F \in S_w$, $k > W(r)$ y $q < k(\log k)^{-1-\delta}$ ($\delta > 0$), entonces para r suficientemente grande

$$\sum_{k+1}^{\infty} n^q |a_n| r^n \leq (1 + \alpha(r))^{\nu(R) - k/2} \mu(r) \quad \text{donde } R = r(1 + \alpha(r)).$$

DEMOSTRACIÓN.- De las definiciones se deduce fácilmente que

$$|a_n| R^n \leq \mu(R) \leq \left(\frac{R}{r} \right)^{\nu(R)} \mu(r)$$

y

$$|a_n| r^n \leq \left(\frac{R}{r} \right)^{\nu(R) - n} \mu(r)$$

de donde

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} n^q |a_n| r^n \leq \left(\frac{R}{r}\right)^{\nu(R)} \mu(r) \sum_{k=1}^{\infty} n^q \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Además

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} n^q x^n = \left(x \frac{d}{dx}\right)^q \frac{x^{k+1}}{1-x} \quad (x < 1)$$

y si ponemos $x = e^y$ tendremos

$$(3) \quad \left(x \frac{d}{dx}\right)^q \frac{x^{k+1}}{1-x} = \frac{d^q}{dy^q} \frac{e^{(k+1)y}}{1-e^y} = \sum_0^q \binom{q}{m} (k+1)^{q-m} e^{(k+1)y} \frac{d^m}{dy^m} \frac{1}{1-e^y}$$

Y puesto que según las formulas de Cauchy podremos demostrar que

$$\frac{d^m}{dy^m} \frac{1}{1-e^y} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-e^{3y/5}} \frac{5^m}{2^m |y|^m}$$

de (2) y (3) resulta

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} n^q x^n \leq \frac{q!}{2\pi} \frac{5^q}{2^q |y|^q} \frac{1}{1-e^{3y/5}} e^{(k+1)3y/5}$$

Ahora bien, según las hipótesis, puesto que $x = e^y = \frac{1}{1+\alpha(r)}$

resulta

$$\frac{q!}{2\pi} \frac{5^q}{2^q |y|^q} \frac{1}{1-e^{3y/5}} \leq e^{2k(\log k)^{-\delta}} (1+o(1))$$

y por lo tanto de (1) y (4) se sigue el lema 1.

6.- Representemos por D el operador $z \frac{d}{dz}$, entonces dados q números positivos

$$p_1, p_2, \dots, p_q$$

definiremos los siguientes operadores

$$\mathcal{D}_{q,h} = (D - p_1) \dots (D - p_{h-1}) (D - p_{h+1}) \dots (D - p_q) D$$

Ahora con la medida en S definida en el n° 4 se puede demostrar:

LEMA 2.- Dado un número positivo $\varepsilon < 1$ existe un $\rho_0 = \rho_0(\varepsilon)$ tal que, para todo z que verifica $|z| = r > \rho_0$ se puede determinar un conjunto de q enteros positivos $p_1, p_2, \dots, p_q$ con las siguientes propiedades: Si

$$k = 2 \gamma(r(1 + \alpha(r))) + W(r),$$

ningún p sobrepasa k , además $q \leq (W(r))^\varepsilon$ y existe un conjunto excepcional $\Phi = \Phi(z, \varepsilon) \subset S$ tal que si $F \in S$ y $F \notin \Phi$

$$\sup_h |\mathcal{D}_{q,h} F(z)| > \exp(-(W(r))^{2\varepsilon}) \mu(r)$$

la medida de Φ siendo $\leq \exp(-(W(r))^\varepsilon - o(1))$.

