Barcelona 3 novembre de 1957

Amic Corominas,

No li he escrit fins avui puix no havia tingut temps de posar a punt la demostracio del cas general. Començare pel cas particular perque vegi l'extrema simplicitat de la demostracio en aquest cas.

Si

(1) $$f(z)\equiv f(ce^z)$$

i si determinem ~~xxxxxxxxxx~~ $z_0=x_0+iy_0$ tal que $x_0>0$, $0\leq|y_0|<2\pi$ i que

$$|f(ce^{z_0})|=M(|c|e^{x_0};f) \quad \text{on } M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$$

la identitat (1) ens permet escriure

$$M(|c|e^{x_0};f)=|f(ce^{z_0})|=|f(z_0)|\leq M(|z_0|,f)<M(x_0+2\pi,f)$$

lo que imposa necesariament

$$|c|e^{x_0}<x_0+2\pi$$

desigualtat que per x_0 sificientment gran es impossible.

La demostracio de que, quan f(z) i g(z) son enteres, la identitat

(2) $$g(z)=g(f(z))$$

es en general impossible pot efectuar-se de la seguent manera: Segons uns resultats de Wiman i de Valiron (pot veure'ls en el llibre de Valiron que li vaig deixar) per qualsevol funcio entera f(z) poden definirse dues succesions $\{r_n\}$ i $\{N_n\}$ infinitament creixents tals que si z_n es un punt que satisfa

$$|z_n|=r_n \qquad |f(z_n)|=M(r_n,f)$$

en el cercle

$$|z-z_n|<r_n/N_n^{31/32}$$

tindrem

$$f(z)=\left(\frac{z}{z_n}\right)^{N_n} f(z_n)(1+\psi(z)) \qquad (\psi(z)<\frac{1}{10})$$

per tant en el cercle

(3) $$|z|\leq r_n(1+N_n^{-31/32})$$

la funcio f(z) prendra tots els valors de la circumferencia $|Z|=M(r_n,f)$. La identitat (2) ens permet, doncs, afirmar que en el cercle (3) existeix necessariament un punt z_n' tal que $|g(z_n')|=M(M(r_n,f),g)$, i per tant

$$r_n(1+N_n^{-31/32})\geq M(r_n,f)$$

que solament es possible si

$$f(z)=a+bz \quad \text{amb } |b|\leq 1;$$

pero que quan $|b|<1$ la funcio inversa de f(z) tindra la b de modul superior a 1, queda demostrat que la identitat (2) es solament possible quan $f(z)=a+bz$, amb $|b|=1$. Aquest resultat no pot millorarse ja que quan b es una arrel de l'unitat es evident que la identitat $g(z)=g(bz)$ pot esser satisfeta per determinades funcions enteres (i no enteres) g(z).

Per telefon no vaig entendre completament la seva demostracio que utilitza els punts fixes, pero em semble que la possibilitat de verificar la identitat $g(z)=g(bz)$, quan b es una arrel de l'unitat, demostra que existeix en ella un petit error.

Una forta abraçada del seu bon amic