Avec meilleurs voeux
pour les Pâques

W. Sierpiński

Sur un théorème de S. S a k s concernant les suites infinies de fonctions continues.

Par
W. S i e r p i ń s k i (Varsovie)

Dans mon livre Hypothèse du continu, Warszawa - Lwów 1934 (Monografie Matematyczne t.IV) à la p.47 se trouve le théorème 8 suivant:

Théorème. Si un ensemble Q jouit de la propriété L, il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), \ldots$ continues, uniformément bornées et telles que pour chaque suite infinie croissante d'indices $m_1, m_2, \ldots$, la suite $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), \ldots$ est convergente tout au plus en une infinité dénombrable de points de Q.

[On dit qu'un ensemble E jouit de la propriété L (de Lusin) si tout ensemble parfait non dense (donc aussi tout ensemble de 1-re catégorie) contient un ensemble au plus dénombrable de points de E]

Au renvoi 1) on lit que ce théorème et sa démonstration sont dus à S. S a k s.

Le commencement de la démonstration est le suivant.

Comme on voit sans peine, on peut définir (par induction) une suite infinie de fonctions continues d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), \ldots$ telle que l'on ait $0 \leq f_n(x) \leq 1$ pour tout n naturel et pour x réel, et qui remplisse en outre la condition suivante:

(1) quel que soit $n=1,2,\ldots$, il existe pour tout intervalle I de longueur $> \frac{1}{n}$ [1] et pour tout indice $k < n$ un nombre réel $x \in I$ tel que $\left| f_n(x) - f_k(x) \right| \geq \frac{1}{2}$.

Or, nous allons montrer que chaque suite $f_n(x)$, $(n=1,2,\ldots)$ de ce genre (qui est uniformément bornée par définition) satisfait à la thèse du théorème.

En ce qui concerne la démonstration ultérieure, M. Sunyer ~~Bxxxxxxxxx~~ B a l a g u e r a remarqué qu'elle n'est pas correcte, vu qu'elle utilise une proposition fausse d'après laquelle de toute suite in-

---

1) Dans mon livre est $< \frac{1}{n}$, ce qui est sans doute une faute d'impression.

finie de fonctions continues et uniformément bornées convergente dans un ensemble dénombrable D on pourrait extraire une suite qui converge uniformément dans D. ~~Ilxxx~~ [Il est évident qu'on ne peut pas extraire une telle suite de la suite $g_n(x)=x^n (n=1,2,\ldots)$ qui converge dans l'ensemble $D=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots,\frac{k}{k+1},\ldots\right\}$ et où les fonction $g_n(x)$ sont continues et uniformément bornés dans D.]

Stanislas S a k s a été tué par la Gestapo en novembre de 1942; ces manuscrits n'existent pas. Moi, j'ai perdu dans les flammes ma bibliothèque et mes archives en 1944. Il est donc impossible d'établir aujourdhui comment c'était avec la démonstration de S. S a k s. En tout cas il est étonnant que seulement 23 années après l'apparition de la première édition de mon livre cité, grace à M. Sunyer Balaguer, on a trouvé la faute.

Heureusement, non seulement le théorème de S. Saks est vrai, mais même la suite $f_n(x) (n=1,2,\ldots)$ définie plus haut satisfait à la thèse de son théorème. Le but de cette Note est de prouver cela.

Tout d'abord j'expliquerai comment on peut définir par l'induction la suite $f_n(x) (n=1,2,\ldots)$ satisfaisant à la condition (1).

Soit $f_1(x) = 0$ pour x réels. Soit maintenant n un indice > 1 et supposons que nous avons déjà défini les fonction $f_k(x)$ pour $k < n$. Soit j un entier et k un nombre naturel $<$ n. Posons

$$f_n\left(\frac{j}{2n}+\frac{k}{2n^2}\right)=f_k\left(\frac{j}{2n}+\frac{k}{2n^2}\right)\pm\frac{1}{2},$$

en prenant le signe + si $f_k\left(\frac{j}{2n}+\frac{k}{2n^2}\right) \leq \frac{1}{2}$ et le signe − si $f_k\left(\frac{j}{2n}+\frac{k}{2n^2}\right) > \frac{1}{2}$. La fonction $f_n(x)$ est ainsi définie aux points $\frac{j}{2n}+\frac{k}{2n^2}$, ~~mbj~~ où j est un entier et k un nombre naturele $<$ n, et on peut la définir pour tous les x réels de sorte qu'elle soit linéaire entre deux points consécutifs pour lesquels nous l'avons défini. On vérifie sans peine que la suite $f_n(x) (n=1,2,\ldots)$ ainsi obtenue satisfait à la condition (1).

