0194
UAB
Biblioteca de Ciències i d'Enginyeries
Fundació FERRAN SUNYER I BALAGUER

Barcelone 6 Desembre 1948

M·J· Favard

Grenoble

Monsieur le Professeur

Je vous prie de m'excuser si je vous écris a la machine mais je considere que comme il s'agit d'une lettre avec de formules mathématiques, cela en facilitera la lecture·

Le Professeur Mandeñbrojt a bien voulu m'indiquer qu'il vous avait parlé de ma note sur les fonctions presque-périodiques, dont je me parmets de vous remettre une copie·

M· le Professeur Mandelbrojt m'à dit que vous lui avez informé que vers 1926, vous même, M· Bessonoff et Norgil avez traité déjà du même thème en employant aussi, la projection stéréographique·

Sachant cela, j'ai cherché de suité ces travaux, dont je n'avais pas eu connaissance pendant la redaction de ma note·

Dans les C·R· j'ai trové une note de vous (T·185-pag·1434) et deux notes de M· Bessonoff (T·182-pag·1011 et T·186-pag·63) Il ne m'a pas eté possible consulter les travaux de M· Norgil, car à Barcelone on ne trouve dans aucune bibliothèque la revue Matematsk Tidsskrift·

Pour des raisons qui seraient trop longues à vous exposer, j'ai beaucoup d'interet sur ce thême, je me permets donc d'attirer votre bienveillante attention sur les considerations qui font suite·

Je vous serai infiniment obligé de bien vouloir me donner votre precieuse opinion.

En premier lieu, au contraire de ce que M. Bessonoff semble admettre la definition de sa première note ne definit pas la même classe de fonctions que la definition de la seconde note. Cela resultera evident après tout ce qui suite.

Deuxiemement; soit $\Delta_n$ le domaine du plan des $z = x + iy$ formé par la reunion des deux domaines suivants:

$$4 \cdot 2^n \leq x \leq 5 \cdot 2^n \qquad c\pi \leq |y| \leq \pi \qquad (1/2 < c < 1)$$

et

$$3 \cdot 2^n \leq x \leq 6 \cdot 2^n \qquad |y| \leq c\pi$$

et soit aussi $\alpha < 1$ un nombre réel transcendant. Finalement, soit $\varphi_n(z)$ une fonction elliptique avec les periodes $9 \cdot 2^n$ et $2\pi i$ et telle que les points interieurs à $\Delta_n$ et dont les coordonnées sont des multiples entiers de $\alpha^n$, soient les seuls pôles de $\varphi_n(z)$ Suivant la definition de la première note de Bessonoff, on voit facilement que, par un choix approprié de $a_n$ la fonction

$$\gamma_n(z) = \sum a_n \varphi_n(z)$$

sera presque-périodique

D'ailleurs, quels que soient $\varepsilon$ et $\rho$, il sera possible de déterminer un nombre antier $K_0$ tel que, pour tout entier $K \geq K_0$

$$\tau = 9 \cdot 2^K + 9 n_1 2^{K+1} + 2\pi i n_2$$

où $n_1$ et $n_2$ sont des entiers quelconques, soit une presque-période de la fonction

$$F(z) = e^z e^{e^z} - f(z)$$

dans les sens de la première note de Bessonoff Cela resulte evident si l'on remarque que les points où

0194
Biblioteca de Ciències i d'Enginyeries
Fundació FERRAN SUNYER I BALAGUER

$$\left| e^{z+\tau} e^{e^{z+\tau}} - e^{z} e^{e^{z}} \right| > \frac{\varepsilon}{2}$$

sont exterieurs au domaine $D_{\varepsilon\rho}$ qui intervient dans la definition de B Bessonoff dès que $K_0$ est suffisanment grand.

L'egalité

$$F(z) + f(z) = e^{z} e^{e^{z}}$$

montre clairement que au contraire de l'affirmation de Bessonoff, la somme de deux fonctions, qui appartiennent a la classe definie dans la première note, n'appartient pas toujours a cette même classe.

