APPROXIMATION DES FONCTIONS PAR SOMMES

D'EXPONENTIELLES (*)

par F. Sunyer Balaguer

INTRODUCTION

Les propriétés des fonctions qui, dans une domaine donné peuvent, quel que soit $\varepsilon > 0$, être approchées à moins d'ε par des sommes d'exponentielles dont les exposants appartiennent à une suite $\Lambda = \{\lambda_n\}$ donnée, ont eté étudiees par plusieurs auteurs (voir par ex. Schwartz [7], Kahane [4] et Leont'ev [10])([1]). D'autre part Mandelbrojt, dans des Mémoires et des Monographies [5] étudie les ~~propreiétés~~ propriétés des fonctions qui dans une demi-bande peuvent être représentées par les sommes partielles d'une série de Dirichlet avec une certaine précision logarithmique.

Lorsque l'on ne suppose pas que dans quelque domaine la fonction puisse quel que soit $\varepsilon > 0$, être approchée à moins d'ε, on peut poser l'hypothèse suivante: Il existe une famille Σ de domaines bornés intérieurs à une demi-bande et tels que l'approximation $\eta(d)$, que dans le domain $d \in \Sigma$ peut être obtenue avec des sommes d'exponentielles dont les exposants appartiennent à Λ, vetifie

$$\eta(d) \to 0$$

(*) Ces recherches furent effectuées sous contract avec l'Office of Naval Research de la U.S. Navy.

([1]) Les números figurant entre crochets renvoient a la bibliographie placée a la fin du Mémoire.

lorsque le domaine d s'éloigne à l'infini. Celà est l'idée de la b-précision logatithmique. (généralisation de la précision logarithmique de Mandelbrojt, car dans celle-ci le domaine d n'est pas borné).

Dans ce Mémoire nous étudierons la caracterisation de la classe des fonctions qui, dans une demi-bande donnée, peuvent être representées par des sommes d'exponentielles dont les exposants appartiennent à une suite Λ sussi donnée avec une certaine b-précision logarithmique. Je dis caracteriser dans le sens de trouver des proprietes de la fonstion necéssaires et suffisantes afin que la fonction appartienne à la classe.

Dans la section I j'étudie le probleme dans le cas où la demi-bande est horizontale et la suite des exposants est formée par des nombres réels non négatifs.

La section II est consacrée à l'étude du cas où la demi-bande est verticale et la suite Λ se compose de nombres réels (positifs ou négatifs). Malgré que, dans ce cas, on n'obtienne pas la caracterisation de la classe (car les propriétés sont necessaires, mais non suffisantes) les résultats obtenus sont peut-être les plus intéressants, même les lemmes qui servent à obtenir les théorèmes. Le second théoreme de cette section relie la b-précision logarithmique dans une demi-bande verticale avec le presque periodicité.

Le cas où l'angle de la demi-bande avec l'axe positif des abscisses est quelconque je l'étudie dans la section III.

Dans les trois premiers sections nous supposons toujours que la suite des exposants est formée par des nombres réels. Par contre, dans la section IV, je suppose que les exposants peuvent être complexes, Néanmoins j'introduis une condition à la limite sur les arguments des exposants, car je crois que sans aucune condition il est presque impossible d'obtenir des résultats dans la direction qui nous interesse.

La section V donne d'abord des corollaires des théorèmes antérieurs lorsque les exposants sont des nombres entiers et en deuxième lieu des hypothèses d'adhérence obtenues au moyen des résultats récents de B.R-Salinas [11].

Finalement, dans la section VI, j'étudie la distribution des points singuliers des fonctions représentées par des séries de Diriclet Ces résultats n'ont pas de relation avec les théorèmes antérieurs mais puisque la démonstration est semblable je les donne dans ce Mémoire.

- I -

1.1.- Notations et définitions.- On dit qu'une suite $\Lambda = \{\lambda_n\}$ de nombres non négatifs tels que

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \qquad \lim \lambda_n = \infty$$

est mesurable et de densite D si l'on a

$$\lim \frac{n}{\lambda_n} = D$$

Supposons que la suite Λ n'est pas mesurable, mais que l'on peut construire des suites mesurables qui la contiennent comme suite partielle. Alors la borne inférieure D des densités de ces suites sera appelée la densité maximum de Λ (voir Polya [6] ou Bernstein [1]) et on peut démontrer qu'il existe au moins une suite mesurable de densité D qui contient Λ comme siute partielle. D'autre part si $N(\lambda)$ désigne le nombre de λ_n qui sont inférieurs à λ, il est possible de démontrer que la densité maximum D de Λ peut s'exprimer par

$$(1.1.1) \qquad D = \lim_{x \to 1} \overline{\lim_{\lambda \to \infty}} \frac{N(\lambda) - N(x\lambda)}{\lambda - x\lambda}$$

D'ailleurs, puisque nous admettons la possibilité que $\lambda_1 = 0$, nous devons modifier légèrement la définition de la densité moyenne supérieure de Mandelbrojt [5]. Nous écrirons

$$(1.1.2) \qquad \overline{D}^{\bullet} = \overline{\lim} \frac{1}{\lambda} \int_1^{\lambda} \frac{N(x)}{x} dx$$

on voit facilement que lorsque $\lambda_1 > 0$, la nouvelle définition donne le même nombre que celle de Mandelbrojt et que par contre celle-ci, lorsque $\lambda_1 = 0$, donnerait toujours $\overline{D}^{\bullet} = \infty$ tandis que la nouvelle définition exprime comme toujours une propriété à l'infini de la suite Λ.

De (1.1.1) et de (1.1.2) il résulte $\overline{D}^{\bullet} \leq D$.

Nous allons maintenant définirune famille qui jouera un rôle très importants dans la suite, savoir: la famille $\Phi(\Lambda)$ des combinaisons linéaires de $\{e^{-\lambda_n s}\}$, cette famille sera appelée parfois la classe des polynomes de Dirichlet correspondants à la suite Λ.

D'autre part, nous réprésenterons par $K(\Lambda, H)$ la fermeture des fonctions $\varphi(s) \in \Phi(\Lambda)$ avec la topologie de la convergence uniforme dans l'ensemble H.

De même nous désignerons dans le plan $s = \sigma + it$ par $C(s_0, R)$ le cercle $|s - s_0| \leq R$ et par Δ la demi-bande horizontale $\{\sigma > \sigma_0, |t| < g(\sigma)\}$ où $g(\sigma)$ est une fonction contînue, à variation bornée et telle que $g(\sigma) > 0$ et $\lim g(\sigma) = g > 0$.

Finalement, si nous représentons par $\delta(x)$ l'intersection de Δ et de la bande verticale $x - b < \sigma < x$, on peut définir la b-precision logarithmique de la façon suivante: Si

$$\operatorname*{Inf}_{\varphi \in \Phi(\Lambda)} \sup_{s \in \delta(x)} |F(s) - \varphi(s)| \leq e^{-p(x)}$$

où p(x) est une fonction non-décroissante tnedant vers $+\infty$ ~~pour~~ (cette fonction peut être égale à $+\infty$ pour x suffisamment grand) on dira que les polynomes de Dirichlet ~~xxx~~ $\varphi(s) \in \Phi(\Lambda)$ représentent F(s) dans Δ avec une b-précision logarithmique p(x).

1.2.- Dans ce numéro je suppose que la suite Λ est telle que $\sum_{2}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$. Malgré que les résultats avec cette hypothese ont les mêmes conclusions qu'avec l'hypothese $\overline{D}^{\bullet} = 0$ nous étudierons ce cas, car les autres hypothèses peuvent être moins restrictives et le theorème peut être démontré d'une façon différente.

Nous posons

$$(1.2.1) \qquad q(z) = \begin{cases} z \prod_{2}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{\lambda_n}\right) = \sum b_n z^n & \text{si } \lambda_1 = 0 \\ \prod_{1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{\lambda_n}\right) = \sum b_n z^n & \text{si } \lambda_1 > 0 \end{cases}$$

$$(1.2.2) \qquad Q(R) = \int_0^{\infty} e^{-Rr} q(r)\,dr$$

comme nous supposons $\sum_{2}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$, la théorie des fonctions entières nous donne immédiatement que la fonction (1.2.1) est entière et que l'integrale (1.2.2) converge pour $R > 0$

Dans ce cas nous definirons l'hypothèse d'adhérence comme suit. Nous dirons que les fonctions $g(\sigma)$ et $p(\sigma)$ et la suite Λ vérifient l'hypothèse d'adhérence $\Omega(g(\sigma), p(\sigma), \Lambda)$ s'il existe une fonction continue non croisante $h(\sigma)$, avec $\lim h(\sigma) = h$, telle que

$$h < g, \qquad \log Q(\pi h(\sigma)) < p(\sigma) + M \qquad (M < \infty)$$

$$\int^{\infty} (p(\sigma) - \log Q(\pi h(\sigma))) \exp\left(-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{g(u) - h(u)}\right) d\sigma = \infty.$$

Nous pouvons voir facilement que dans cette définition on peut supposer en conservant toute la généralité, que $\lim h(\sigma) = h = 0$. Cette remarque est intéressante puisqu'elle nous permet de comparer cette hypothèse d'adhérence avec celles de Mandelbrojt [5].

En utilisant des méthodes semblables à celles que j'utilise pour démontrer la conclusion β de quelques résultats de mes articles [9] et [9], théorème V| nous pouvons démontrer

THÉORÈME I.- Si

1º Λ est telle que $\sum_{1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$

2º F(s) est une fonction holomorphe dans Δ et les combinaisons linéaires $\varphi(s) \in \Phi(\Lambda)$ représentent F(s) dans Δ avec une b-precision logarithmique $p(\sigma)$.

