Soit (λ_n) une suite croissante de nombres positifs, de densité supérieure finie

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{n}{\lambda_n} = D^{\bullet} < \infty .$$

Posons

$$\Lambda_m(z) = \prod_{m}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \qquad (m = 1,2,\ldots) ;$$

désignons par $\Phi_m(s)$ la transformée de Laplace-Borel de $\Lambda_m(z)$ et par $h(\alpha)$ son indicatrice (qui ne dépend pas de m)

$$h(\alpha) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{r} \log \left|\Lambda_m (re^{i\alpha})\right| .$$

Soit $K(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, l'ensemble convexe formé par les points $\sigma + it$ qui satisfont, quel que soit α,

$$\sigma \cos \alpha - t \sin \alpha \leq h(\alpha) + \varepsilon .$$

A l'extérieur de $K(\varepsilon)$, on a, uniformément ,

$$\lim_{m \to \infty} \Phi_m(s) = \frac{1}{s} .$$

<u>Démonstration</u> : Posons $z = re^{i\alpha}$.

1°) Pour $\frac{\pi}{4} \leq |\alpha| \leq \frac{3\pi}{4}$, on a, quel que soit n,

$$\left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| \geqslant 1 ;$$

donc

$$\left|\Lambda_m(z)\right| = \left|\Lambda_1(z)\right| / \prod_1^{m-1} \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| \leq \left|\Lambda_1(z)\right| .$$

2°) Pour $0 \leqslant |\alpha| < \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4} < |\alpha| \leqslant \pi$, on a

$$\left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right|^2 = \frac{r^4}{\lambda_n^4} - \frac{2r^2}{\lambda_n^2} \cos 2\alpha + 1 ;$$

a) Si $r^2 \leq 2\lambda_m^2 \cos 2\alpha$, on a pour $n \geq m$

$$\left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| \leq 1 ,$$

et

$$|\Lambda_m(z)| \leq 1 .$$

b) Si $r^2 > 2\lambda_m^2 \cos 2\alpha$, on a pour $n \leq m-1$

$$\left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| > 1 ,$$

et

$$|\Lambda_m(z)| = |\Lambda_1(z)| \Big/ \prod_1^{m-1} \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| \leq |\Lambda_1(z)| .$$

On a donc dans tous les cas

$$|\Lambda_m(z)| \leq |\Lambda_1(re^{i\alpha})| + 1.$$

Supposons que $s = \sigma + it$ soit situé dans le demi-plan

$$(1) \qquad \sigma \cos\alpha - t \sin\alpha \geq h(\alpha) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

On a

$$\Phi_m(s) - \frac{1}{s} = \int_0^\infty (\Lambda_m(re^{i\alpha}) - 1) e^{-se^{i\alpha}r} e^{i\alpha} \, dr ,$$

$$\left| \Phi_m(s) - \frac{1}{s} \right| \leq \int_0^R \left| \Lambda_m(re^{i\alpha}) - 1 \right| \left| e^{-se^{i\alpha}r} \right| dr + \int_R^\infty \left[|\Lambda_1(re^{i\alpha})| + 2 \right] \left| e^{-se^{i\alpha}r} \right| dr .$$

Pour $0 \leq r \leq R$, on a , uniformément

$$\lim_{m \to \infty} \Lambda_m(re^{i\alpha}) = 1 .$$

Il en résulte que l'on a, uniformément dans le demi-plan défini par (1)

$$\lim_{m \to \infty} \Phi_m(s) = \frac{1}{s} ;$$

comme il est possible de recouvrir le domaine extérieur à $K(\varepsilon)$ par un nombre fini de demi-plans de la forme (1), le lemme est démontré.