D'autre part, le fait que les fonctions $f(z)$ et $-F(z)$ ont les mêmes pôles avec, les mêmes parties principales, demontre que l'affirmation de Bessonoff est fausse quand il affirme que deux fonctions presque-periodiques (suivant la definition de la première note) dont les parties principales dans le voisinagé de chaque pôle sont les mêmes, ne different que d'une constante (par contre cette affirmation est vrai pour la classe definie dans la seconde note comme j'affirme dans ma note; neanmoins M. Bessonoff ne répete pas cet resultat dans sa seconde note; il est vrai qu'il semble admettre comme je vous indique déjà, que les definitions de ses deux notes sont identiques et alors la repetition ne serait pas necessaire ~~la repetition~~).

En troisième lieu le resultat que vous demontrez. dans la note citée) est valable pour la classe de fonction que M. Bessonoff definit dans sa 2ª note, mais non pour la classe de la première. En effet, utilisant un procédé tout pareille à celui de Bessonoff on peut construire une fonction de la classe definie dans la premiere note et qui soit d'ordre superieur à 2, (d'ailleurs si $\alpha < \sqrt{\frac{1}{2}}$ la $f(z)$ est d'ordre superieur à 2) et, puisque vous affirmez déjà que toute fonction méromorphe normale du grou-

0194
UAB Biblioteca de Ciències
fons FERRAN SUNYER I BALAGUER

pe des translations est d'ordre egal ou inferieur a 2, notre affirmation resulte evidente.

De plus, je crois que, dans la definition normale, la condition que la fonction limite ne soit pas constante n'est pas necessaire pour que votre resultat soit valable par la classe des fonctions definie dans la seconde note de Bessonoff.

Finalement, la somme, le produit et le quotient de deux fonctions appartenant a la classe des fonctions presque-périodiques definie dans la seconde note de Bessonoff (identique a la classe des fonctions que j'appelle presque-ellitiques dans le nº 3 de ma note) ne sont pas toujours des fonctions appartenant à la même classe, au contraire de ce qu'affirme Bessonoff. Cela resulte du fait que les fonctions

$$\wp(z|1,i)-\wp(z|\sqrt{2},i)$$

$$\frac{\wp(z|1,i)}{\wp(z|\sqrt{2},i)}$$

ne sont pas presque-périodiques suivant la seconde note.

Dans les notes de Bessonoff il-y-a d'autres inexactitudes et de resultats dont on peut douter, car il semble que les demonstrations de Bessonoff font appel a des resultats que j'ai demontrer qu'ils sont faux

Par suite, si le travail de Norgil, que je n'ai ~~peux~~ pu consulter, ne complète pas suffisamment les resultats de Bessonoff il me semble que la publication de mes resultats, en mentionant naturellement les vôtres et ceux de M. Bessonoff, ne sera pas inutile, étant donné que les notes de M Bessonoff contiennent beaucoup d'inexactitudes, elles ne se referent qu'aux résultats du nº 3 de ma note et finalement elles ne font pas résortir suffisamment l'etroité relation qui existe entre les fonctions presque-periodiques d'après la definition de la seconde note et les fonctions elliptiques (c'est cette relation qui m'induit a les nommer presque-ellip

0194
Biblioteca de Ciències i d'Enginyeries
Fundació FERRAN SUNYER I BALAGUER

tiques ).

C'est sur l'intêret qu'il y aurait a publier ma note (peut-être modifiée) que je voudrai connaître votre opinion, qui me sera três precieuse pour prendre ma decision.

En esperant que vous voudrez bien me donner celle-ci, veulliez agréer Monsieur le Professeur, mes salutations les plus distinguées

F. Sunyer i Balaguer

Mon adresse: Calle Angel Guimera nº 3 pral. 2ª (Sarria) Barcelona Espagne

P.S. Dans la terminologie mathematique espagnole, l'expression "fonction elliptique" a le même sens que "fonction meromorphe doublement periodique", c'est dans ce sens que je l'emploie dans cette lettre et aussi dans ma note; mais je m'aperçois que plusieurs auteurs français (notamment Julia Leçons sur les fonctions uniformes a point singulier essentiel isolé) lui donnent un sens plus large