3º l'hypothèse $\Omega(g(\sigma), p(\sigma), \Lambda)$ est satisfaite alors. quel que soit le rectangle fini $\chi = \{s = \sigma + it \mid \sigma_0 < \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, [t| \leq \alpha\} \subset \Delta$, nous avons $F(s) \in K(\Lambda, \chi)$.

Soit $W(\Delta, \Lambda, b, \Omega)$ la classe des fonctions F(s) holomorphes dans Δ et telles que les combinaisons linéaires $\varphi(s) \in \Phi(\Lambda)$ les représentent dans Δ avec une b-précision logarithmique $p(\sigma)$ telle que l'hypothèse Ω soit satisfaite. Avec cette notation il résulte.

THÉORÈME II.- Si Λ est telle que $\sum_{1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$, afin que $F(s) \in W(\Delta, \Lambda, b, \Omega)$ il est necéssaire et suffisant que

(I): F(s) soit holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \sigma_0$

(II): Il existe une série de Dirichlet $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ et une suide de nombres naturels $\{n_k\}$ telles que

$$\lim S_{n_k}(s) = F(s)$$

uniformément dans tout domaine

$$\sigma \geq \sigma_0 + \varepsilon \qquad \left| \frac{t}{\sigma - \sigma_0 - \varepsilon} \right| \leq C$$

quelles que soient $\varepsilon > 0$ et $C > 0$, où $S_m(s) = \sum_{1}^{m} d_n e^{-\lambda_n s}$ et où la suite $\{n_k\}$ dépend uniquement de Λ.

Remarque.- Dans ce cas (I) et (II) ne sont pas independantes, (I) decoule de (II).

Démonstration.- Soit χ_1 le segment $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ de l'axe réel. Si nous supposonsque $F(s) \in W(\Delta, \Lambda, b, \Omega)$ suivant le théorème I nous aurons $F(S) \in K(\Lambda; \chi_1)$ et d'après un résultat de Schwartz [7, théorème II, p.57-58] il résulte que $F(s) \in K(\Lambda, \chi_2)$, où χ_2 est le segment $\sigma_1 \leq \sigma \leq \infty$ de l'axe réel.

Alors d'après un autre résultat de Schwartz [7, théorème fondamental I, p.38-39] $F(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$ et puisque σ_1 est arbitraire avec la seule condition $\sigma_1 > \sigma_0$, il résulte que $F(s)$ est holomorphe dans la totalite du demi-plan $\sigma > \sigma_0$.

Le même théorème de Schwartz prouve qu'il existe une série de Dirichlet $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ et une suite $\{n_k\}$ qui verifient (II) de notre théorème II.

D'autre part il est évident que si $F(s)$ vérifie (I) et (II) nous avons $F(s) \in W(\Delta, \Lambda, b, \Omega)$, c'est-à-dire que les (I) et (II) sont suffisantes.

1.3.- Lorsque l'on suppose que la suite est telle qu'elle peut vérifier $\sum_2^\infty \lambda_n^{-1} = \infty$ on doit modifier les conditions afin d'arriver a des conclusions semblables. Pour exprimer ces conditions il est necessaire de donner préalablement des définitions nouvelles

En premier lieu nous posons

$$\Lambda(z) = \begin{cases} z \prod_2^\infty \left(1 + \dfrac{z^2}{\lambda_n^2}\right) & \text{si } \lambda_1 = 0 \\ \prod_1^\infty \left(1 + \dfrac{z^2}{\lambda_n^2}\right) & \text{si } \lambda_1 > 0 \end{cases} \tag{1.3.1}$$

$$L(R) = \int_0^\infty e^{-Rr} \Lambda(r)\, dr \tag{1.3.2}$$

Ces definitions, quand $\lambda_1 > 0$, sont celles de Mandelbrojt [5]. Si la densité moyenne supérieure de la suite Λ est finie la fonction (1.3.1) est entière et l'intégrale (1.3.2) converge pour $R > \pi \bar{D}^{\bullet}$. D'ailleurs, comme nous supposons toujours que la densité maximum D de Λ est finie et puisque, comme nous avons dit deja, $\bar{D}^{\bullet} \leq D$, on voit que dans ce travail on aura toujours $\bar{D}^{\bullet} < \infty$.

Définitions de l'hypothèse d'adhérence.- Nous dirons que les fonctions $g(\sigma)$ et $p(\sigma)$ et la suite Λ vérifient l'hypothèse d'adhérence $A(g(\sigma), p(\sigma), \Lambda)$ s'il existe une fonction continue $h(\sigma)$ non croissante, avec $\lim h(\sigma) = \bar{D}^{\bullet}$, telle que

$$\bar{D}^{\bullet} < g \qquad \log L(\pi h(\sigma)) < p(\sigma) + M \qquad (M < \infty)$$

$$\int^{\infty} |p(\sigma) - \log L(\pi h(\sigma))| \exp\left(- \frac{1}{2} \int^{\sigma} \frac{du}{g(u) - h(u)} \right) d\sigma = \infty.$$

Avec ces nouvelles définitions on peut démontrer:

THÉORÈME III.- <u>Si</u>

1º Λ <u>est telle que</u> $\bar{D}^{\bullet} < \infty$

2º $F(s)$ <u>est holomorphe dans</u> Δ, <u>et les</u> $\varphi(s) \in \Phi(\Lambda)$ <u>représentent</u> $F(s)$ <u>dans</u> Δ <u>avec une b-précision logarithmique</u> $p(\sigma)$, <u>où</u> $b > 2\pi \bar{D}^{\bullet}$, <u>et</u> $g(\sigma) > \bar{D}^{\bullet}$ <u>et</u> $\lim g(\sigma) = g > \bar{D}^{\bullet}$

3º <u>l'hypothèse</u> $A(g(\sigma), p(\sigma), \Lambda)$ <u>est satisfaite</u>

<u>Alors, pour un domaine</u> $X \subset \Delta$ <u>borné et tel que la distance entre la frontière de</u> X <u>et la frontière de</u> Δ <u>est superieure à</u> $\pi \bar{D}^{\bullet}$, <u>nous aurons</u> $F(s) \in K(\Lambda, X)$.

Démonstration.- Dans un de mes Mémoires [9] nous avons démontré un résultat semblable avec la seule différence que la conclusion était $F(s) \in K(\{\lambda_n\} \cup \{-\lambda_n\}, X)$, c'est-à-dire que $F(s)$ appartenait à la fermeture des expressions de la forme

$$\sum_{1}^{m}(a_n e^{-\lambda_n s} + b_n e^{\lambda_n s})$$

et pour démontrer le ~~thkm~~ théorème III il faut seulement dans la démonstration de mon résultat anterieur [8, théorème déduit de V comme II se deduit de I] remplacer (1.3.1) par

$$\Lambda(z,\alpha_k) = \left(1 + \frac{z^2}{\lambda_k(\lambda_k + \alpha_k)} - \frac{\alpha_k z}{\lambda_k(\lambda_k + \alpha_k)}\right)\prod_{n\neq k}\left(1 + \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) =$$

$$= \sum c_n z^n$$

on peut démontrer, en premier lieu que si $0 \leq \alpha_k < 1$

(1.3.3) $$\sum |c_m| r^m \leq \Lambda(r + 1)$$

et si l'on écrit

$$\prod_{n\geq n_0 > k}\left(1 + \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum c_{2m,n_0} z^{2m}$$

et

$$\Psi_{n_0}(s) = \sum c_{2m,n_0} F^{(2m)}(s),$$

on peut démontrer aussi que

$$\lim_{n_0\to\infty} \Psi_{n_0}(s) = F(s)$$

uniformement dans χ. D'autre part, puisque nous utilisons $\Lambda(z,\alpha_k)$ au lieu de (1.3.1), nous pouvons arriver, compte tenu de (1.3.3) et en employant un méthode égale à celle de mon article [8], à démontrer

$$\psi_{n_0}(s) = a_k(\alpha_k)e^{-\lambda_k s} + b_k(\alpha_k)e^{(\lambda_k+\alpha_k)s} + \sum_{\substack{1 \\ n\neq k}}^{n_0}(a_n(\alpha_k)e^{-\lambda_n s}+b_n(\alpha_k)e^{\lambda_n s})$$

et comme $\psi_{n_0}(s)$ est indépenant de α_k et le raisonement peut être fait pour toute valeur de k, on voit finalement que tous les b_n doivent être nuls, et il s'en suit immediatement que

$$F(s)\in K(\Lambda, \chi).$$

Si nous représentons par H_x le demi-plan $\sigma > x$ on peut deduire du théorème III et de quelques resultats de Schwartz [7, p.135-136] le:

THÉORÈME IV.- <u>Si</u>

1º Λ <u>est telle que</u> $D < \infty$

2º <u>dans la définition de</u> Δ <u>la fonction</u> $g(\sigma)$ <u>vérifie</u> $g(\sigma) > \bar{D}^{\bullet}$ <u>et</u> $\lim g(\sigma) > \bar{D}^{\bullet}$, <u>en outre</u> $g(\sigma) > D + \bar{D}^{\bullet}$ <u>pour</u> $x \leq \sigma < x + \beta$ <u>avec</u> $\beta > 2\pi\bar{D}^{\bullet}$

<u>afin que</u> $F(s)\in W(\Delta, \Lambda, b, A)$ <u>avec</u> $b > 2\pi\bar{D}^{\bullet}$, <u>il est nécéssaire et suffisant que</u>

(I) $F(s)$ <u>soit holomorphe dans</u> $H_{x_1} \cup \Delta$, <u>où</u> x_1 <u>est le plus petit nombre réel tel que</u> $g(\sigma) > D$ <u>pour</u> $x_1 < \sigma < x + \frac{\beta}{2}$

(II) <u>Il existe une série de Dirichlet</u> $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ <u>et une suite</u> $\{n_k\}$ <u>de nombres naturels telles que</u>

$$\lim S_{n_k}(s) = F(s)$$

<u>uniformément dans tout domaine</u>

$$\sigma \geq x_1 + \varepsilon \qquad\qquad \left|\frac{t}{\sigma - x_1}\right| \leq C$$

~~pour~~ $\varepsilon > 0$ ~~et~~ $C > 0$ <u>quelconques, où</u> $S_m(s) = \sum_{1}^{m} d_n e^{-\lambda_n s}$ <u>et où la suite</u>

$\{n_k\}$ dépend uniquement de Λ .