DEMOSTRACIÓN.- Si suponemos $q \leq (W(r))^\varepsilon$ y

$$k = 2 \gamma(r(1 + \alpha(r))) + W(r) \leq (W(r))^{1+o(1)}$$

aplicando el lema 1 tendremos

$$(5) \quad |\mathcal{D}_{q,h} \sum_{k+1}^{\infty} a_n z^n| \leq \sum_{k+1}^{\infty} n^q |a_n| r^n \leq \exp(-(W(r))^{1-o(1)}) \mu(r)$$

Ahora escribiremos

$$(6) \quad F_s(z) = P_{k,s}(z) + \sum_{k+1}^{\infty} R_n(s) a_n z^n$$

(aquí suponemos que ningún a_n es igual a 0, de haber algunas sucesiones de coeficientes nulos, es muy fácil ~~xxxxxxxx~~ modificar la de-

mostración de modo que se vea que los resultados continúan siendo válidos; es suficiente utilizar el mismo procedimiento que nos ha permitido obtener una correspondencia biunívoca entre β y S).

Sea q_1 el número de términos de $P_{k,s}$ cuyo módulo es $\geq \exp(-(W(r))^{2\epsilon}) \mu(r)$. Pueden presentarse dos casos (I): $q_1 \leq (W(r))^\epsilon$ y (II): $q_1 > (W(r))^\epsilon$.

En el caso (I) sea

$$p_1, p_2, \dots, p_q \quad (q = q_1)$$

los índices de los términos de $\sum_0^k |a_n| r^n$ que sobrepasan ~~exp(-(W(r))^{2\epsilon}) \mu(r)~~ $\exp(-(W(r))^{2\epsilon}) \mu(r)$. Entre estos habrá el término mayor, cuyo índice supondremos que corresponde a p_h .

Entonces es fácil ver que

$$\mathcal{D}_{q,h} P_{k,s}(z) = p_h^{KR_{p_h}}(s) a_{p_h} z^{p_h} + \sum_1$$

donde $K \geq 1$ y

$$\left| \sum_1 \right| \leq k^q \sum_0^k |a_n| r^n \leq k^{q+1} \exp(-(W(r))^{2\epsilon}) \mu(r),$$

$n \neq p_1, p_2, \dots, p_q$

pero como $q \leq (W(r))^\epsilon$ y $k \leq (W(r))^{1+o(1)}$ resulta

$$k^{q+1} \leq \exp((W(r))^{\epsilon+o(1)})$$

y por consiguiente

$$\left| \sum_1 \right| < \exp(-(W(r))^{2\epsilon-o(1)}) \mu(r).$$

Por lo tanto cuando $r > p_0$ tendremos

$$|\mathcal{D}_{q,h} P_{k,s}(z)| \geq \frac{3}{2} \mu(r)$$

y de (5) y (6) resulta finalmente

$$|\mathcal{D}_{q,h} F_s(z)| > \mu(r).$$

Esto demuestra el lema en el caso (I).

En el caso (II) la demostración puede efectuarse casi de forma idéntica al método empleado por Littlewood Offord [2] pero utilizando la acotación por medio de funciones de $W(r)$, como hemos hecho en el caso (I). Entonces se verifica que excepto si s pertenece a un conjunto de medida $2^{-q} \leq \exp(-(W(r))^{\varepsilon - o(1)})$ tendremos

$$\sup_h |\mathcal{D}_{q,h} P_{k,s}(z)| \geq 2 \exp(-(W(r))^{2\varepsilon}) \mu(r)$$

y por los mismos valores de s , según el lema 1, tendremos

$$\begin{aligned} \sup_h |\mathcal{D}_{q,h} F_s(z)| &\geq \sup_h |\mathcal{D}_{q,h} P_{k,s}(z)| - \exp(-(W(r))^{1-o(1)}) \mu(r) \geq \\ &\geq \exp(-(W(r))^{2\varepsilon}) \mu(r). \end{aligned}$$

Dada la correspondencia entre las medidas en β y en S , esta fórmula demuestra el lema en el caso (II).

