Barcelone, le 4 Mai 1966

Melle Aimée Baillette
9 rue Jean Manalt
66 Perpignan

Ma chère Collègue,

Comme je vous ai promis dans ma lettre du 1 Març je vous écris de nuveau pour signaler deux consequences de la reponse que vous avez donnée a ma question. Plus précisément je vous indique les deux consequences qui m'ont fait poser la question, car c'est par elles qu'il m'interessais de savoir si la reponse était affirmative.

D'abord je dois définir quelques notations:

Soit la demi-bande

$$\Delta = \{s \mid s = \sigma + it,\ \sigma > 0,\ |t| < \pi g(\sigma)\}$$

où g( ) est une fonction à variation bornée pour $0 < \sigma < \infty$. Etant donné un nombre réel θ nous écrirons

$$\Delta_\theta = \{s \mid se^{-i\theta} \in \Delta\}.$$

D'autre part soit $\Lambda = \{\lambda_n\}$ une suite de nombres réels tous differents et tels que $\lim |\lambda_n| = \infty$ et considerens la famille $\Phi(\Lambda)$ des polynomes de Dirichlet correspondants a Λ, c'est-à-dire les expressions de la forme

$$\sum_1^m a_n e^{-\lambda_n s}.$$

Alors il se peut que l'on puisse définir une suite

$\{\mu_n\} \supset \{|\lambda_n|\}$ et telle que si B est le diagramme conjugué de

$$\prod \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right)$$

il existe un ouvert $\Omega \supset B$ et tel que $re^{i\theta} + \Omega \subset \Delta_\theta$ pour toute valeur de $r > 0$ (où $re^{i\theta} + \Omega$ est la transformée de Ω par la translation $re^{i\theta}$). Avec cette condition on peut généraliser la b-precision logarithmique et définir la Ω -precision logarithmique de la manière suivante:

Si F(s) est holomorphe dans Δ_θ et si

$$\inf_{\varphi \in \Phi(\Lambda)} \sup_{s \in re^{i\theta}+\Omega} |F(s) - \varphi(s)| \leq e^{-p(r)}$$

où p(r) est une fonction non décroissante qui tend vers + ∞, alors nous dirons que les $\varphi(s) \in \Phi(\Lambda)$ représentent F(s) dans avec une Ω -precision logarithmique p(r).

Dans cette définition on pourrait aussi supposer que Ω dépend de r. Mais cela complique les énonces et les démonstrations; neanmoins il-y-à de cas où est interessant.

Une première consequence de la réponse que vous avez donnée a la question dont je vous avais parlé est que l'on peut remplacer la b-precision logarithmique par la Ω -precision logarithmique dans presque tous les résultats que j'ai exposé a Oberwolfach et qui paraîtront prochainement dans un article a Collectanea Math. Dans cet article je pose la question qui vous avez résolu. Dans une note au pied de page, écrite pendant l'impression, je signale que vous avez répondu afirmativement a elle.

Une deuxieme conséquence de votre generalisation est que dans mon article de Collectanea Math. vol. XV, pag.93-103 dont je vous ai donnée un tiré-à-part, le lemme 2 avec des petites modifications évidentes est aussi valable lorsque la suite $\{\mu_n\}$ n'est pas mesurable.

En outre en précisant légérement les autres parties de la démonstration on peut obtenir:

Lemme 2.- Soit $\{\mu_n\}$ une suite telle que

$$\overline{\lim} \frac{n}{\mu_n} = D^* < \infty$$

et répresentons par B le diagramme conjugué de $M_k(z) = \prod_k^{\infty} (1 - \frac{z^2}{\mu_n^2})$ si:
s

Hypothèse 1.- Il existe un nombre $\eta > 0$, un ouvert G_1 et un domaine connexe G_2 tels que F(s) est holomorphe dans $G_1 + G_2$ et se vérifie $B + \eta U \subset G_1$ (notations comme dans mon article)

Hypothèse 2.- Il existe une suite de nombres naturels $\{n_k\}$ ($\lim n_k = \infty$) telle que en écrivant

$$C_k(z) = \begin{cases} z \prod_{0<|\lambda_n|<\mu_{n_k}} (1 - \frac{z}{\lambda_n}) M_{n_k}(z) & 0 \in \Lambda \\ \prod_{|\lambda_n|<\mu_{n_k}} (1 - \frac{z}{\lambda_n}) M_{n_k}(z) & 0 \notin \Lambda \end{cases}$$

et en représentant par $Q_k(s)$ la transformée de Laplace de $C_k(z)$, l'identité

$$\oint_{\Gamma} F(s + u)Q_k(u)du \equiv 0$$

est satisfaite pour $s \in G_2$, où Γ est la frontière de $B + \eta U$.

Conclusion.- Alors F(s) est la limite uniforme à l'interieur de G_2 d'une suite de polynomes de Diriclet correspondents a $\Lambda = \{\lambda_n\}$.

Je me plais à ajouter que si vous desirez que la demonstration de votre reponse à ma question soit publiée a Collectanea Math. vous n'avez qu'à me faire parvenir votre texte et je m'en chargerai or, si votre dessein est de la publier ailleurs, vous pouvez agir à votre gré car il n'y a pas d'inconveniant de ma part

Ma cousine Angels vient de recevoir votre carte postale. Elle ma prie de vous dire Merci. Elle serait certainement charmée de pouvoir visiter Sant Vicens avec vous.

Recevez aissi les voeux de Maria et l'assurance de ma meilleure estime.

F. Sunyer Balaguer
Angel Guimera 36, pral. 2º
Barcelona - 17, Espagne