Démonstration.- D'après le théorème III on peut voir facilement, en tenent compte de la condition 2º du théorème IV, que pour $\eta > 0$ suffisamment petite $F(s) \in K(\Lambda, \chi_0)$ où χ_0 est le domaine

$$|\sigma - x - \tfrac{\beta}{2}| < \eta \qquad\qquad |t| < \pi D + \eta .$$

Alors d'après un résultat connu (voir par ex. Kahane [4, Prop 8, p.85]) quel que soit $\varepsilon > 0$ on peut déterminer η suffisamment petite afin que, en représentant par χ_1 le domaine

$$|\sigma - x_1 - \varepsilon - \tfrac{\beta}{2}| < \eta \qquad\qquad |t| < \pi D + \eta$$

on puisse affirmer que $F(s) \in K(\Lambda, \chi_1)$.

Puisque χ_1 est un rectangle qui vérifie les conditions requises pour que la propriété P VIII de Schwartz [7, p.135-136] soit ~~XXXXXX~~ valable il résulte facilement que (I) et (II) sont nécéssaires afin que $F(s) \in W(\Delta, \Lambda, b, A)$ car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

La suffisance des (I) et (II) est. presque évidente.

Remarque.- On pourrait démontrer la nécésite de (I) et (II) en appliquant à χ_0 la propriéte P VIII de Schwarts et alors appliquer ensuite un théorème de Bernstein sur les points singuliers d'une fonction représentée par une série de Dirichlet [7, théorème IX, p. 136].

1.4.- Si au lieu de la condition

$$g(\sigma) > D + \overline{D}^{\bullet} \qquad \text{pour} \qquad x < \sigma < x + \beta \qquad \beta > 2\pi \overline{D}^{\bullet}$$

on ecrit

$$g(\sigma) > 2\overline{D}^{\bullet} \qquad \text{pour} \qquad x < \sigma < x + \beta_1 \qquad \beta_1 > 4\pi \overline{D}^{\bullet}$$

on peut obtenir, en utilizan dans la démonstration un résultat de Kahane [4, théorème 3, p. 96],un théorème semblable au théorème IV.

- II -

2.1.- Jusqu'à présent nous avons supposé que la demi-droite centrale de Δ est la partie $\sigma > \sigma_0$ de l'axe réel. Maintenant nous étudierons le même problème que ci-dessus mais en supposant que, au lieu de Δ , nous prenons

$$\Delta_\alpha = \{ s \mid s e^{-i\alpha} \in \Delta \}$$

c'est-à-dire nous supposerons que Δ a tourne d'un angle α .

Dans cette section nous étudierons le cas pour $\alpha = \pi/2$ que je crois le plus intéréssant et dans la section suivante nous étudierons les autres, savoir: $|\alpha| < \pi/2$ et $\pi/2 < |\alpha| \leq \pi$.

Afin de simplifier les notation nous écrirons Δ_i au lieu $\Delta_{\pi/2}$ D'ailleurs, nous supposerons aussi que dans la définition de Δ la fonction $g(\sigma)$ est égale a une constante $g > 0$, nous aurons donc

$$\Delta_i = \{ |\sigma| < g, t > t_0 \} .$$

D'autre part nous considérérons au lieu de $\Phi(\Lambda)$ la famille $\Phi'(\Lambda)$ des combinaisons linéaires de $\{ e^{\pm \lambda_n s} \}$ c'est-à-dire la classe formée par les expressions de la forme

$$\sum_1^m (a_n e^{-\lambda_n s} + b_n e^{\lambda_n s})$$

car en ce cas le signe des λ_n n'a pas d'importance.

D'après tout cela il résulte naturel de dire que si F(s) est holomorphe dans Δ_i et si

$$\inf_{\varphi \in \Phi'(\Lambda)} \sup_{\substack{x \leq t \leq x+h \\ s \in \Delta_i}} |F(s) - \varphi(s)| < e^{-p(x)}$$

les $\varphi(s) \in \Phi^{\bullet}(\Lambda)$ représentent $F(s)$ dans Δ_i avec une b-précision logarithmique $p(x)$, où $p(x)$ vérifie les mêmes conditions qu'anterieurement.

Finalement, nous donnerons une hypothèse d'adhérence plus simple que l'hypothése A, car dans ces cas il n'est pas nécessaire que la suite Λ intervienne dans l'hypothése d'adhérence.

Hypothèse d'adhérence $B(g,p(t))$.- Si pour $h>0$ suffisamment petite est satisfaite

$$\int^{\infty} p(t) \exp\left(-\frac{\pi}{2}\frac{t}{g-h}\right) dt = \infty$$

nous dirons que g et la fonction $p(t)$ vérifient l'hypothèse d'adhérence ~~XXgX~~ $B(g,p(t))$.

2.2.- Maintenant nous pouvons déjà énoncer le:

THÉORÈME V.- Si

1º Λ est telle que $D<\infty$

2º $F(s)$ est holomorphe dans Δ_i et les $\varphi(s) \in \Phi^{\bullet}(\Lambda)$ représentent $F(s)$ dans Δ_i avec une b-présision logarithmique $p(t)$ où $b>2\pi D$

3º l'hypothèse $B(g,p(t))$ est vérifiée

alors $F(s)$ est holomorphe dans la totalité de la bande $|\sigma|<g$.

2.3.- La démonstration du theorème V s'appuie sur deux lemmes, dans ce numéro nous démontrerons le premier:

LEMME 1.- Soit Λ une suite mesurable et de densité D. si nous posons

$$\Lambda_m(z) = \prod_{m}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

et si nous représentons par

$$\Psi_m(s) = \int_0^\infty \Lambda_m(z) e^{-zs} dz$$

la transformee de Laplace ($\Psi_m(s)$ représente aussi le prolongement analytique) alors à l'exterieur du domaine

$$(2.3.1) \qquad |t| < \pi D + \varepsilon \qquad |\sigma| < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

nous aurons uniformément

$$\lim_{m \to \infty} \Psi_m(s) = \frac{1}{s}$$

Démonstration du lemme 1.- En premier lieu il est facile de démontrer que en ecrivant

$$P_m(z) = \prod_1^m \left(1 - \frac{D^2 z^2}{n^2}\right)$$

et en posant $z = re^{i\alpha}$, pour $r > 0$ et $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$ se vérifie

$$|P_m(z)| > \min\left(1, \left|\frac{\sin \pi Dz}{\pi Dz}\right|\right)$$

pour tout entier positif m.

Par suite en appliquant un résultat de Bernstein |1, Note II, nº 3, p. 276| on peut déduire pour $r > r_\alpha$ et $\alpha \neq 0, \pi$

$$(2.3.2) \qquad |\Lambda_m(z)| < |\Lambda_2(z)| e^{\varepsilon |z|} / \min\left(1, \left|\frac{\sin \pi Dz}{\pi Dz}\right|\right)$$

quel que soit l'entier positif m.

D'autre part, d'après les propriétés connues de la transformation de Lapàace d'une fonction entière (voir par ex. Bernstein [1, Note III]) il est possible de déterminer quatre valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 telles que les

$$\psi_{m,j}(s) = \int_0^\infty e^{-i\alpha_j} \Lambda_m(xe^{-i\alpha_j}) e^{-sxe^{-i\alpha_j}} dx \qquad (j = 1,2,3,4) \tag{2.3.3}$$

sont convergentes respectivement dans quatre demi-plans l'union desquels recouvren la totalité des points exterieurs au domaine (2.3.1). en outre dans ces demi-plans les intégrales (2.3.3) représentent la transformée de Laplace ou son prolongement analytique.

De (2.3.2) il découle facilement qu'en déterminant convenablement les quatre valeurs de α, les $\psi_{m,j}(s)$ sont uniformément convergentes pour tout m entier positif et pour s intérieurm à un angle A_j, et en plus il résulte que la réunion de ces quatre angles recouvre la totalité dès points extérieurs à (2.3.1)- De la convergence uniforme des (2.3.3) par rapport a toutes les valeurs de m et du fait que pour toute valeur finie de z

$$\lim_{m\to\infty} \Lambda_m(z) = 1$$

il s'en suitm

$$\lim_{m\to\infty} \psi_{m,j}(s) = 1/s$$

uniformement pour $s \in A_j$. Et puisque $\psi_{m,j}(s)$ est le prolongement analytique de $\psi_m(s)$ il résulte, en tenant compte que la reunion des A_j recouvre la totalité du plan a l'exterieur de (2.3.1), que

$$\lim_{m\to\infty} \psi_m(s) = 1/s$$

uniformément à l'exterieur de (2.3.1).

Remarque.- Il serait intéréssant de savoir, lorsque Λ n'est pas mesurable mais a une densité maximum $D < \infty$ si l'on a

$$\lim_{m \to \infty} \Psi_m(s) = 1/s \tag{2.3.4}$$

aussi uniformément à l'extérieur d'un ouvert quelconque qui contient le diagramme conjugué des $\Lambda_m(z)$ (on voit que pour toute valeur de m le diagramme conjugué de $\Lambda_m(z)$ est le même) On sait que l'on peut voir facilement que la (2.3.4) a lieu uniformément à l'exterieur de tout ouvert qui contient le cercle

$$|s| \leq \pi D.$$

mais on sait aussi que ce cercle peut contenir des arcs de la frontière du diagramme conjugué dans son intérieur.