7.- LEMA 3.- Dados dos números positivos $\varepsilon < 1$ y $\theta < 1$, existe un $\rho_1 = \rho_1(\varepsilon, \theta)$ tal que para todo z_0 que verifique $|z_0| = r > \rho_1$, existe un conjunto $\Phi_1 = \Phi_1(\varepsilon, \theta, r)$ que depende únicamente de ε , θ y r , cuya medida es menor que $\exp(-(W(r))^{\varepsilon/2})$ tal que si $F_s \notin \Phi_1$ en el círculo $|z - z_0| < (W(r))^{-\theta}$ existe un punto z' tal que

$$|F_s(z')| > \exp(-(W(r))^{3\varepsilon}) \mu(r).$$

DEMOSTRACIÓN.- Tomando θ_1 tal que $\theta < \theta_1 < 1$, dividiendo la circunferencia $|z| = r$ en $m = (W(r))^{\theta_1}$ partes iguales, y representando por z_k los puntos de división, entonces, para $r > \rho_1$ suficientemente grande, la circunferencia $|z - z_0| = (W(r))^{-\theta}$ contendrá en su

interior la totalidad de por lo menos una de los círculos $|z - z_k| < (W(r))^{-\theta_1}$. En efecto para r suficientemente grande, se cumple, dadas las propiedades de $W(r)$,

$$2\pi r(W(r))^{-\theta_1} + (W(r))^{-\theta_1} < (W(r))^{-\theta}.$$

Por otra parte poniendo

$$x \prod_{i \neq h} (x + p_i) = \sum_1^q c_{h,n} x^n$$

tendremos

$$(7) \quad |D_{q,h} F_s(z)| \leq \sum_1^q c_{h,n} |D^n F_s(z)| =$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_1^q c_{h,n} \left| \oint F_s(z) \frac{n!}{(\log z - \log z_k)^{n+1}} \frac{dz}{z} \right| \leq$$

$$\leq 2^q r^q q^q (W(r))^{2\theta_1} \prod_{i \neq h} ((W(r))^{-\theta_1} + p_i) M$$

donde M es el máximo de $|F_s(z)|$ en el círculo $|z - z_k| < (W(r))^{-\theta_1}$.

Si $r > \rho_1$ donde ρ_1 es suficientemente grande y verifica $\rho_1 > \rho_0$, según el lema 2 aplicado a la totalidad de los z_k , se deduce de (7) que existe un conjunto $\Phi_1 \subset S$ de medida $\leq m \exp(-(W(r))^{\varepsilon/2})$ tal que si $F_s \notin \Phi_1$ el máximo M verificará

$$M \geq \exp(-(W(r))^{\beta \varepsilon}) \mu(r),$$

para deducir esta desigualdad hay que tener en cuenta las propiedades de q , de $W(r)$ y de los p_i . Puesto que si $r > \rho_1$ y ρ_1 es suficientemente grande, se cumple

$$m \exp(-(W(r))^{\varepsilon/2}) \leq \exp(-(W(r))^{\varepsilon/3}),$$

El lema queda totalmente demostrado.

8.- Ahora podremos ya demostrar el teorema a que nos hemos referido en la introducción. Pero antes debemos dar algunas definiciones.

Representaremos por A el conjunto formado por todas las funciones $F \in S$ para cada una de las cuales ~~se representa~~ existe una función $f(z)$ entera tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, f)}{\log W(r)} < 1$$

y

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, 1/(F-f))}{\log W(r)} < 1,$$

donde $n(r, 1/g)$ representa, según Nevanlinna, el número de ceros de g contenidos en el círculo $|z| < r$.

Además al complemento de A en relación a S lo representaremos por B.

Entonces podemos enunciar y demostrar el:

TEOREMA II.- A es un F_σ de medida nula y por consiguiente B es un G_δ de medida 1.