Soit maintenant $m_1, m_2, \ldots$ une suite infinie croissante de nombres naturels. Je démontrerai que l'ensemble C de points de convergence de la suite infinie $f_{m_i}(x) (i=1,2,\ldots)$ est de première catégorie.

Supposon, en effet, que l'ensemble C n'est pas de première catégorie.

Les fonctions $f_{m_i}(x)$ $(i=1,2,\ldots)$ étant continues, l'ensemble C est un $F_{\sigma\delta}$[1], donc un ensemble borelien. Il en résulte que l'ensemble C jouit de la propriété de Baire[2], donc est de la forme $C=G-P+R$, où G est ouvert et P et R sont des ensembles de 1-re catégorie.[3] L'ensemble C n'étant pas, par hypothèse, de 1-re catégorie, il en résulte que l'ensemble G n'est pas vide, donc, comme ouvert, contient un intervalle d_o. On a donc $d_o-P\subset C$. L'ensemble P étant de 1-re catégorie, on a $P=N_1+N_2+\ldots$, où N_i $(i=1,2,\ldots)$ sont des ensembles non denses.

La fonction $f_{m_1}(x)$ étant continue, il existe un intervalle $\delta_1\subset d_o$ tel que l'oscillation de la fonction $f_{m_1}(x)$ est $< 1/8$ dans δ_1. Posons $p_1 = 1$. L'ensemble N_1 étant non dense, il existe un intervalle $d_1\subset\delta_1$ tel que $N_1 d_1 = 0$.

Je définirai maintenant par l'induction deux suites infinies d'intervalles fermés $\delta_1,\delta_2,\ldots$ et $d_1,d_2,\ldots$ et une suite infinie d'indices croissants $p_1,p_2,\ldots$ comme il suit.

Soit k un nombre naturel et supposons que nous avons déjà défini les intervalles δ_k et d_k et l'indice p_k. La suite infinie $m_1,m_2,\ldots$ étant croissante, il existe un indice $s>p_k$ tel que le nombre $\frac{1}{m_s}$ est plus petit que la longueur de l'intervalle d_k. Posons $p_{k+1}=s$. La longueur de l'intervalle d_k est donc $>\frac{1}{m_{p_{k+1}}}$ et, d'après (1) il existe dans d_k un nombre réel y tel que $\left|f_{m_{p_{k+1}}}(y)-f_{m_{p_k}}(y)\right|>\frac{1}{2}$. La fonction $f_{m_{p_{k+1}}}(x)$ étant continue au point y, et vu que $y\in d_k$, il existe un intervalle $\delta_{k+1}\subset d_k$ contenant y et tel que l'oscillation de la fonction $f_{m_{p_{k+1}}}(x)$ est $<1/8$ dans δ_{k+1}. Or, l'ensemble N_{k+1} étant non dense, il existe un intervalle $d_{k+1}\subset\delta_{k+1}$ tel que $d_{k+1}N_{k+1} = 0$.

Les intervalles $d_o\supset\delta_1\supset d_1\supset\delta_2\supset d_2\supset\ldots$ et les indices $p_1<p_2<\ldots$ sont ainsi définis par l'induction. Il existe donc un nombre

---

1) Voir F.Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, p.397

2) Voir par exemple C.Kuratowski, Topologie I, 3-me édition, Warszawa 1952, p.56

3) ibidem p.54

$t\in d_0\delta_1 d_1\delta_2 d_2\ldots$ D'après $d_i N_i = 0$ pour $i = 1,2,\ldots$ on a donc (d'après $P = N_1+N_2+\ldots$), $t\in d-P\subset C$. La suite $f_{m_{p_k}}(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ est donc convergente. Or, soit k un nombre naturel donné. L'oscillation de la fonction $f_{m_{p_k}}$ est $< 1/8$ dans δ_k et, à plus forte raison, dans δ_{k+1}, et l'oscillation de la fonction $f_{m_{p_{k+1}}}$ est $< 1/8$ dans δ_{k+1}.