2.4.- Avant d'énoncer le deuxième lemme nous devons donner quelques notations. Soient k_1 et k_2 deux nombres réels et G_1 et G_2 deux ensembles de points du plan s; alors nous representerons par $k_1G_1+k_2G_2$ l'ensemble

$$\{s \mid s = k_1s_1 + k_2s_2,\ s_1 \in G_,\ s_2 \in G_2\}$$

en outre nous représenteronspar U le cercle $|s| \leq 1$ et par J le segment (-i π, +i π). Maintenant il est possible d'énoncer et démontrer le:

LEMME 2.- <u>Si</u>

1º <u>Λ a une densité maximum</u> $D < \infty$

2º <u>il existe un numéro</u> $\eta > 0$, <u>un ensemble ouvert</u> G_1 <u>et un domaine connexe</u> G_2 <u>tels que</u> F(s) <u>est holomorphe dans</u> $G_1 + G_2$ <u>et que</u>

$DJ + \eta U \subset G_1$.

3º il existe une suite $\{\mu_n\}$ mesurable et de densité D qui contient Λ, et une suite $\{n_k\}$ de nombres naturels avec $\lim n_k = \infty$ et telles que, en écrivant

$$C_k(z) = \begin{cases} z \prod\limits_{0<\lambda_n<\mu_{n_k}} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \prod\limits_{n_k}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right) & (0 \in \Lambda) \\ \prod\limits_{\lambda_n<\mu_{n_k}} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \prod\limits_{n_k}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right) & (0 \notin \Lambda) \end{cases}$$

et si nous représentons par $Q_k(s)$ la transformée de Laplace de $C_k(z)$, l'identité

$$\oint_\Gamma F(s + v) Q_k(v)\, dv \equiv 0$$

est valable pour $s \in G_2$, où Γ est la frontière de $DJ + \eta U$ alors $F(s)$ est la limite uniforme a l'intérieur de G_2 d'une suite de polynomes de Dirichlet $\varphi_n(s) \in \Phi^{\bullet}(\Lambda)$.

Démonstration.- Soit $W(s)$ une fonction entière d'ordre 1 et de ~~MMMM~~ tippe moyen avec le diagramme conjugué contenu dans $DJ + \eta U$, si

$$W(z) = \sum a_n z^n$$

la théorie de la transformation de Laplace nous permet de deduire que la transformée $v(s)$ de $W(z)$ peut être represantée à l'exterieur d'un cercle duffisamment grand par

$$V(s) = \sum a_n \frac{n!}{s^{n+1}}$$

De même la transformée de Laplace de

$$W_1(z) = \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_o^2}\right) W(z) = \sum \left(a_n - \frac{a_{n-2}}{\lambda_o^2}\right) z^n$$

pourra être represante par

$$V_1(s) = \sum \left(a_n - \frac{a_{n-2}}{\lambda_o^2}\right) \frac{n!}{s^{n+1}}. \tag{2.4.2}$$

En autre il est connu que aussi bien $V(s)$ que $V_1(s)$, sont holomorphes à l'extérieur du diagramme conjugué de $W(z)$, ou de $W_1(z)$, qui evidemment sont égaux.

D'autre part, d'après les hypothèses du lemme 2 la fonction $F(s + \beta u)$ est holomorphe par raport à chacune des trois variables lorsque $s \in G_2$, $u \in DJ + \eta U$ et $0 \leq \beta \leq 1$. Par suite les fonctions

$$f(\beta, s) = \oint_\Gamma F(s + \beta u) V(u) du$$

$$f_1(\beta, s) = \oint_\Gamma F(s + \beta u) V_1(u) du$$

sont holomorphes pour $s \in G_2$ et $0 \leq \beta \leq 1$ (évidemment quand nous disons qu'une fonction est holomorphe si $0 \leq \beta \leq 1$ nous voulons dire qu'elle est holomorphe dans un domaine ouvert qui contient le segment (0,1)).

D'ailleurs, si $|\beta|$ est très petit, $F(s + \beta u)$ sera holomorphe dans un cercle $|u| \leq R$ de rayon R suffisamment grand pour la validité des développements (2.4.1) et (2.4.2) et pour que la convergence de ces développements soit uniforme. Par suite la Théorie des résidus nous donne

$$\frac{1}{2\pi i} f(\beta, s) = \sum a_n F^{(n)}(s) \beta^n \tag{2.4.3}$$

$$\frac{1}{2\pi i} f_1(\beta, s) = \sum \left(a_n - \frac{a_{n-2}}{\lambda_o^2}\right) F^{(n)}(s) \beta^n. \tag{2.4.4}$$

De (2.4.3) et (2.4.4) il decoule

$$f_1(\beta,s) = f(\beta,s) - \frac{\beta^2}{\lambda_0^2}\,\frac{d^2 f(\beta,s)}{ds^2}$$

ce que symboliquement peut être écrit

$$f_1(\beta,s) = \left(1 - \frac{\beta^2}{\lambda_0^2}\,\frac{d^2}{ds^2}\right) f(\beta,s).$$

Par suite moyennant le prolongement analytique, lorsque β décrit le segment (0,1), on arrive à

$$f_1(1,s) \equiv \left(1 - \frac{1}{\lambda_0^2}\,\frac{d^2}{ds^2}\right) f(1,s). \tag{2.4.5}$$

Si nous fussions partis de $W_1(z) = zW(z)$ nous serions parvenus à

$$f_1(1,s) \equiv \frac{d}{ds}\, f(1,s).$$

Représentons maintenant par $M_k(s)$ la transformée de Laplace de

$$\prod_{m_k}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right)$$

et écrivons

$$h_k(s) = \oint_\Gamma F(s+u)Q_k(u)du$$

$$H_k(s) = \oint_\Gamma F(s+u)M_k(u)du$$

puisque d'après les conditions du lemme nous avons $h_k(s) \equiv 0$ pour $s \in G_2$ nous aurons en appliquant plusieurs fois la (2.4.5)

$$\frac{d}{ds}\prod_{0\leq\lambda_n<\mu_{n_k}}\left(1-\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{d^2}{ds^2}\right)H_k(s) = h_k(s)\equiv 0 \qquad \text{si } 0\in\Lambda$$

$$\prod_{\lambda_n<\mu_{n_k}}\left(1-\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{d^2}{ds^2}\right)H_k(s) = h_k(s)\equiv 0 \qquad \text{si } 0\notin\Lambda$$

c'est-à-dire il résulte finalement que $H_k(s)$ est un polynome de Dirichlet correspondant à la suite finie formée par les $\pm\lambda_n$ tels que $\lambda_n<\mu_{n_k}$.

D'autre part, d'apres le lemme 1, il se suit facilment que $\lim H_k(s) = F(s)$ uniformément pour $s\in G_2$. Ceci termine la démonstration du lemme 2.

2.5.- Démonstration du théorème V.- En premier lieu suivant la condition 2º pour toutr $t_1>t_0$, on peut déterminer un $\varphi_{t_1}(s)\in\mathfrak{F}^{\bullet}(\Lambda)$ tel que, pour $|\sigma|<g$ et $t_1<t<t_1+b$ avec $b>2\pi D$, on a

(2.5.1) $$|F(s)-\varphi_{t_1}(s)|<2e^{-p(t_1)}$$

et par suite on peut choisir η suffisamment petite de façon que, si $|\sigma_1|<g-\eta$, alors, si $s\in\sigma_1+it_1+i\pi D+DJ+\eta U+i\eta$ la (2.5.1) se vérifie. Il en résulte que, si $s_1=\sigma_1+it_1+i\eta$

(2.5.2) $$\left|\oint_\Gamma\Big(F(s_1+i\pi D+u)-\varphi_{t_1}(s_1+i\pi D+u)\Big)Q_k(u)du\right|<Ke^{-p(t_1)}$$

Mais d'autre part il est connu que d'aprés la théorie de la transformation de Laplace nous avons

(2.5.3) $$\oint_\Gamma\varphi(s_1+i\pi D+u)Q_k(u)du=0$$

pour tout $\varphi(s)\in\mathfrak{F}^{\bullet}(\Lambda)$.

De (2.5.2) et (2.5.3) on obtient

$$\left| \oint_{\Gamma} F(s_1 + i\pi D + u) Q_k(u)\,du \right| < K e^{-p(t_1)}$$

Et si l'on choisi $\eta < h$, où h est la quantité qui intervient dans la définiton de la condition $B(g,p(t))$, il résulte d'après Mandelbrojt [5,théorème 2.2.VI]

$$\oint_{\Gamma} F(s + u) Q_k(u)\,du \equiv 0$$

pour $|\sigma| < g - h$, $t > \pi D + t_o$. Et en appliquant le lemme 2 il résulte qu'à l'intérieur de cette demi-bande, F(s) est la limite d'une suite de polynomes de Dirichlet qui $\in \Phi^{\bullet}(\Lambda)$ et cette limite est uniforme dans tout domaine borné intérieur à la demi-bande citée.

En appliquant un résultat de Schwartz [7, Prop. PVIII, p. 135-136] déjà utilisé antérieurement et tenant compte que h peut être aussi petite que l'on veuille il résulte que F(s) est égale a la somme de deux fonctions $F_1(s)$ et $F_2(s)$, dont la première $F_1(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\sigma \geqslant -g$ et $F_2(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\sigma < +g$. Alors la conclusion du théorème découle de $F(s) = F_1(s) + F_2(s)$.