DEMOSTRACIÓN.- Según un resultado contenido en un anterior trabajo [4, lema 1] resulta inmediatamente que existe una sucesión $\{r_n\}$ tal que $\lim r_n = \infty$ y que para toda función $F \in S$ se verifica

$$\log \mu(r_n, F) > (W(r_n))^{1-o(1)}$$

Entonces si suponemos en el lema 3, $\varepsilon < 1/4$ podremos deducir fácilmente que si $F \notin \Phi_1(\varepsilon, \theta, r_n) = \Psi_n$ se verificará

$$\log M > (W(r_n))^{1-o(1)}$$

o sea, que cualquier punto de la circunferencia $|z| = r_n$ esta a una

distancia inferior a $(W(r_n))^{-\theta}$ de otro punto en el cual se verifica

$$(8) \quad \log |F(z)| > (W(r_n))^{1-o(1)}.$$

Como que siempre es posible elegir la sucesión $\{r_n\}$ de modo que

$$\sum \exp(-(W(r_n))^{\varepsilon/3}) < \infty$$

entonces, haciendo esta elección, resulta fácilmente que

$$\Psi = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n>m} \Psi_n$$

será de medida nula

Por otra parte si $F \notin \Psi$, a partir de un valor n_0 que puede depender de F , tendremos $F \notin \Psi_n$ ($n > n_0$), o sea que para esta función todo punto de las circunferencias $|z| = r_n$ ($n \geq n_0$) estará a una distancia inferior a $(W(r_n))^{-\theta}$ de un punto en que se cumpla la (8). Por consiguiente siguiendo el mismo procedimiento que al final de la demostración de un resultado que di en una memoria anterior [3, teorema IV] se demuestra que si $F \notin \Psi$ resulta $F \notin A$, o sea $A \subset \Psi$ lo que demuestra que la medida de A es nula.

Para demostrar que A es un F_σ se procede como en [4, teorema IV].

Según hemos dicho en la introducción el teorema que acabamos de demostrar expresa mediante la medida la misma idea que el teorema IV de [4] expresaba mediante la categoría. De forma semejante, si bien con demostraciones más complicadas pueden demostrarse unos resultados que en S expresarían mediante la medida la misma idea que los teoremas V y VI de [4] expresada por mediación de la categoría en $S_{w,t}$.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Kuratowski, K - Topologie, vol. 1 tercera edición Varsovia 1952
- 2.- Littlewood J.E. and Offord, A.C. - On the distribution of zeros and α -values of a random integral function (II) (Annals Math. vol.49, 1948 p.885)
- 3.- Sunyer Balaguer, F - Sur la substitution d'une valeur exceptionnelle par une propriété lacunaire (Acta Math. t. 87, 1952, p.17)
- 4.- Sunyer Balaguer, F - Sobre un espai de funcions enteres d'ordre infinit (Inst. d'Estudis Catalans, Arx. Sec. de Ciències XXXIII, 1966).

Vilajoan Julio 1967

SOBRE UN ESPACIO DE FUNCIONES ENTERAS
DE ORDEN INFINITO (*)

F. Sunyer Balaguer

1.- Para nuestro objeto es necesario mejorar, en primer lugar, los ordenes de King-Lai Hiong, es decir es necesario demostrar que para cualquier función $F(z)$ de orden infinito existe una función real $W(r)$ tal que:

1º $\log W(r)$ es una función creciente convexa de $\log r$,

2º

$$W\left(r\left(1+\left(\frac{\log r}{\log W(r)}\right)^{\varepsilon(r)}\right)\right) \leq (W(r))^{1+o(1)}$$

3º $\varepsilon(r) > 0$ y $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$

4º $\left(\frac{\log r}{\log W(r)}\right)^{\varepsilon(r)} \rightarrow 0$ monotonamente cuando $r \rightarrow \infty$

y

$$5^\circ \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, F)}{\log W(r)} = 1.$$

En esta Nota no daremos ninguna demostración enunciando solamente los resultados, no obstante creo interesante señalar que las demostraciones si bien no son difíciles son bastante laboriosas.