Or, comme $y\in\delta_{k+1}$ et

$$\frac{1}{2}\leq\left|f_{m_{p_{k+1}}}(y)-f_{m_{p_k}}(y)\right|\leq\left|f_{m_{p_{k+1}}}(y)-f_{m_{p_{k+1}}}(x)\right|+\left|f_{m_{p_{k+1}}}(x)-f_{m_{p_k}}(x)\right|+$$
$$+\left|f_{m_{p_k}}(x)-f_{m_{p_k}}(y)\right|$$

pour $x\in\delta_{k+1}$, on trouve que $\left|f_{m_{p_{k+1}}}(x)-f_{m_{p_k}}(x)\right|>\frac{1}{4}$ pour $x\in\delta_{k+1}$.

Comme $t\in\delta_{k+1}$, pour $k = 1,2,\ldots$, on a donc

$$\left|f_{m_{p_{k+1}}}(t)-f_{m_{p_k}}(t)\right|>\frac{1}{4}\quad\text{pour } k = 1,2,\ldots$$

et la suite $f_{m_i}(t)$ $(i = 1,2,\ldots)$ est divergente.

L'hypothèse que l'ensemble C n'est pas de 1-re catégorie implique donc une contradiction.

L'ensemble C est donc de 1-re catégorie et, vu la propriété de l'ensemble Q, il en résulte que l'ensemble QC est au plus dénombrable.
Le théorème de S. Saks se trouve ainsi démontré.
En publiant cette démonstration je rends hommage à la mémoire du mathématicien éminent, Stanislas S a k s qui a péri il y a 15 ans.

Varsovie, le 24 octobre 1957.

Le théorème de S.Saks résulte aussi tout de suite du théorème suivant qui m'a été communiqué par M.R.S i k o r s k i après que j'ai rédigé la démonstration qui précède

Théorème de R.Sikorski. Nous dirons que la suite $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ de fonctions continues (d'une variable ~~réliex~~ réelle) jouit de la propriété S, s'il existe un nombre $a>0$ et une suite infinie de nombres positifs $a_1, a_2, \ldots$ convergente vers 0 et telle qu'il existe pour tout intervalle de longueur $> a_n$ et tout nombre naturel $k < n$ un nombre x de cet intervalle, tel que

$$|f_n(x)-f_k(x)| > a.$$

Thèse: **L'ensemble de points de convergence d'une suite** $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ jouissant de la propriété S est de 1-re catégorie (sur la droite).

Démonstration (de R.Sikorski). L'ensemble

$$A_{k,m,n} = \underset{x}{E}\left[\,|f_{m+n}(x)-f_m(x)| > \frac{1}{k}\right]$$

est ouvert. Soit k un nombre naturel tel que $a > 1/k$. Il résulte de la propriété S que l'ensemble ouvert

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{k,m,n}$$

est dense sur la droite. L'ensemble

$$\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{k,m,n}$$

est donc résiduel (c'est - à - dire complémentaire d'un ensemble de 1-re catégorie). Donc aussi l'ensemble

$$A = \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{k,m,n}$$

est résiduel, en tant que sur-ensemble d'un ensemble résiduel Or, comme

$$A = \underset{x}{E}\left[\sum_k \prod_m \sum_n \left(|f_{m+n}(x)-f_m(x)| > \frac{1}{k}\right)\right],$$

A est l'ensemble de points de divergense de la suite $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$, et le théor~~e~~ème de R.Sikorski se trouve démontré.

Il est évident que toute suite infinie extraite d'une suite jouissant de la propriété S jouit de cette propriété.

Il existe des suites infinies uniformément bornées de fonctions continues $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ jouissant de la propriété S : telle est par exemple, comme on le vérifie sans peine (pour $a=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $a_n=2\pi/2^n$) la suite $f_n(x) = \sin 2^n x$. Telle est aussi toute suite satisfaisant à la condition (1).

Le théorème de R. Sikorski entraîne donc le théorème de S. Saks.