2.6.- THÉORÈME VI.- *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème V on suppose en outre que l'indice de condensation δ de Λ vérifie $\delta < g$, alors F(s) sera presque-périodique dans la titalité de la bande $|\sigma| < g - \delta$.*

Démonstration.- Lorsque dans le nº antérieur nous avons utilisé le résultat de Schwartz nous aurons pu voir qu'il existe une serie de Dirichlet

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s} \tag{2.6.1}$$

et une suite $\{n_k\}$ telles que, quels que soient $\varepsilon > 0$ et $K > 0$, nous avons

$$\lim S_{n_k}(s) = F_1(s)$$

uniformément à l'interieur du domaine

$$\sigma > -g + \varepsilon \qquad \left|\frac{t}{\sigma + g}\right| < K$$

où $S_m(s) = \sum_1^m a_n e^{-\lambda_n s}$.

D'autre patr, d'aprés un résultat de Polya-Bernstein on ne déminue la generalité en supposant maintenent que Λ est mesurable car dans le cas contraire on peut former une suite mesurable qui contient Λ et qui aura la densité D et l'indice de condensation δ.

Puisque nous savons que $F_1(s)$ est holomorphe pour $\sigma > -g$ en raisonnant comme Gallie [2] nous obtiendrons pour les a_n de (2.6.1) la borne

$$|a_n| \leqslant A e^{\lambda_n(-g+\varepsilon+\delta)}$$

où $\varepsilon > 0$ est arbitraire. De cette borne on deduit immédiatement, puisque nous supposons que Λ est de densité maximum finie, que la série (2.6.1) est absolument convergente pour $\sigma > -g + \delta$.

Comme par le même méthode on peut démontrer aussi que $F_2(s)$ est la somme d'une série $\sum b_n e^{\lambda_n s}$ absolument convergente pour $\sigma < g - \delta$. et puisque $F(s) = F_1(s) + F_2(s)$ un resultat classique de la théorie des fonctions presque-periodiques démontre le théoreme.

Genuys [3] arrive à un resultat dont la conclusion est la même que du théoreme VI. Neanmoins les hypothéses poses par Genuys sont beaucoup plus restrictives que les hypothéses du théoreme Vi. Notammnt Genuys suppose que les λ_n sont des entiers et avec cette hypothése on a peur voir que F(s) est periodique et non seulement presque-periodique com affirme la conclusion de Genuys.

- III -

3.1.- Dans cette section nous étudierons les cas où dans Δ_α on suppose $0<|\alpha|<\pi/2$ ou $\pi/2<|\alpha|\leq\pi$. Nous commencerons pour le premier cas; néanmoins à la fin de cette étude nous reviendrond au cas $\alpha = 0$ car les résultats de la section II nous permettent d'obtenit des résultats différants de ceux de la section I. À vrai dire il -y-a des cas où les résultats qui suivent sont aussi valables pour $\alpha = 0$, comme nous verrons ensuite.

3.2.- Nous verrons en premier lieu que, si $|\alpha|<\pi/2$ et $|\alpha|$ a une valeur très proche à $\pi/2$, dans le théorème qui correspond au théorème IV on peut suprimer la condition

$$(3.2.1) \qquad g(\sigma)>\bar{D}^{\bullet} + D \qquad \text{pour} \qquad x<\sigma<x+\beta$$

car avec les autres conditions il suffit que $|\alpha|$ soit très proche à $\pi/2$ pour qu'il existe une valeur x' tel que pour tout $x_o>x'$ l'on peut determiner un t_o de façon que le domaine

$$\{|\sigma - x|\leq \pi\bar{D}^{\bullet},\ |t - t_o|\leq D + \bar{D}^{\bullet}\}$$

soit interieur à Δ_α.

Il est evident que pour des valeurs particulières de D, $\bar{D}^{\bullet}$ et g la condition 2º du théorème suivant peut être aussi verifié pour toutes les valeurs de α tels que $|\alpha|<\pi/2$. Dans ce cas le théorème est valable pour toutes ces valeurs, meme $\alpha = 0$.

THÉORÈME VII.- Si

1º Λ a une densité maximum $D<\infty$

2º $|\alpha|<\pi/2$, $D\cos\alpha< g - \bar{D}^{\bullet}$

~~afin que~~ $F(s)\in W(\Delta_\alpha,\Lambda,b,A)$ ~~avec~~ $b>2\pi\bar{D}^{\bullet}$, il est nécéssaire et suffisant que

(I) $F(s)$ soit holomorphe dans $\Delta_\alpha \cup H_x$ où x dépend de Δ_α (c'est-à-dire de $g(u)$ et α)

(II) il existe une serie de Dirichlet $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ et une suite $\{n_k\}$ de nombres naturels telles que

$$\lim S_{n_k}(s) = F(s)$$

uniformement dans tout domaine

$$\sigma \geq x + \varepsilon \qquad \left|\frac{t}{\sigma - x}\right| \leq C$$

pour $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ quelconques, où $S_m(s) = \sum_1^m d_n e^{-\lambda_n s}$ et où $\{n_k\}$ dépend uniquement de Λ.

Démonstration.- Je ne donnerai pas la démonstration de ce théorème car elle est tres semblable à celle du théorème IV. En réalite ~~pour~~ pour démontrer la nécessité des conditions (I) et (II) il fout seulement demontrer qu'il existe un domaine χ ouvert qui contient un segment $\{\sigma = x, \ |t - t_o| \leq \pi D\}$ et tel que

$$F(s) \in K(\Lambda, \chi)$$

Le théorème III suffit pour le démontrer.

3.3.- Comme nous avons déjà dit le résultat de la section II nous permet aussi d'obtenir un résultat dans la ligne du theorème IV mais avec des conditions différantes:

THÉORÈME VIII.- Si

1º Λ a une densité maximum $D < \infty$

2º $|\alpha| < \pi/2$, $2D \cos\alpha < g$

afin que $F(s) \in W(\Delta_\alpha, \Lambda, b, A)$, avec $b > 2\pi D|\sin\alpha|$, il est nécéssaire et

<u>suffisant que (I) et (II) du théorème VII soient satisfaites</u>

Démonstration.- Au moyen des lemmes 1 et 2 de la section II on peut démontrer qu'il existe un domaine ouvert χ qui contient le segment

$$\sigma = x \qquad\qquad |t - t_0| \leq \pi D$$

tel que

$$F(s) \in K(\Lambda, \chi)$$

et la démonstration continue comme dans la fin de la démonstration du théorème IV.

Remarque 1.- À vrai dire dans les théorèmes VII et VIII, pour obtenir les correspondents au théorème IV, nous aurons dû remplacer la condition (3.2.1) par

$$g(u) > D \cos\alpha + \overline{D}^{\bullet} \quad \text{pour} \quad x < u < x + \beta$$

ou par

$$g(u) > 2D \cos\alpha \quad \text{pour} \quad x < u < x + \beta$$

respectivement pour le théorème VII ou VIII, et avec

$$u = \mathcal{R}(se^{-i\alpha}) \qquad\qquad s \in \Delta_\alpha$$

et où aussi respectivement, $\beta > 2\pi(D|\sin\alpha| + \overline{D}^{\bullet})$ ou $\beta > 4\pi D|\sin\alpha|$. En réalite dans le théorème VII et VIII nous avons suppose que ces conditions sont satisfaites pour des valeurs de u suffisamment grandes.

Remarque 2.- <u>Si</u>

$$\cos\alpha < \overline{D}^{\bullet}/D \tag{3.3.1}$$

la condition

$$D \cos\alpha \geq g - \overline{D}^{\bullet}$$

est plus restrictive que

$$2D \cos\alpha < g.$$

De même si

(3.3.2) $$\sin\alpha < \overline{D}^{\bullet}/D$$

la condition

$$b > 2\pi\overline{D}^{\bullet}$$

est plus restrictive que

$$b > 2\pi D \sin\alpha.$$

En outre ont voit que les conditions (3.3.1) et (3.3.2) ne peuvent pas être satisfaites simultanément que si

$$\overline{D}^{\bullet} > \frac{D}{\sqrt{2}}$$

Par suite uniquement en ce cas le théorème VIII peut contenir pour quelques valeurs de α le théorème VII.

3.4.- Maintenant nous étudierons le cas $\pi/2 < |\alpha| \leq \pi$ et comme dans le cas $|\alpha| < \pi/2$, nous obtiendrons deux théorèmes selon que l'on utilise le théorème III ou les résultats de la section II dans la démonstration.

En utilisant le théorème III on peut obtenir le:

THÉORÈME IX.- <u>Si</u>

1º Λ <u>a une densité maximum</u> $D < \infty$

2º $\pi/2 \leq |\alpha| \leq \pi$ <u>et</u> $D|\cos\alpha| < g - \overline{D}^{\bullet}$

<u>afin que</u> $F(s) \in W(\Delta_\alpha, \Lambda, b, A)$, <u>avec</u> $b > 2\pi\overline{D}^{\bullet}$, <u>il est nécéssaire et suffi-</u>

sant que

(I) $F(s)$ soit entière

(II) il existe une série de Dirichlet $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ et une suite $\{n_k\}$ de nombres naturels telles que

$$\lim S_{n_k}(s) = F(s)$$

uniformément dans tout domaine

$$\sigma > x \qquad \left|\frac{t}{\sigma - x}\right| < C$$

pour tout x et pour tout $C > 0$, où $S_m(s) = \sum_{1}^{m} d_n e^{-\lambda_n s}$ et où $\{n_k\}$ dépend uniquement de Λ.

La démonstration utilise le théorème III et une méthode semblable à celle de la démonstration des théorèmes IV, et VII.

3.5.- De même en utilisant les lemmes de la section II nous pouvons enoncer le:

THÉORÈME X.- Si

1º Λ a une densité maximum $D < \infty$

2º $\pi/2 < |\alpha| \leq \pi$ et $2D|\cos\alpha| < g$

afin que $F(s) \in W(\Delta, \Lambda, b, A)$, avec $b > 2\pi D|\sin\alpha|$, il faut que (I) et (II) du théorème IX soient satisfaites.