Si $W(r)$ es una función dada la cual verifica las condiciones 1º, 2º, 3º y 4º y si $t(r)$ es otra función real tal que $t(r) > 0$ y $t(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, entonces si $F(z) = \sum_n a_n z^n$ verifica

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, F)}{\log W(r)} = 1$$

y

$$\log_2 \left(\sum_n |a_n| r^n \right) \leq (1 + t(r)) \log W(r)$$

diremos que $F \in S_{W, t}$. Además supongo que la topología de $S_{W, t}$ es la topología llamada "compacto abierto", y en lugar de decir "espacio $S_{W, t}$ " con esta notación. Estas investigaciones fueron llevadas a cabo bajo contrato con la U. S. Navy.

gia llamada "compact-open", y en lugar de decir "espacio $S_{w,t}$ con esta topologia" diremos simplemente "espacio $S_{w,t}$ ".

Es conocido el hecho de que $S_{w,t}$ es un espacio metrico, y he podido demostrar:

THEOREMA 1.- $S_{w,t}$ es de segunda categoria

2.- Si para $F \in S_{w,t}$ existe una función entera $f(z)$ tal que

$$\overline{\lim} \frac{\log_2 M(r, f)}{\log W(r)} < 1$$

y

$$\overline{\lim} \frac{\log n(r, 1/(F-f))}{\log W(r)} < 1$$

donde $n(r, 1/\varphi)$ es el número de ceros de $\varphi(z)$ en $|z| < r$, nosotros diremos que $F \in A$. Finalmente representaremos por B el complemento de A respecto a $S_{w,t}$. Con estas definiciones se puede demostrar:

TEOREMA 2.- B es un G_δ denso de segunda categoria

TEOREMA 3.- A es un F_σ de primera categoria

3.- Sea $n(r, \alpha, \varepsilon, 1/F)$ el número de ceros de $F(z)$ contenidos en el sector

$$|z| < r, \quad |\arg z - \alpha| < \varepsilon$$

Entonces si $F \in S_{w,t}$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ y para todo valor finito a , excepto para un valor a lo sumo, se verifica

$$(1) \quad \overline{\lim} \frac{\log n(r, \alpha, \varepsilon, 1/(F-a))}{\log W(r)} = 1$$

nosotros afirmaremos que la dirección $\arg z = \alpha$ es una dirección de Borel-Valiron. Si la igualdad (1) se verifica para todo valor de a sin excepción nosotros diremos que $\arg z = \alpha$ es una dirección de Borel-Valiron sin valor excepcional.

Sea C la familia que contiene todas las $F \in S_{w,t}$ para las cuales existe un valor de α (el cual puede depender de F) tal que $\arg z = \alpha$ no es una dirección de Borel-Valiron sin valor excepcional. El complemento de C en relación a $S_{w,t}$ lo representaremos por D . Con estas notaciones se puede demostrar:

TEOREMA 4.- D es un G_δ denso de segunda categoría

TEOREMA 5.- C es un F_σ de primera categoría

4.- Sea como habitualmente $F^{(p)}(z)$ una integral de $F(z)$, la función $F(z)$ o una derivada de $F(z)$ respectivamente según que $p < 0$, $p = 0$, o $p > 0$.

Entonces podemos definir el conjunto C^* del siguiente modo: $F \in C^*$ si $F \in S_{w,t}$ y por lo menos para un valor de p la función $F^{(p)}(z)$ tiene una dirección que no es de Borel-Valiron sin valor excepcional. El complemento de C^* en relación a $S_{w,t}$ lo representaremos por D^* . Entonces se puede demostrar

TEOREMA 6.- D^* es un G_δ denso de segunda categoría

TEOREMA 7.- C^* es un F_σ de primera categoría.

OBSERVACION.- Del teorema 1 y de los teoremas 3, 5, y 7 respectivamente se sigue que las clases $F \in A$, $F \in C$ y $F \in C^*$ son excepcionales en $S_{w,t}$ en sentido topológico. Para el orden finito habíamos demostrado ya unos resultados semejantes ^{y lo mismo han hecho} ~~ya~~ otros autores