Comme nous avons dit, la démonstration utilise les lemmes de la section II et on procède comme dans la demonstration du théorème VIII.

Remarque 1.- Comme dans le théorème I dans les théorèmes IX et X les conditions (I) et (II) ne sont pas independentes.

Remarque 2.- Si au lieu de la b-precision logarithmique dans les théorèmes IX et X on utilise la précision logarithmique les conditions (I) et (II) ne sont pas suffisantes.

- IV -

4.1.- Jusqu'à present nous avons consideré uniquement le cas où $\Lambda = \{\lambda_n\}$ est une suite formée par des nombres réels non négatifs. Maintenant nous étudierons les cas où les λ_n peuvent être des nombres complexes. Malgré qu'il ne s'agit pas de définitions admises unanimément nous définirons la densité maximum de $\Lambda = \{\lambda_n\}$ comme la densité maximum de $\{|\lambda_n|\}$ et de meme la densité moyenne súpérieure de Λ sera celle de $\{|\lambda_n|\}$.

En outre nous écrirons

$$G(r) = \begin{cases} z \prod_{2}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{|\lambda_n^2|}\right) & \text{si } \lambda_1 = 0 \\ \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{|\lambda_n^2|}\right) & \text{si } |\lambda_1| > 0 \end{cases}$$

$$L^{\bullet}(R) = \int_0^{\infty} e^{-Rr} G(r)\,dr.$$

Avec ces notations nous pouvons donner la définition de l'hypothèse d'adhérence qui nous permettra d'obtenir pour le cas où la suite Λ est formée par des nombres complexes des résultats tout a fait semblables aux théorèmes que nous avons établis dans les sections I et III.

Hypothèse d'adhérence $A_1(g(\sigma), p(\sigma), \Lambda)$.- Nous dirons que les fonctions $g(\sigma)$ et $p(\sigma)$ et la suite Λ satisfont l'hypothèse d'adhérence $A_1(g(\sigma), p(\sigma), \Lambda)$ s'il existe une fonction continue non croissante $h(\sigma)$, avec $\lim h(\sigma) = \overline{D}^{\bullet}$, telle que

$$\overline{D}^{\bullet} < g \qquad \log L^{\bullet}(\pi h(\sigma)) < p(\sigma) + M \qquad (M < \infty)$$

$$\int^{\infty} (p(\sigma) - \log \mathbb{L}^{\bullet}(\pi h(\sigma))) \exp\left(- \frac{1}{2} \int^{\sigma} \frac{dx}{g(x) - h(x)}\right) d\sigma = \infty.$$

On voit facilement que cette hypothèse est égale a l'hypothèse A si dans celle-ci on remplace $\mathbb{L}(R)$ par $L^{\bullet}(R)$.

Par le même méthode que nous utilisons pour démontrer le théorème III il peut être démontre.

THÉORÈME XI.- Si

1º Λ est formée par des nombres complexes et a une densité moyenne superieure $\overline{\overline{D}}^{\bullet} < \infty$

2º $F(s)$ est holomorphe dans Δ telle que $g(\sigma) > \overline{\overline{D}}^{\bullet}$ et les combinaisons linéaires $\varphi(s) \in \Phi(\Lambda)$ représentent $F(s)$ dans Δ avec une b-precision logarithmique $p(\sigma)$, où $b > 2\pi\overline{\overline{D}}^{\bullet}$

3º l'hypothèse $A_1(g(\sigma), p(\sigma), \Lambda)$ est satisfaite alors pour tout domaine $\chi \subset \Delta$ et tel que la distance entre la frontière de χ et la frontière de Δ est supérieure à $\pi\overline{\overline{D}}^{\bullet}$, nous auronss $F(s) \in K(\Lambda, \chi)$.

Déjà dans [8] nous avions démontré un résultat semblable mais dans lequel la conclusion était $F(s) \in K(\{\lambda_n\} \cup \{-\lambda_n\}, \chi)$ c'est-~~MMMM~~ -à-dire que $F(s)$ est uniformement dans χ égale a la limite d'une suite de fonctions de la forme

$$\sum_{1}^{m} (a_n e^{-\lambda_n s} + b_n e^{\lambda_n s})$$

Pour démontrer maintenant que toutes les b_n sont nulles on procède comme dans la démonstration du théorème III.

4.2.- Je crois que si l'on ne pose pas quelque restriction sur la distribution des arguments des λ_n il est presque impossible d'obtenir des résultats dans la direction qui nous intérese. Nous supposerons donc que

(4.2.1) $$\overline{\lim}\ |\arg \lambda_n| \leq \theta < \pi/2$$

Kahane dans un resultat dont nous nous servirons, suppose que

(4.2.2) $$|\arg \lambda_n| \leq \theta < \pi/2 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Nous allons voir que, si dans le resultat de Kahane [4, théorème 2', p. 97] on suppose simplement (4.2.1) au lieu de (4.2.2), le resultat ne change pas essentiellement pour notre but. Déjà Kahane dit que lorsque l'on remplace la condition (4.2.2) par (4.2.1) la première partie de son résultat ne change pas. Nous démontrerons le résultat complet avec cette modification d'hypotheses.

THÉORÈME XII.- Si Λ est une suite de nombres complexes avec une densité maximum $D < \infty$, si

(4.2.1) $$\overline{\lim}\ |\arg \lambda_n| \leq \theta < \pi/2$$

et si Ω est un domaine ouvert et connexe qui contient l'intersection du cercle $|s| < \pi D$ et de la bande $|\sigma| < \pi D |\sin \theta|$, alors une fonction $f(s)$ quelconque holomorphe dans Ω et telle que $f(s) \in K(\Lambda, \Omega)$, peut être prolongée analytiquement dans tout l'angle

$$|\arg s| < \frac{\pi}{2} - \theta$$

et dans chaque angle

(4.2.3) $$|\arg s| < \gamma < \frac{\pi}{2} - \theta$$

il exist un $n_o = n_o(\gamma)$ tel que $f(s) - \sum_{1}^{n_0} d_n e^{-\lambda_n s}$ est bornée dans (4.2.3) et peut être uniformément approximée dans (4.2.3) par des sommes de la forme

$$\sum_{n_0+1}^{m} a(\lambda_n)e^{-\lambda_n s}$$

où $d_n = \lim\limits_{\varphi \to f} a(\lambda_n)$, cette limite existe toujours car les $a(\lambda_n)$ sont les coefficients de $e^{-\lambda_n s}$ dans les combinaisons linéaires $\varphi(s)$ qui tendent vers f(s) uniformément dans Ω.

Demonstration .- D'aprés (4.2.3) $\theta < \frac{\pi}{2} - \gamma$ at par suite selon (4.2.1) il existe un $n_0 = n_0(\gamma)$ tel que

$$|\arg \lambda_n| < \frac{\pi}{2} - \gamma \qquad \text{pour} \qquad n > n_0 \tag{4.2.4}$$

D'ailleurs si nous posons $d_n = \lim\limits_{\varphi \to f} a(\lambda_n)$ on voit facilement que la fonction

$$f(s) - \sum_{1}^{n_0} d_n e^{-\lambda_n s} \tag{4.2.5}$$

sera, uniformement dans Ω , égale à la limite d'une suite de fonctions de la forme

$$\sum_{n_0+1}^{m} a(\lambda_n)e^{-\lambda_n s} \tag{4.2.6}$$

et puisque que pour toutes les λ_n qui interviennent dans ces expressions est verifiée la (4.2.4) en apliquant le resultat de Kahane on voit que la fonction (4.2.5) est holomorphe dans l'angle $|\arg s| < \gamma$ et que pour $\eta > 0$ quelconque la fonction (4.2.5) est bornée dans $|\arg s| < \gamma - \eta$ et dans ce même angle elle est uniformément approchée par les expressions (4.2.6).

Puisque γ est arbitraire avec le seule condition

$$\gamma < \frac{\pi}{2} - \theta$$

et compte tenu que $\eta > 0$ est aussi arbitraire, les resultats ci-dessus démontrent le théorème XII.

4.3.- Les théorèmes XI et XII nous permettront de démontrer

THÉORÈME XIII.- Si

1º Λ est telle que $\overline{\lim}\,|\arg \lambda_n| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ et $D < \infty$

2º $g(\sigma) > \overline{D}^*$ pour toute valeur $\sigma > \sigma_0$ et $g(\sigma) > \overline{D}^* + D$ dans un intervale $\sigma_0 \leq \sigma_1 < \sigma < \sigma_1 + 2\pi(\overline{D}^* + D|\sin\theta|)$

afin que $F(s) \in W(\Delta, \Lambda, b, A_1)$ avec $b > 2\pi\overline{D}^*$, il est nécessaire et suffissant que

(I) $F(s)$ soit holomorphe dans $\Delta \cup H$, où H est un angle $|\arg(s - s')| < \frac{\pi}{2} - \theta$ (où s' dépend de Δ)

(II) il existe une serie de Dirichlet $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ et une suite $\{n_k\}$ de nombres naturels telles que

$$\lim S_{n_k}(s) = F(s)$$

uniformement dans tout angle

$$|\arg(s - s'')| \leq \gamma$$

pour tout $\gamma < \frac{\pi}{2} - \theta$, où s'' dépend de Δ et de Λ, $S_m(s) = \sum_1^m d_n e^{-\lambda_n s}$ et où $\{n_k\}$ dépend uniquement de Λ.

Démonstration.- La suffisance des conditions (I) et (II) est comme toujours évidante.

Pour en démontrer la nécéssite on peut commencer pour remarquer quesi $F(s) \in W(\Delta, \Lambda, b, A_1)$ d'après le théorème XI et la condition 2º du théorème XIII il existe un domaine ouvert connexe Ω qui contient l'intersection de $|s - \sigma'| \leq \pi D$ et de $|\sigma - \sigma'| \leq \pi D|\sin\theta|$ où σ' dépend de Δ, et dans lequel $F(s) \in K(\Lambda, \Omega)$.

Par suite, en appliquant le téorème, XII on voit en premier lieu que la condition (I) est satisfaite.

D'ailleurs, d'après le meme théorème XII on voit que $F(s)$ peut être approchée uniformément dans tout angle

(4.3.1) $$|\arg(s - \sigma')| \leq \gamma < \frac{\pi}{2} - \theta$$

au moyen des mêmes polynomes de Dirichlet que dans Ω . D'autre part d'après des résultats connus, il est facile de voir que pour chaque n fixe le coéfficient a_n qui multiplie $e^{-\lambda_n s}$ converge vers une limite d_n. Si nous démontrons que la serie $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ est ultraconvergente uniformément dans tout angle

$$|\arg(s - s_1)| \leq \gamma < \frac{\pi}{2} - \theta$$

où s_1 dépend de Δ et Λ, la fonction vers laquelle converge est F(s), d'après un résultat connu (voir par ex. Kahane [4. prep.7, p.84].

Pour démontrer l'ultraconvergence de la serie

$$\sum d_n e^{-\lambda_n s}$$

nous utileserons une méthode qui, avec quelques modifications, a servi déjà dans d'autres cas semblables.

De même que, pour le cas où les λ_n sont réels, nous pouvons supposer que la suite Λ est contenue dans une suite mesurable de densité D et en outre, puisque nous pouvons choisir arbitrairement les arguments des nouveaux nombres introduits afin que la suite soit mesurable, nous pouvons supposer que (4.2.1) est satisfaite par la nouvelle suite. D'autre part rien ne nous empêche de supposer que cette suite est la Λ car il suffit d'adjoindre les nouveaux nombres et de supposer que les d_n correspondents sont nuls.

Soit

$$\Lambda(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

(ici je suppose $|\lambda_1| > 0$ car dans ce cas il ne diminuit pas la généralite) et soit $\varphi_n(s)$ la transformée de Laplace de

$$\frac{-\Lambda(\lambda)}{(\lambda+\lambda_n)\Lambda'(\lambda_n)}$$

nous aurons

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{-\lambda_k s}\psi_n(s)ds = \delta_{k,n}$$

où C est un cercle $|s| = R > \pi D$. Par suite, si nous supposons que s_o est un point tel que tout le cercle $|s - s_o| = R$ est intérieur à l'angle (4.3.1), nous aurons

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(s_o \mp u)\,\psi_n(u)du = \lim a_n e^{-\lambda_n s_o} = d_n e^{-\lambda_n s_o}$$

D'ailleurs, selon un théorème d'Hadamard où ces généralisations on peut définir une suite $\{R_k\}$ et un nombre $\eta >$ O tels que sur la frontière des domaines

(4.3.2) $\qquad |\arg z| < \theta + \eta \qquad\qquad R_k < |z| < R_{k+1}$

on peut écrire

$$|\Lambda(z)| > |e^{-\varepsilon z/2}|$$

où $\varepsilon >$ O est un nombre détermine. Si nous représentons par Γ_k la frontière de (4.3.2) et par g_k l'ensemble des λ_n interieurs à Γ_k, en supposant, ce qui est toujours possible, que $R_{k+1} > 2R_k$, il résulte que si $-\lambda$ est dans un angle exterieur a Γ_k,

$$\left|\sum_{\lambda_n\in g_k}\frac{\Lambda(\lambda)e^{-\lambda_n\varepsilon}}{(\lambda+\lambda_n)\Lambda'(\lambda_n)}\right| \leq \left|\Lambda(\lambda)\oint_{\Gamma_k}\frac{e^{-z\varepsilon}dz}{2\pi i(\lambda+z)\Lambda(z)}\right| \leq$$

$$|\Lambda(\lambda)|\,\varepsilon_k$$

où $\sum \varepsilon_k < \infty$

D'ailleurs, on peut voir très facilement qu'à l'exterieur d'un cercle suffisamment grand la transformée de Laplace d'une fonction entiere de type moyen d'ordre 1 peut être exprimée au moyen des intégrales prises sur des demi-drôites extérieures à un angle d'ouverture plus petit que π. Par suite on peut exprimer

$$\sum_{\lambda_n\in g_k}\psi_n(s)e^{-\lambda_n\varepsilon}$$

au moyen des intégrales prises sur des demi-droites exterieures à $-\Gamma_k$. De tout ceci il résulte que

$$\left|\sum_{\lambda_n\in g_k}\psi_n(s)e^{-\lambda_n\varepsilon}\right|\leq N\varepsilon_k$$

à l'exterieur d'un cercle de rayon suffisantment grand R'. Par suite, si le point s est tel que le cercle de centre s et de rayon R' est interieur à l'angle (4.3.1), il découle

$$\left|\sum_{\lambda_n\in g_k}d_n e^{-\lambda_n\varepsilon}e^{-\lambda_n s}\right|\leq M\varepsilon_k$$

Cette inégalite démontre que la série $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ est ultraconvergente dans un angle $|\arg(s-s_1)|<\gamma$ et pour démontrer qu'elle est uniformément ultraconvergente dans ce même angle il suffit de voir que M pour des valeurs de K suffisamment grandes dépend du maximum de $F(s)-\sum_1^{n_0}d_n e^{-\lambda_n s}$ dans un angle interieur à (4.3.1) dans lequel elle est bornée, et par suite M est aussi bornée indépendamment de la valeur de k et de s. On a démontre donc l'uniforme ultraconvergence de la série dans tout angle intérieur à

$$|\arg(s-s_1)|<\gamma$$

~~comme est arbitraire~~. Ceci démontre le théorème.

4.4.- De même que pour le cas des λ_n réels, pour le cas où ils peuvent être complexes et vérifient (4.2.1) on peut étudier aussi ce que devienent les résultats lorsque l'on remplace Δ par Δ_α.

On voit en premier lieu que si $|\alpha| < \frac{\pi}{2} - \theta$, on peut obtenir un resultat semblable au théorème XIII;

Au contraire, si

$$\frac{\pi}{2} - \theta \leq |\alpha| \leq \frac{\pi}{2} + \theta$$

on peut voir facilement que les conditions (I) et (II) sont encore nécéssaires afin que $F(s) \in W(\Delta_\alpha, \Lambda, b, A_1)$, mais qu'elles ne sont pas suffisantes. Dans ce cas un résultat que je crois avoir quelque intéret est le suivant:

TÉORÈME XIV.- <u>Si</u>

1º Λ <u>est telle que</u> $\overline{\lim} |\arg \lambda_n| \leq \theta < \pi/2$ <u>et</u> $D < \infty$

2º $\pi/2 + \theta \geqq |\alpha| \geqq \pi/2 - \theta$ <u>et</u> $g(u) > \overline{D}^* + D$

<u>alors toute</u> $F(s) \in W(\Delta_\alpha, \Lambda, b, A)$, <u>où</u> $b > 2\pi\overline{D}^*$, <u>est holomorphe dans l'angle</u> P_α

$$\alpha > \arg(s - s_0) > -\frac{\pi}{2} + \theta \quad \underline{\text{pour}} \quad \alpha > 0$$

<u>ou</u>

$$\alpha < \arg(s - s_0) < \frac{\pi}{2} - \theta \quad \underline{\text{pour}} \quad \alpha < 0$$

<u>où</u> s_0 <u>dépend uniquement de</u> Δ_α <u>et</u> Λ, <u>et il existe une série de Dirichlet</u> $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ <u>et une suite</u> $\{n_k\}$ <u>de nombres naturels telles que</u>

$$\lim S_{n_k}(s) = F(s)$$

<u>uniformément dans tout angle</u>

$$|\arg(s - s'')| \leq \gamma < \frac{\pi}{2} - \theta$$

<u>pour tout</u> $s'' \in P_\alpha$, <u>où</u> $S_m(s) = \sum_1^m d_n e^{-\lambda_n s}$ <u>et où</u> $\{n_k\}$ <u>dépend uniquement de</u> Λ.

Démonstration.- La démonstration est semblable a celle du théorème XIII et par suite ne la donnerons pas.

4.5.- Quand $\pi \geq |\alpha| > \frac{\pi}{2} + \theta$ on peut démontrer le

THÉORÈME XV.- Si

1º Λ est telle que $\overline{\lim} |\arg \lambda_n| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ et $D < \infty$

2º $\pi \geq |\alpha| > \frac{\pi}{2} + \theta$ et $g > \overline{D}^{*} + D$

afin que $F(s) \in W(\Delta_\alpha, \Lambda, b, A_1)$, où $b > 2\pi \overline{D}^{*}$, il est nécéssaire et suffisant que

(I) $F(s)$ soit entière

(II) égale a la (II) du théorème XIII avec la seule différance qu'ici s'' peut être quelconque.

Démonstration .- De même que dans le théorème antérieur, et pour les mêmes raisons, je ne donnerai pas la démonstration.

Remarque.- Dans ce theorème comme dans le théorème I les conditions (I) et(II) ne sont pas independantes.

- V -

5.1.- Les théorèmes II, IV, VII, VIII, IX et X ont des corollaires lorsque l'on suppose que les λ_n sont des nombres entiers non négatifs qui peuvent être interessants dans quelques applications. Pour être bref je ne donnerai que l'enoncé du corollaire du théorème IV.

COROLLAIRE DU THÉORÈME IV.- Soit $\{n_k\}$ une suite de nombres entieres tels que $0 \leq n_k < n_{k+1}$ de dénsite maximum $D < \infty$. Représantons par Φ_0 la classe des combinaisons linéaires de $\{z^{n_k}\}$. Si f(s) est holomorphe dans le domaine $\{0 < |z| < 1,\ |\arg z| < \pi\gamma\}$ où $\gamma > \overline{D}' + D$ et si

$$\operatorname*{Inf}_{\psi \in \Phi_0} \ \operatorname*{Sup}_{\substack{\beta r < |z| < r \\ |\arg z| < \pi\gamma}} |f(z) - \psi(z)| < e^{-p(r)}$$

où $\log \beta < -2\pi\overline{D}'$ et en supposant

$$\int_0 p(r) r^{\omega - 1} dr = \infty \qquad \text{où} \qquad \omega > \frac{1}{2(\gamma - \overline{D}')}$$

alors f(z) est holomorphe dans tout le cercle $|z| < 1$.

Si au lieu de considerer le théorème IV on considère un des théorèmes où intervient Δ_α avec $\alpha \neq 0, \pi$ au lieu de domaine $\{0 < |z| < 1,$ $|\arg z| < \pi\gamma\}$ on aura un domaine dont la frontière est formée par des spirales logarithmiques. De même, lorsque $\alpha > \pi/2$ la conclusion sera : f(z) est entière.

5.2.- Soit

$$P(s', R, F) = \operatorname*{Inf}_{\varphi \in \Phi(\Lambda)} \ \operatorname*{Sup}_{s \in C(s', R)} |F(s) - \varphi(s)|$$

où comme toujours, C(s',R) est le cercle $|s - s'| \leq R$. Alors, d'après des résultats de R-Salinas [11] et [12] on peut énoncer l'hypothèse d'adhépence suivante.

Définition de l'hypotèse d'adhérence $B(g(\sigma),P,\Lambda)$.- Nous dirons que l'hypothèse $B(g(\sigma), P, \Lambda)$ est satisfaite si pour un R tel que $\pi \bar{D}^{\bullet} < R < \pi g(\sigma)$

$$\log P(s,R,F) \leq H(\sigma) \qquad \text{si} \qquad s \in \Delta$$

$$\log P(s_0,R,F) < -S(\sigma) \qquad \text{si} \qquad s_0 = \sigma + i\pi a_0(\sigma)$$

où $a_0(\sigma)$ est une fonction continue, à variation bornée pour $\sigma_0 < \sigma < \infty$ et telle que $a_0(\sigma) < g(\sigma)$ et $\lim a_0(\sigma) < g - \frac{R}{\pi}$), avec les conditions

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} H(\sigma) e^{-b(\sigma)} d\sigma < \infty$$

et

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} S(\sigma) e^{-b(\sigma)} d\sigma = \infty$$

où

$$b(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{a(\sigma)}$$

où $a(\sigma)$ est une fonction continue à variation bornée et telle que

$$\lim a(\sigma) < 2g - \frac{R}{\pi}.$$

D'après les résultats de R-Salinas on peut donner à cette hypothèse une autre forme qui n'est pas équivalante mais je l'aise au lecteur le soin de l'enoncer.

Dans la pluspart des théorèmes antérieurs on peut remplacer les hypothèses d'adhérence correspondentes par les hypothèses de la forme de la B et avec des petites modifications les résultats restent valables . Neanmoins pour appliquer ~~xxx~~ ces hypothéses aux théorèmes V et

VI il faut, dans la définition de P, remplacer le cercle $C(s',R)$ par un domaine ouvert qui contient le segment $\{\sigma = 0,\ |t| \leq i\pi D\}$.

- VI -

6.1.- Un théorème classique de Bernstein affirme que lorsque la suite Λ est formée par des nombres réels non-negatifs et a une densité maximum D tout segment de longuer $2\pi D$ de la droite d'holomorphie a, au moins, un point singulier de la fonction représantee par la série $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ Malgré l'intérêt de ce théorème il est évident qu'il ne permet pas de connaitre la situation, ou encore mieux, la distribution des points singuliers au dela de la droite d'holomorphie. Dans cette direction Mandelbrojt a donné un théorème très interessant. Les méthodes employées dans ce Mémoire nous permetront de démontrer dans cette section deux théorèmes qui étudient la distribution des points singuliers au delà de la droite d'holomorphie mais qui ne sont pas contenus dans le résultat de Mandelbrojt.

6.2.- Lorsque le centre d'un cercle $C(s_0,R)$ décrit un arc de Jordan tel que à une extrémite $C(s_0,R)$ est dans le demi-plan de convergence et à l'autre extrémité $C(s_0,R)$ est dans le domaine E, on dit que E est relié au demi-plan de convergence par un canal de largeur 2R.

Le premier des théorèmes que nous voulons démontrer peut être énonce:

THÉORÈME XVI.- <u>Soit</u> H <u>l'abscisa d'holomorphie de</u>

(6.2.1) $$F(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

<u>si</u> Λ <u>est telle que</u> $0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1}$ <u>et a une densite maximum</u> $D < \infty$, <u>alors il existe au moins une singularité de</u> $F(s)$ <u>dans tout rectangle</u> $\{\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 < H,\ t_1 \leq t \leq t_2\}$ <u>tel que</u> $\sigma_2 - \sigma_1 = 2\pi \overline{D}^*$, $t_2 - t_1 = 2\pi(\overline{D}^* + D)$ <u>et qui peut être relie avec le demi-plan de convergence de (6.2.1) par un canal de largeur</u> $> 2\pi\overline{D}^*$ <u>dans lequel</u> $F(s)$ <u>est holomorphe.</u>

Remarque.- On suppose pour simplifier que (6.2.1) a un demi-plan de convergence, mais, pour la validité des résultats il suffit qu'elle ait un demi-plan d'ultraconvergence.

Démonstration.- Par le même méthode utilisée plusieurs fois on peut arriver à démontrer qu'il existe un domaine ouvert Ω qui contient le segment vertical

$$\left\{ \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},\ t_1 + \pi \overline{D}^* \leq t \leq t_2 - \pi \overline{D}^* \right\}$$

et tel que

$$F(s) \in K(\Lambda, \Omega)$$

et puisque la longueur ~~du segment~~ vertical de Ω est $> 2\pi D$ d'après un resultat de Schwartz, aussi plusieurs fois utilisée la fonction F(s) sera holomorphe dans le demi-plan

$$\sigma > \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} < H$$

en contradiction avec la définition de H.

6.3.- THÉORÈME XVII.- Mêmes conditions que dans le théorème XVI, alors F(s) a au moins un point singulier dans tout cercle $|s - \sigma_0 - it_0| \leq 2\pi\overline{D}^*$ tel que $\sigma_0 < H - \pi D$, et qui peut être relié avec le demi-plan de convergence de (6.2.1) par un canal de largeur $> 2\pi\overline{D}^*$ dans lequel F(s) est holomorphe.

La meme remarque que pour le théorème XVI est aussi valable pour le théorème XVII et la démonstration est presque le même en utilisant au lieu du résultat de Schwartz un résultat de Kahane [4, théorème 3, pag. 96].

BIBLIOGRAPHIE

1.- Bernstein, V. - Leçons sur les progres récents de la théorie des series de Dirichlet (Paris 1933).

2.- Gallie, T.M. - Mandelbrojt's inequality and Dirichlet series with complex exponents (Trans.Am. Soc. vol.90, p. 57-72, 1959).

3.- Genuys, F. - Sur les fonctions presque périodiques dans une bande (C.R. Acad. Paris t. 234, p.1939-1941, 1952).

4 Kahane, J.P. - Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles (Ann.Ins. Fourier, t.V, p.39-130, 1955).

5 Mandelbrojt, S. - Series adhérentes. Régularisation des suites. Applications (Paris 1952).

6.- Polya, G.- Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzrreihen (Math. Zeitschr. t.29, 1929).

7.- Schwartz, L. - Etude des sommes d'exponentielles (Actualites Scientifiques et Industrielles 959, Deuxième édition).

8.- Sunyer Balaguer, F. - Aproximación ~~XXXXXXXX~~ de funciones por sumas de exponenciales (Collectanea Math. vol.V, p. 241-267, 1952.

9.- Sunyer Balaguer, F. - Sur des cas où l'inégalité fondamentale de M.S. Mandelbrojt peut être précisée (C.R.Acad. Paris t.249,p.2472-2474, 1959).

10.- Leont'ev, A.F. - On functions represented by series of Dirichlet polynomials (Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seiya Mat. t, 13,p.221-230).

11.- Rodriguez-Salinas, B. - Crecimiento de una funcion analitica en un angulo (Collectanea Math. vol.XIII, p.197,1961).

12.- Rodriguez-Salinas, B. - Crecimiento de una función analitica en una banda de anchura no constante (Actas de la tercera Reunión de Mat. Españoles p. 29, 1963).

Barcelona Juin 1965.

I set

$$q(z) = \begin{cases} z\prod \left(1 + \frac{z}{n}\right) = b_n z^n & \text{if } {}_1 = 0 \\ \prod \left(1 + \frac{z}{n}\right) = b_n z^n & \text{if } {}_1 \quad 0 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

$$Q(R) = e^{-Rr} q(r)\,dr \tag{1.2.2}$$

since $\quad {}_n^{-1} \quad \infty$ the theory of the entire functions allows us to state immediatly that the function (1.2.1) is entire, and that the integral (1.2.2) converges for R 0.

Definition of the adherence hypotheses (g( ),p( ),).- We shall say that the functions g( ) and P( ), and the sequence satisfy the hypothesis (g( ),p( ),) if there exists a continuous non-increasing function h( ), with lim h( ) = h, such that

$$h \quad g, \qquad \log Q(\ h(\ )) \quad p(\ ) + M \qquad (M \quad \infty$$

$$|p(\ ) - \log Q(\ h(\ ))| \exp\left(-\frac{1}{2}\ \frac{du}{g(u) - h(u)}\right) d \quad = \infty .$$

We can easily see that in this definition it may be supposed without loss of generality that lim h( ) = h = 0. This remark is interesting since it allows us to compare this adherence hypothesis with Mandelbrot's | |.